

Soulsby no. 1398a, p. 31-48 (Mémoires) ✓

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXIX.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Phyſique, pour la même Année,

Tirés des Regiſtres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXII.



TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

ANATOMIE.

CHIMIE.

BOTANIQUE.

GÉOMÉTRIE.

ASTRONOMIE.

HYDROGRAPHIE. 107

MÉCANIQUE.



TABLE
POUR LES MÉMOIRES.

HISTOIRE



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE ROYALE
DES SCIENCES.

Année M. DCCLXIX.



PHYSIQUE GÉNÉRALE.

SUR DES INSECTES
SUR LESQUELS ON TROUVE DES PLANTES.

L'HISTOIRE Naturelle offre à chaque pas des merveilles & des singularités dignes de la curiosité des Physiciens: en voici une qui ne le cède en ce genre à aucune de celles qui sont connues. On savoit que quelques plantes pouvoient V les Mém. p. 467.

croître ſur d'autres plantes deſquelles elles tiroient leur ſubſiſtance; mais on ignoroit qu'il y en eût pluſieurs qui puſſent s'établir ſur un animal vivant; il y en a cependant qui ont cette ſingulière propriété. M. Fougeroux en a obſervé quelques-unes & a recherché dans les Naturaliſtes le peu d'obſervations de ce genre qui s'y rencontroient.

Ces plantes ſont préciſément l'inverſe de la plante-ver de la Chine, dont M. de Reaumur donna l'hiſtoire en 1726 [a], un ver attache ſa chryſalide à l'extrémité des racines de cette plante; mais les plantes dont nous avons à parler naiſſent au contraire ſur des animaux vivans & en tirent peut-être leur ſubſiſtance; mais c'eſt-là tout ce qu'elles ont de commun avec eux, & on ne peut guère les regarder, comme quelques célèbres Phyſiciens, que comme une eſpèce moyenne entre le règne végétal & le règne animal. On pourroit peut-être, à plus juſte titre, les nommer *paraſites* des animaux ſur leſquels elles végètent, encore faudroit-il s'aſſurer, par des expériences déciſives, qu'elles tirent leur nourriture de quelques-uns des ſucs de ces animaux : paſſons à la deſcription que donne M. Fougeroux, des plantes de cette eſpèce qui ſont venues à ſa connoiſſance.

[a] *Voy. Hiſt. de l'Acad. année 1726, p. 19.*

Les Tranſactions Philoſophiques font mention des mouches végétantes des Caraïbes.

La nymphe de la cigale de la moyenne eſpèce, appelée par Ariſtote, *Tettigomètre* [b] ou *mère de cigale*, eſt ſujette à porter ſur elle une plante du genre des *clavaria*, ainſi nommée parce que ſes tiges & ſes branches, quand elle en a, ſont terminées par des tubercules qui lui donnent l'air d'une petite maſſue.

[b] Τέττιξ *cicada*, Μήτηρ *mater*.

La racine ou pédicule de la plante couvre ordinairement le corps de l'inſecte & quelquefois la tête ou le corcelet, & lorſque l'un & l'autre ont été conſervés dans l'eſprit-de-vin, on peut enlever la plante & la ſéparer de l'animal ſans endommager celui-ci; le pédicule de la plante ſe trouve alors traverſé par des cannelures que les anneaux de l'inſecte y ont imprimé; mais on ne trouve aucun veſtige de racines qui pénètrent dans le corps de l'animal.

Cette plante produit des filets plus ou moins longs & en plus ou moins grand nombre, M. Fougeroux en a vu qui avoient

jusqu'à deux pouces de long, ces filets sont terminés par des têtes ou tubercules, ils sont pleins & solides, tant qu'ils ne sont pas parvenus à leur entier accroissement; passé ce terme, les sommités se trouvent souvent percées, vraisemblablement par des vers qui se métamorphosent en sortant de ces plantes.

Certaines plantes se trouvent encore quelquefois, non-seulement sur la nymphe de cigale, mais encore sur la cigale même; M. Fougeroux en a vu une sur une cigale apportée de Cayenne, celle-ci est différente de la *clavaria* dont nous venons de parler, c'est une espèce de *fucus* formé de longs filets blancs & soyeux qui recouvrent tout le corps de l'insecte & le débordent de sept à huit lignes dessus & dessous le ventre de l'animal. M. Fougeroux a encore vu la même plante attachée à un autre insecte du genre des procigales.

La *clavaria* vient aussi sur des vers, M. Fougeroux en a vu sur plusieurs, & notamment sur ceux que produisent, en se métamorphosant, la petite espèce de hannetons, & on ne peut pas supposer que ces vers soient du genre de ceux qui produisent les cigales; ces deux espèces de vers ont entr'eux des différences trop marquées pour les confondre, les vers de cigales ont deux grosses pinces qui leur sont particulières & qui ne permettent pas de s'y méprendre.

Nous avons dit que les Transactions Philosophiques parloient de la mouche végétante des Caraïbes: voici ce qu'en dit M. Watson; ces mouches se trouvent dans la Dominique, elles s'enterrent, selon lui, dans le mois de Mai & commencent à se métamorphoser en Juin; le petit arbrisseau qui en naît ressemble à une branche de corail, il croît jusqu'à la hauteur de trois pouces & porte plusieurs petites gousses, où naissent certains vers qui se métamorphosent ensuite en mouches.

Il est presque inutile de réfuter ce sentiment, absolument contraire aux idées de tous les Naturalistes & aux faits sur lesquels elles sont appuyées, & il est évident que M. Watson a été trompé par les vers, qui, comme nous l'avons dit, rongent la *clavaria* & se métamorphosent dans les creux qu'ils y ont formés.

Celui de M. Hill paroît bien plus probable & est fondé sur

les obſervations qu'il a faites à la Martinique; les cigales ſont fort communes dans cette île, & pendant leur état de nymphe, elles s'enterrent ſous les feuilles mortes pour attendre leur métamorphoſe; ſi le temps n'eſt pas favorable, il périt un grand nombre de ces inſectes, alors les ſemences de *clavaria* s'attachent aux cadavres & ſe développent à peu près comme le *fungus ex pede equino* vient ſur la corne des chevaux morts; cette explication ne préſente rien de contraire à la bonne Phyſique, & M. Fougeroux penche beaucoup à l'adopter.

Il paroît donc conſtant qu'il y a des plantes qui viennent ſur les cadavres de quelques animaux, que celles qu'on connoît ſont preſque toutes du genre des *fungus*, que même quelques-unes viennent ſur des animaux vivans; M. Fougeroux a cru, comme nous l'avons dit, remarquer des pièces qui ſembloient le prouver, & la mouſſe qu'on obſerve ſur les anciennes carpes, telles que celles de Fontainebleau, en peut encore fournir une preuve.

Mais s'il y a des plantes qui peuvent croître & végéter ſur des animaux vivans, il y a auſſi des inſectes qui choiſiſſent les racines ou d'autres parties d'une plante pour s'y attacher lorſqu'ils ſentent approcher le temps de leur métamorphoſe; la plante-ver de la Chine eſt de ce nombre, il eſt vrai que l'inſertion de l'animal dans la racine, où il ſemble être comme chatonné, ſembleroit inſinuer que c'eſt la plante qui eſt crûe ſur le ver, & non pas celui-ci, qui s'eſt attaché à la plante; cependant le volume de la plante, qu'on dit être analogue au *Gin-ſeng*, & la manière, commune à un grand nombre d'inſectes, de s'attacher à différens corps pendant leur métamorphoſe, ne permettent pas de s'écarter en ce point du ſentiment de M. de Reaumur.

Nous avons même en Europe un inſecte du genre des mantes qui fait, à découvert, la même manœuvre, on le nomme en Portugal *loura deos;* & en Provence, où il s'en trouve un de même eſpèce, *prega - diou,* parce qu'il ſe met ſouvent dans la poſture d'un homme qui eſt à genoux & qui prie Dieu. Cet animal s'attache, au temps de ſa métamorphoſe, aux extrémités des branches de quelques arbres, & il n'en a pas fallu davantage à ceux qui les ont vus ſortir de leurs chryſalides, ainſi

ſituées, & qui ſont à peu près du même vert que la branche à laquelle elles ſont attachées, pour aſſurer que ces inſectes naiſſoient effectivement d'un arbre.

On pourroit peut-être s'étonner de la conſtance avec laquelle la *clavaria* ſemble s'attacher par préférence, aux nymphes de cigales dans l'Amérique, & de ce que dans les autres pays où ces inſectes ſe multiplient, on ne trouve pas cette plante ſur elles ni ſur leurs nymphes; mais pour peu qu'on y faſſe réflexion, on verra aiſément que rien n'eſt plus naturel. Ces plantes ſont du genre des paraſites, & on ſait que chaque paraſite affecte de s'attacher à une eſpèce de plante déterminée, il n'eſt donc pas étonnant que celle-ci s'attache par préférence à une même eſpèce d'inſecte: il eſt auſſi facile de voir que le grand nombre de ces nymphes qui ſe trouvent en Amérique, & les circonſtances du climat & de l'endroit, y rendent cette eſpèce de phénomène très-commun, quoiqu'on ne l'obſerve pas dans les contrées de l'Europe où il y a le plus de cigales. Au reſte, M. Fougeroux, qui n'a pu faire ſes obſervations que ſur des inſectes deſſéchés ou conſervés dans l'eſprit-de-vin & ſur les figures qu'en ont donné quelques Phyſiciens, eſt bien éloigné de regarder ce travail comme complet, & il invite ceux des Naturaliſtes qui ſeront à portée d'examiner ce fait ſur le lieu, & par eux-mêmes, à multiplier les obſervations d'après leſquelles ſeules on peut obtenir la véritable théorie de ce phénomène d'Hiſtoire Naturelle.

SUR LA
PIERRE APPELÉE TRIPOLI.

QUOIQUE le Tripoli ſoit une matière très-ſouvent employée dans les Arts, & qu'à cet égard, il ſoit devenu un objet de commerce, on n'en eſt pas mieux inſtruit ſur ſa nature & ſur ſon origine, & il y a peu de points d'Hiſtoire Naturelle ſur lequel les ſentimens des Phyſiciens aient plus varié. V. les Mém. p. 272.

Nous avons en France des carrières de Tripoli, on en trouve à

Polligné en Bretagne, & à Menat à ſept lieues de Riom en Auvergne; mais celui dont on fait le plus de cas, eſt celui qu'on tire de Veniſe, & que les Vénitiens prennent aux environs de Corfou dans une montagne nommée *Epiro*, près d'un bourg appelé *Santi-Quarenta*.

Cette eſpèce de pierre eſt légère & peu ſolide, les parties qui la compoſent n'étant que foiblement liées, ſur-tout lorſqu'elle eſt récemment tirée de la carrière; par cette raiſon même, elle ſe ſépare dans l'eau, plutôt qu'elle ne s'y diſſout, & s'y précipite peu de temps après. Lorſqu'on en applique un morceau ſur la langue, elle s'y attache, donne une ſaveur de glaiſe qui eſt même perceptible à l'odorat; les acides n'agiſſent que très-peu ſur le tripoli, il ſe vitrifie à un feu violent; enfin ſa couleur eſt d'un jaune plus ou moins foncé, & quelquefois même d'une légère nuance de rouge, ſuivant la nature de la matière dont le tripoli a été formé & la préparation qu'elle a reçue pour être réduite en cet état.

Les ſentimens des Naturaliſtes ont extrêmement varié ſur la nature du tripoli, l'analyſe chimique n'a même pu fixer ces variations; les uns l'ont mis au rang des argiles vitrifiables; d'autres l'ont placé avec les terres réfractaires, d'autres l'ont mis au rang des craies; quelques-uns en ont fait un ſablon minéral, d'autres ont cru qu'il étoit formé d'arbres & de bois foſſiles; d'autres enfin, croient que cette pierre eſt formée d'une argile ou limon fin qui lui eſt particulier; & ce dernier ſentiment, qui eſt adopté par M. Pott, ſemble être celui qui s'accorde le mieux avec les expériences & les obſervations.

Mais quand même on admettroit que le tripoli eût été originairement une eſpèce d'argile, il eſt ſûr qu'il n'eſt plus en cet état dans les carrières où on le trouve, & il eſt queſtion de déterminer le changement qu'il a ſouffert, & les agens qui le lui ont fait éprouver: la ſeule inſpection des carrières d'où on le tire pouvoit décider cette queſtion, & c'eſt auſſi à ce moyen qu'a eu recours M. Fougeroux; voyons ce qu'a produit cet examen.

Les pierres des environs de Menat en Auvergne & de Polligné en Bretagne, où ſe trouve le tripoli, ſont ſchiteuſes & non litées; elles ſont jaunes & de différentes nuances de rouge, & cette

dernière couleur leur vient d'une légère quantité d'ocre qu'elles contiennent & qui a ſubi l'action du feu; auſſi eſt-ce une eſpèce de tradition, que les carrières de tripoli de Menat ont été autrefois embraſées pendant ſept à huit ans; on y trouve des pierres brûlées & réduites en écume plus ou moins légère, & les mêmes indices de la préſence d'un volcan, ſe retrouvent à la carrière de Polligné. Le tripoli de Menat a donné, par l'analyſe chimique, du ſoufre & du fer; & celui de Polligné, du ſoufre & de l'alun; matières qu'on ſait être ordinairement des produits de volcan.

Il y a plus, en couvrant de terre la glaiſe ou le ſchiſte glaiſeux & l'expoſant au feu, dans des vaiſſeaux fermés, on obtient une eſpèce de tripoli ſemblable au mauvais tripoli de Bretagne. Il y a bien lieu de croire qu'avec un peu plus de peine, l'Art viendroit à bout d'imiter en ce point plus parfaitement la Nature.

On trouve dans quelques endroits de l'Italie, des terres argileuſes brûlées par les feux ſouterreins, & ſouvent elles renferment des végétaux, ce qui pourroit appuyer le ſentiment de M. de Gardeil, ſur la nature du tripoli.

Mais rien ne peut mieux prouver la néceſſité de l'action des feux ſouterreins pour la formation du tripoli, que ce qui ſe paſſe en Forès dans la carrière de *Saint-Genis*, proche Saint-Étienne, où le feu eſt depuis plus de cent ans, & dont nous avons parlé en 1765*.

* *Voy. Mém. de l'Acad. 1765, p. 389.*

Les pierres de tout ce canton ſont du ſchiſte & le charbon eſt recouvert en particulier d'une couche de pierre argileuſe, ou d'un ſchiſte jaune & rougeâtre, au moins c'eſt ce qu'on retrouve dans les endroits voiſins de la carrière, & qui n'ont point été atteints par le feu; mais dans ceux qui ont éprouvé ſon action, on retrouve les mêmes pierres qu'à Polligné: quelques-unes ſont poreuſes ou réduites en écume, d'autres ſont vitrifiées, d'autres enfin, ſont tendres, ſe réduiſent en pouſſière & ſont un vrai tripoli plus ou moins rouge, ſelon que la terre contenoit plus ou moins d'ocre ferrugineuſe.

Voilà donc un tripoli évidemment formé par l'action du feu avec une terre ſemblable à celle qui avoiſine preſque toujours les carrières de cette matière; on retrouve aux environs de ces carrières,

les mêmes pierres brûlées, dans le même état qu'à Saint-Génis; où la présence du feu n'est pas équivoque, & s'il se trouve quelques carrières de tripoli où ces signes manquent, ne pourroit-on pas supposer qu'il s'est formé plus haut, & y a été entraîné par les eaux qui l'y ont déposé?

Il seroit donc très-naturel de conclure que le tripoli est essentiellement un schiste ou une glaise brûlée, on a souvent adopté en Physique des opinions moins appuyées de preuves; mais M. Fougeroux n'ose encore prononcer sur cet article, & ne propose ses idées, que comme un motif aux Naturalistes d'étudier de plus près la nature de cette matière. Plus on est au fait de l'Histoire Naturelle & moins on se presse de donner des décisions générales.

SUR

LE RAPPORT DES DIFFÉRENTES DENSITÉS DE L'ESPRIT-DE-VIN,

AVEC SES DIFFÉRENS DEGRÉS DE FORCE.

V. les Mém. p. 433.

ON a dû s'apercevoir de bonne heure, qu'en mêlant de l'eau pure à une liqueur spiritueuse, comme, par exemple, de l'esprit-de-vin, on affoiblissoit ce dernier dans la même proportion qu'on y joignoit de l'eau; en sorte qu'une liqueur composée de parties égales d'eau & d'esprit-de-vin, étoit de moitié moins forte, ou moins spiritueuse que l'esprit-de-vin pur.

Il résultoit encore nécessairement du mélange des deux liqueurs, que l'eau étant spécifiquement plus pesante que l'esprit-de-vin, la liqueur composée des deux, devoit être d'une gravité spécifique, moyenne entre l'un & l'autre, & jusque-là on avoit bien raisonné; mais on se pressa un peu trop de conclure que cette augmentation de pesanteur étoit toujours proportionnelle à la quantité d'eau pure qu'on y avoit fait entrer, c'est-à-dire en raison inverse de la force de la liqueur, & cette conclusion quoiqu'universellement adoptée par les Physiciens fut démentie par l'expérience.

En

En 1733*, feu M. de Reaumur travaillant à la construction de ses thermomètres, eût besoin d'établir avec précision le degré de force de l'esprit-de-vin qu'il employoit; pour cela, il fit plusieurs mélanges de l'esprit-de-vin le plus pur, le plus déflegmé, avec de l'eau pure, & ces opérations lui offrirent un phénomène auquel il ne se seroit pas attendu.

* Voyez Hist. de l'Acad. année 1733, p. 18.

Il étoit naturel de penser qu'en ajoutant à deux mesures d'esprit-de-vin, qui occupoient un pouce de hauteur dans un tuyau, deux semblables parties d'eau, la liqueur totale, après le mélange, y devoit occuper deux pouces; ce fut cependant ce qui n'arriva point; la liqueur composée occupa toujours un moindre espace que celui qu'auroient occupé séparément, les deux liqueurs composantes.

Cette observation, rapportée alors par M. de Reaumur, fit du bruit dans le monde Physicien; mais on se contenta de la considérer comme un fait curieux & isolé, & M. de Reaumur lui-même, qui n'avoit pour but dans cette recherche que de fixer, s'il m'est permis d'employer ce terme, le titre de son esprit-de-vin, ne la poussa pas plus loin.

L'expérience de M. de Reaumur, faisoit voir évidemment que les deux liqueurs se pénétroient mutuellement, ou qu'au moins l'une des deux pénétroit l'autre, & qu'il résultoit de cette pénétration une liqueur spécifiquement plus pesante que la proportion dans laquelle les liqueurs composantes étoient mêlées, ne sembloit la donner, & tous les Physiciens en demeurèrent d'accord; mais personne ne s'avisa de remarquer qu'il naissoit de-là deux questions importantes: la première de savoir dans le cas où il n'y auroit qu'une liqueur qui pénétrât l'autre, laquelle de l'eau ou de l'esprit-de-vin étoit la liqueur pénétrante ou pénétrée, & la seconde de déterminer quelle étoit la loi suivant laquelle se faisoit cette pénétration & l'augmentation de densité de la liqueur composée; on ne pensa pas même à la première, & quant à la seconde on supposa, sans aucune preuve, que cette augmentation de densité étoit proportionnelle à l'affoiblissement de la liqueur, c'est-à-dire, à la quantité d'eau qu'on y avoit introduit.

C'est à l'examen de ces deux questions qu'est destiné le Mémoire

de M. Briſſon dont nous avons à rendre compte; il examine d'abord les loix du rapport qui ſe trouve entre la gravité ſpécifique de la liqueur compoſée d'eau & d'eſprit-de-vin, & la force de cette liqueur; & en ſecond lieu, ſi les deux liqueurs ſe pénètrent mutuellement & en quelle proportion; & dans le cas où il n'y en auroit qu'une qui pénétrât l'autre, laquelle des deux jouit de cette propriété.

On juge bien que de ſemblables queſtions ne peuvent ſe décider que par des expériences nombreuſes & très-préciſes; & c'eſt auſſi la voie qu'a priſe M. Briſſon.

Pour y parvenir, il a commencé par ſe pourvoir d'un eſprit-de-vin extrêmement déflegmé & d'eau de pluie recueillie en plein air, dans un vaſe de fayence bien net, & qu'il n'avoit commencé à recueillir que quelques heures après le commencement de la pluie, pour donner le temps aux particules étrangères flottantes en l'air, & qui auroient pu altérer la pureté de l'eau, de ſe précipiter; il pouſſa même l'attention juſqu'à filtrer cette eau avant que de l'employer.

Avec cette eau & cet eſprit-de-vin, M. Briſſon a fait quinze mélanges; le premier, d'une partie d'eau avec quinze parties d'eſprit-de-vin; le ſecond, de deux parties d'eau avec quatorze parties d'eſprit-de-vin, & ainſi de ſuite juſqu'au quinzième, qui ne contenoit plus qu'une partie d'eſprit-de-vin contre quinze parties d'eau; ces parties étoient meſurées par un chalumeau de verre renflé qu'il plongeoit dans la liqueur, juſqu'à un fil délié placé ſur le tube très-menu qui termine cet inſtrument, & il n'avoit aucune erreur à craindre ſur ces meſures; toutes les expériences ont été faites à la température indiquée par le quatorzième degré au-deſſus de la congélation du thermomètre de M. de Reaumur. Sitôt que chaque mélange étoit fait, il étoit mis dans une bouteille bien bouchée pour éviter l'évaporation; il le remuoit pour faciliter le mélange, & le laiſſoit repoſer aſſez de temps pour diſſiper la chaleur cauſée par le mélange des deux liqueurs.

Il réſultoit du travail de M. Briſſon, dix-ſept liqueurs de force & de peſanteur ſpécifique différentes; ſavoir, l'eſprit-de-vin pur, l'eau pure, & les quinze mélanges dont nous venons de parler,

dont il connoissoit exactement la force par la proportion dans laquelle l'eau & l'esprit-de-vin étoient mêlés.

Pour connoître présentement la marche de leur augmentation de densité, & savoir quelle proportion elle avoit avec l'affoiblissement connu de la force de ces liqueurs, il falloit examiner avec précision leurs pesanteurs spécifiques.

Pour y parvenir, M. Brisson a pris un aréomètre de verre, lesté à l'ordinaire de mercure; cet instrument avoit le col du tube très-mince, & portoit au haut de ce tube un petit plateau, sur lequel on pouvoit mettre de petits poids, soigneusement étalonnés, pour obliger l'instrument à s'enfoncer quand il étoit nécessaire : cet aréomètre fut pesé dans une balance très-exacte, & M. Brisson eut grand soin d'écrire son poids.

C'est à l'aide de cet instrument que M. Brisson a mesuré la pesanteur spécifique de cet instrument; il l'a d'abord plongé dans l'esprit-de-vin pur, & il a marqué avec un fil, sur le col de l'aréomètre, le point jusqu'auquel il s'enfonçoit; le volume d'esprit-de-vin, déplacé par cette immersion, a pesé 686 grains & $\frac{6}{8}$. On juge bien que pour le faire enfoncer autant dans l'eau, il a fallu mettre des poids dans le plateau de la balance, & le volume d'eau, égal à celui de l'esprit-de-vin, a pesé 820 grains & $\frac{3}{8}$.

Il est presqu'inutile d'ajouter ici, qu'en plongeant successivement l'aréomètre dans les différentes liqueurs composées, le même volume a été de plus pesant en plus pesant, à mesure que les liqueurs étoient plus chargées d'eau; M. Brisson n'en a pas été surpris, c'étoit une conséquence nécessaire du mélange plus ou moins grand de l'eau avec l'esprit-de-vin; il ne fut pas plus étonné de trouver toujours la pesanteur spécifique des liqueurs composées plus grande que ne le demandoit la quantité d'eau mêlée avec l'esprit-de-vin, c'étoit l'effet de la pénétration des liqueurs entr'elles; mais il le fut beaucoup de voir la marche de ces augmentations, & de reconnoître qu'elle n'étoit nullement proportionnelle à l'affoiblissement de l'esprit-de-vin. Deux Tables, dont la première contient les augmentations de poids observées, avec leurs différences; & la seconde, ces mêmes augmentations réelles comparées avec celles qui résulteroient du mélange de l'eau avec l'esprit-de-vin, s'il ne

ſe faiſoit point de pénétration entre les deux liqueurs, lui ont fait voir toutes ces différences.

Des expériences de M. Briſſon, que nous venons de rapporter, il réſulte que l'eſprit-de-vin augmente de denſité à meſure qu'on y mêle de l'eau, mais cette augmentation n'eſt nullement proportionnelle à la quantité d'eau mêlée, ou ce qui revient au même, à l'affoibliſſement de l'eſprit-de-vin : les différences entre les augmentations de denſité, cauſées par la pénétration mutuelle des deux liqueurs vont en diminuant, juſqu'à ce que la liqueur ſoit compoſée de parties égales d'eau & d'eſprit-de-vin : paſſé ce terme, à meſure qu'on ajoute de l'eau, les différences entre les augmentations, vont en augmentant. Tout cela prouve inconteſtablement que, comme nous l'avons déjà dit, l'eau & l'eſprit-de-vin ſe pénètrent mutuellement, mais que cette pénétration a un terme, & qu'elle n'a lieu que juſqu'à ce que le mélange ſoit compoſé de parties égales d'eau & d'eſprit-de-vin, & qu'après ce terme, elle éprouve un décroiſſement très-ſenſible,

Mais comment accorder ceci avec les obſervations de M. de Reaumur, qui aſſure que la plus grande diminution de volume ſe trouve quand le mélange eſt compoſé de deux tiers d'eau & d'un tiers d'eſprit-de-vin ? voici la raiſon très-probable que donne M. Briſſon de cette différence. M. de Reaumur, qui n'avoit pas les mêmes vues que lui, ne faiſoit pas ſes mélanges ſéparément, il ajoutoit ſeulement de l'eau à des mélanges déjà faits, ſans même leur donner le temps de perdre la chaleur que le mélange avoit occaſionnée; d'où il ſuit qu'il a vraiſemblablement ajouté à la diminution de volume, cauſée par la pénétration, celle qui ne venoit que du refroidiſſement de la liqueur; & que l'opinion de M. Briſſon, qui fixe, par ſes expériences plus ſuivies, le terme de la plus grande diminution de volume au terme de l'égalité de l'eau & de l'eſprit-de-vin, n'en peut être ébranlée.

L'augmentation de denſité qui provient de la pénétration mutuelle des deux liqueurs, eſt, ſuivant M. Briſſon, de $\frac{1}{17}$ & $\frac{1}{3}$, ou $\frac{3}{52}$ du poids de l'eſprit-de-vin. M. de Reaumur ne la faiſoit que d'un vingtième; mais cette différence eſt une ſuite de la première erreur, étant préciſément la quantité qui convient au mélange

de deux tiers d'eau & d'un tiers d'eſprit-de-vin, que ce ſavant Phyſicien regardoit comme celui qui occaſionnoit la plus grande pénétration.

Il eſt donc déjà bien prouvé que dans le mélange de l'eau & de l'eſprit-de-vin, il ſe fait une pénétration réelle entre les deux liqueurs, de laquelle il réſulte une augmentation de denſité; mais la pénétration eſt-elle mutuelle, ou une ſeule des deux liqueurs pénètre-t-elle l'autre?

M. Briſſon croit que l'augmentation de denſité eſt dûe à une pénétration mutuelle des deux liqueurs, & voici comme il le prouve. L'augmentation de denſité d'un mélange, compoſé de huit parties d'eau & de huit parties d'eſprit-de-vin, eſt d'environ vingt grains; ſi la ſeule introduction de l'eau dans les pores de l'eſprit-de-vin, étoit la cauſe de cette augmentation, un mélange d'une ſeule partie d'eſprit-de-vin, avec quinze parties d'eau, devroit augmenter en denſité de deux grains & demi, huitième partie de vingt grains, puiſqu'il y auroit bien plus d'eau qu'il ne faut pour remplir les pores de l'eſprit-de-vin; cependant il n'augmente en denſité que d'environ un grain & trois quarts, preuve évidente que l'eſprit-de-vin pénètre auſſi les pores de l'eau, puiſqu'étant en trop petite quantité dans le mélange, il n'a pu fournir aſſez de particules pour les remplir: d'un autre côté, ſi l'augmentation de denſité n'étoit dûe qu'à l'introduction de l'eſprit-de-vin dans l'eau, un mélange d'une ſeule partie d'eau, avec quinze parties d'eſprit-de-vin, devroit donner deux grains & demi d'augmentation de denſité, & il en donne une de près de quatre grains & demi, l'eau s'inſinue donc elle-même dans les pores de l'eſprit-de-vin, & l'introduction de l'eſprit-de-vin, dans les pores de l'eau, n'eſt pas la ſeule cauſe de l'augmentation de denſité de ce mélange.

Il eſt donc déjà bien ſûr que les deux liqueurs ſe pénètrent mutuellement, mais ſe pénètrent-elles également?

Pour parvenir à décider cette queſtion, il ne faut que conſidérer ce qui devroit arriver ſi les deux liqueurs ſe pénétroient également, & ce qui arrive réellement dans l'expérience: ſi la pénétration étoit égale, il eſt ſûr que l'augmentation de denſité ſeroit la même, ſoit que le mélange fût compoſé de quinze parties d'eau & d'une

d'eſprit-de-vin, ou de quinze parties d'eſprit-de-vin & d'une d'eau: or, c'eſt ce que l'expérience ne donne nullement; la denſité, produite par le mélange d'une partie d'eſprit-de-vin avec quinze parties d'eau, n'eſt que de quatre grains & demi; tandis que celle qui vient du mélange d'une partie d'eau avec quinze parties d'eſprit-de-vin, n'eſt que d'un grain & trois quarts: il y a donc plus de parties d'eau qui pénètrent l'eſprit-de-vin, qu'il n'y a de parties d'eſprit-de-vin qui pénètrent l'eau; & M. Briſſon trouve que l'eau contribue au phénomène pour deux tiers, & l'eſprit-de-vin pour deux tiers.

Il réſulte encore des expériences qu'il a faites, que toutes les parties de l'eau ne ſont pas également propres à s'inſinuer dans les pores de l'eſprit-de-vin, & que par conſéquent elles ne ſont pas toutes ſemblables: mais comment ſuppoſer des parties diſſemblables dans une matière regardée juſqu'ici comme un élément, & qui par conſéquent devroit avoir toutes ſes parties homogènes; mais M. Briſſon ne convient nullement de cette conſéquence: la matière de la lumière ou du feu eſt bien certainement un élément; cependant les expériences de M. Newton prouvent évidemment que ſes parties ne ſont rien moins qu'homogènes & que par conſéquent l'homogénéité des parties n'eſt nullement néceſſaire à un élément.

Toutes ces expériences ſemblent conduire & conduiſent réellement à un moyen de connoître la force des différentes eſpèces d'eſprit-de-vin & d'eau-de-vie, c'eſt-à-dire en quelle proportion l'eſprit inflammable y eſt mêlé avec l'eau; mais pour peu qu'on y faſſe d'attention, il ſera aiſé de voir que ce ne peut être par le moyen de l'aréomètre ſeul & ſans aucun calcul; cet inſtrument ne donne, par ſes différens enfoncemens, que le rapport des denſités des liqueurs où on le plonge, & nous venons de voir que ces denſités n'ont aucun rapport avec les quantités d'eau & d'eſprit ardent qui compoſent la liqueur qu'on examine.

M. Briſſon trouve cependant le moyen de ramener le pèſe-liqueur à cet uſage. Pour cela, il a dreſſé une Table qui contient les peſanteurs ſpécifiques de toutes les liqueurs mêlées d'eau & d'eſprit-de-vin, depuis 1000, qui repréſente celle de l'eau pure, juſqu'à 837, qui repréſente celle de l'eſprit-de-vin pur. Alors,

en se servant de l'aréomètre, on le plongera dans l'eau pure, & on remarquera la quantité de poids qu'il faudra y ajouter pour le faire enfoncer jusqu'à la marque qui doit être sur sa tige, & on ajoutera ce poids avec celui de l'aréomètre. On fera pareille opération sur l'eau-de-vie à essayer, & on dira comme, le poids du volume d'eau pure, indiqué par l'instrument, est à 1000 pesanteur spécifique de l'eau dans la Table; ainsi le poids du même volume de l'eau-de-vie proposée, est à un quatrième terme qu'on cherchera dans la Table; & à côté de ce nombre, ou en prenant une partie proportionnelle entre ceux qui en approcheront le plus, on trouvera la quantité d'eau & celle d'esprit ardent que contient la liqueur. C'est ainsi que M. Brisson trouve le moyen de ramener l'aréomètre à un usage que le peu de rapport qu'il y a entre les quantités de flegme & d'esprit ardent, & l'augmentation de densité des liqueurs qui en sont composées paroissoit lui interdire, & qu'il lève la difficulté que ses recherches, dont nous venons de rendre compte, semblent introduire dans cette opération.

OBSERVATIONS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE.

I.

L'ACADÉMIE à déjà donné, en 1761 *, l'histoire d'un Tireur de Houille, qui avoit été pendant huit jours enfermé, par un accident, dans la galerie d'une mine de cette matière, auprès de Charleroy. Voici encore un fait à peu près pareil, arrivé dans une semblable mine, & que l'Académie doit au soin que M. Bertin, Ministre, a eu de lui en faire passer la relation.

* *Voy. Hist. de l'Acad. année 1761, p. 26.*

Le 17 Novembre 1768, le nommé Vital, Charbonnier, du bourg de Sainte-Florine en Auvergne, travaillant avec un de ses camarades dans une mine de charbon, à la profondeur de 275 pieds ou près de 56 toises, ils furent tout-à-coup engloutis avec les étais & plus de 20 toises de charbon sur eux, dans des

galeries inférieures précédemment vidées, & dont ils n'avoient point de connoissance : le père de Vital & d'autres ouvriers qui se trouvèrent présens, firent aussitôt tous leurs efforts pour tâcher de les retirer, mais leurs tentatives furent vaines, parce qu'il retomboit toujours plus de charbon d'en haut qu'ils n'en pouvoient enlever ; ils se retirèrent ayant perdu tout espoir de les revoir jamais, & leur firent même rendre les honneurs funèbres tant ils étoient persuadés de leur mort.

Le nommé Vital étoit cependant échappé, quelques bois des débris avoient mis en se croisant, sa tête & la moitié de son corps, à l'abri sous une espèce de voûte, mais ses cuisses & ses jambes étoient retenues dans le charbon éboulé, dont il eut bien de la peine à se débarrasser ; il fut plus de trois heures à y parvenir : pendant ce travail, il entendit quelque temps son camarade crier & se plaindre dans une galerie plus basse ; mais ne l'entendant plus, il l'appela inutilement, il étoit apparemment péri. Vital enfin dégagé des décombres, étouffant faute d'air, & tombant de foiblesse & de fatigue, s'assit & s'endormit ; à son réveil il se mit à tâter de tous côtés & trouva que l'extrémité de ce passage étoit terminée par un puits de quatre pieds en quarré & d'environ trente pieds de hauteur, par où l'on y descendoit autrefois; mais ce puits étoit bouché, du moins de son côté, par des décombres qu'on y avoit jetés ; il entreprit de tirer ces décombres dans le passage & de se faire jour dans le puits & il y travailla le reste du jeudi, la nuit qui suivit, le vendredi, la nuit du vendredi au samedi & une partie du samedi. Quoiqu'il eût eu un poignet démis lors de l'éboulement, l'espoir de conserver sa vie lui donnoit des forces; il parvint enfin à monter par ce puits dans les galeries où l'on travailloit, mais il n'y trouva personne, les ouvriers ayant déjà quitté leur travail, & malgré son bras estropié, il monta dans le principal puits, jusqu'à cinquante pieds de hauteur, à la faveur des bois des étais auxquels il s'accrochoit ; mais ce secours lui ayant manqué, parce que le reste du puits étoit percé dans le roc & n'avoit pas eu besoin d'étais, il demeura à cette hauteur suspendu en l'air accroché par les mains au dernier étai, & les jambes appuyées contre le puits : deux heures s'écoulèrent dans cette

fatigante

fatigante situation, pendant lesquelles il ne cessa de crier; enfin un habitant de Sainte-Florine l'entendit, on vint à son secours & on lui jeta une corde, au moyen de laquelle il sortit de la mine où il avoit été près de trois jours & deux nuits depuis son accident. On lui présenta à boire & à manger au sortir de la mine, mais il ne put rien prendre; il retourna chez lui à pied, & après quelques momens de repos, il mangea un peu de potage: il a déclaré que pendant son séjour dans cet abîme, & malgré le travail forcé qu'il y avoit fait, il n'avoit senti ni faim ni soif; étoit-ce l'émotion? étoit-ce l'air étouffé qu'il respiroit, qui l'en avoit garanti? Il ne lui est demeuré, de ce terrible accident, que la douleur de son poignet démis, & quelques accès de rétention d'urine.

Ce fait, & celui que l'Académie a rapporté en 1761, font bien voir combien il est essentiel de ne pas se rebuter dans les secours qu'on entreprend de donner aux malheureux qui sont dans le cas que nous venons de rapporter, & combien il est contraire à l'humanité de se figurer trop légèrement qu'ils sont péris. La Nature a, comme on voit dans de certaines circonstances, plus de ressources qu'on n'oseroit ordinairement lui en supposer.

II.

La ville de l'Argentière en Vivarais est bâtie en amphithéâtre sur le bord d'un ruisseau qui coule toujours, mais qui n'a que très-peu d'eau hors le temps des inondations; il y en eut une vers la fin de Décembre 1768, qui le fit enfler prodigieusement; mais les pluies qui la causoient ayant cessé, il commença à baisser la nuit du 2 au 3 Janvier par un temps très-serein. Le 3, sur les dix heures du matin, on vit, avec la plus grande surprise, naître dans les endroits bas de plusieurs maisons, des sources abondantes d'une eau très-claire qui, après avoir rempli les caves, se répandit dans les rues; dans le même temps on vit jaillir, dans plusieurs endroits du lit du ruisseau dont les eaux étoient encore troubles, des eaux très-claires & fumantes; ce phénomène dura trois jours, & la quantité de ces eaux jaillissantes, sorties pendant les trois jours, fut évaluée à 43200 toises cubes. On soupçonna que les eaux

du ruisseau, dans l'inondation précédente, s'étoient fait jour dans quelque cavité souterraine, placée sous la ville de l'Argentière, & que c'étoit cette même eau qui avoit reparu par les différentes sources & les différens jets qu'on avoit observés. Cette explication, d'ailleurs assez naturelle, n'étoit pas propre à rassurer les habitans de la ville de l'Argentière; aussi furent-ils dans la plus vive inquiétude, qui n'a été calmée que par le long temps qui s'est écoulé sans accident depuis l'observation de ce phénomène. Tout ce détail est tiré d'une lettre écrite à M. le Prince de Beauvau, que ce Seigneur avoit remise à M. le Comte de Maillebois, pour la communiquer à l'Académie.

III.

Le 7 Juillet 1769, il y eut à Paris un orage accompagné de grêle d'une grosseur considérable, circonstance rare dans les pays de plaines peu élevées; M. Adanson qui l'observa hors des portes de Paris, & au sud-est du Jardin du Roi, en donna le lendemain le détail à l'Académie : en voici les circonstances les plus essentielles.

Cet orage avoit été précédé de sept jours complets de sécheresse; pendant lesquels il avoit soufflé un vent assez fort, variant depuis le nord-ouest jusqu'au nord-est, & cependant quelques nuages élevés paroissoient venir du sud-est; le baromètre s'étoit toujours soutenu à 28 pouces 4 lignes, & le thermomètre de M. de Reaumur avoit marqué de 17 à 22 degrés au-dessus de la congélation; le vent de nord-est avoit beaucoup molli dans les deux derniers jours, & avoit fini par tomber entièrement; le baromètre étoit baissé d'une ligne, & le thermomètre s'étoit élevé presque subitement jusqu'à 26 & 27 degrés.

Tel avoit été l'état de l'atmosphère lorsque l'orage s'annonça, le 7 Juillet sur les 6 heures du soir, par de grosses gouttes de pluie très-écartées & accompagnées d'éclairs & de coups de tonnerre assez forts & assez fréquens; à ce prélude, succéda une pluie forte mêlée de grêle & chassée par un vent d'ouest assez fort; les grêlons étoient figurés en pyramide à six pans, très-obtus, de 6 lignes de longueur sur 3 de largeur : tout ceci dura une demi-heure; après

quoi, le vent s'étant rangé au nord-eſt, y ſouffla très-violemment, lançant avec la pluie des grêlons faits comme des boutons d'habit & de 9 lignes de diamètre; ces grains étoient ſi tranſparens & ſi réguliers, qu'ils groſſiſſoient les objets ſans les défigurer, comme auroit pu faire un verre plan convexe; cette dernière grêle dura environ un quart-d'heure.

La chute de la première grêle avoit fait peu de mal aux plantes; mais la ſeconde les maltraita beaucoup; les feuilles un peu grandes étoient percées comme par des balles de mouſquet; les fruits meurtris & les plantes baſſes écraſées contre la terre; les ſeigles & les orges qui étoient preſque mûrs, furent répandus ſur la terre; les fromens qui étoient plus éloignés de leur maturité, furent verſés: quant à la vigne, elle en reçut peu de dommage, parce que le raiſin étoit encore trop peu avancé.

IV.

L'Académie a rendu compte en 1751 [a] & en 1768 [b] de la réſine élaſtique de Cayenne, formée par le ſuc laiteux épaiſſi d'un arbre, & que les naturels du pays nomment *Caoutchouc.* M. Poivre, Commiſſaire-ordonnateur à l'Iſle de France, a mandé à M. le Chevalier Turgot, qu'il avoit découvert une plante très-commune dans cette Iſle, qui donne, lorſqu'on la caſſe, un ſuc laiteux, pareil à celui de l'arbre de Cayenne, qui, comme lui, forme en s'épaiſſiſſant une réſine ſemblable au caoutchouc; quoiqu'un peu moins élaſtique que ce dernier, elle eſt, comme lui, ſuſceptible d'une très-grande extenſion. M. le Chevalier Turgot a fait voir à l'Académie un cordon de cette matière, qui, comme on voit, pourroit n'être pas ſi particulière à la Guyane, qu'il ne s'en trouvât en pluſieurs endroits de la terre.

[a] *Voy. Hiſt. 1751, p. 17.*
[b] *Voy. Hiſt. 1768, p. 58.*

V.

Le Père Cotte, Prêtre de l'Oratoire & Correſpondant de l'Académie, étant à Montmorency, où il avoit établi ſur une terraſſe un conducteur iſolé pour recevoir l'électricité des nuées orageuſes, fit pendant tout l'été 1769, & ſur-tout pendant un violent orage qui arriva le 7 Juillet, les obſervations ſuivantes:

pendant la durée de l'orage, le conducteur donnoit des étincelles très-vives & très-piquantes, même pendant qu'il pleuvoit; mais cette électricité, quoique très-forte, n'étoit pas continue, elle cessoit quelquefois tout-à-coup & reparoissoit un instant après; elle n'étoit jamais plus forte que dans le moment où brilloit un éclair, & au contraire elle diminuoit considérablement & disparoissoit même quelquefois entièrement pendant les roulemens du tonnerre. Il a encore observé plusieurs fois, & notamment en 1767*, ce que lui-même avoit communiqué l'année dernière à l'Académie, que l'éclair, ou pour parler plus juste, le trait de feu qui le cause, partoit souvent en même temps de la terre & du nuage.

* Voy. hist. 1767, p. 31.

VI.

Trois faits singuliers du même genre, qui ont eu cette année pour époque, ont paru mériter que l'Académie en fit part au Public. Au mois de Février 1769, M. l'abbé Bacheley, son Correspondant, lui fit voir une pierre qu'on disoit être tombée avec le tonnerre, près du château de Lucé dans le Maine; & les circonstances du sifflement qu'on avoit entendu, de la chaleur de la pierre & de l'état où elle avoit été trouvée, sembloient donner quelque vraisemblance à cette opinion. Vers la fin de la même année, M. Gurson de Boyaval, Lieutenant général honoraire au Bailliage d'Aire en Artois, lui en fit remettre une semblable, & qu'on disoit aussi avoir été produite & jetée par le tonnerre; enfin M. Morand fils en remit encore une troisième qu'on disoit être tombée dans le Cotentin, dans les mêmes circonstances. Ces trois pierres comparées ensemble, n'ont offert à l'œil aucune différence, elles sont de même couleur & à peu près du même grain; on y reconnoît de petites parties métalliques & pyriteuses; elles sont recouvertes d'une croûte noire & ferrugineuse; un morceau d'une de ces pierres a été pulvérisé, & on l'a fait brûler; cette poudre prête à rougir, a donné une forte odeur de soufre; puis de grise qu'elle étoit, elle est devenue de la couleur du safran de Mars: on l'a pesée au sortir du feu, & malgré le soufre qui s'en étoit évaporé, elle n'avoit rien perdu de son poids, la poudre

calcinée & mêlée avec le verre, le borax & le charbon a donné un verre noir ſemblable au laitier, qui étoit recouvert d'une poudre noire attirable par l'aiman, & le verre noir pulvériſé l'étoit auſſi; la pierre ſoumiſe à l'action de l'acide marin a donné une forte odeur de foie de ſoufre, & il s'eſt excité une légère efferveſcence; elle n'en a preſque point fait avec l'acide vitriolique, & il en eſt résulté un ſel martial: enfin avec l'acide nitreux, elle a donné une forte odeur de ſoufre. L'Académie eſt certainement bien éloignée de conclure, de la reſſemblance de ces trois pierres, qu'elles aient été apportées par le tonnerre; cependant la reſſemblance des faits arrivés en trois endroits ſi éloignés, la parfaite conformité entre ces pierres & les caractères qui les diſtinguent des autres pierres, lui ont paru des motifs ſuffiſans pour publier cette obſervation & pour inviter les Phyſiciens à en faire de nouvelles ſur ce ſujet; peut-être pourroient-elles jeter de nouvelles lumières ſur la matière électrique & ſur ſon action dans le tonnerre.

VII.

M. Dutour, Correſpondant de l'Académie, lui a envoyé une collection de pierres trouvées aux environs de Riom en Auvergne, dans la carrière de tripoli de Menat, ces pierres ſont de véritables lames de tripoli, ſur leſquelles on trouve des empreintes aſſez bien marquées de feuilles qui paroiſſent appartenir à la claſſe des arbres, ſans qu'on puiſſe cependant bien nettement décider à quelle eſpèce indigène ou exotique elles ont appartenu; ces empreintes ont paru différentes de celles qui ſe trouvent ordinairement dans les premiers bancs de charbon de terre: quoique ce fait ne ſoit pas abſolument nouveau, que M.rs Ludwig & Gardeil aient penſé que le tripoli étoit en grande partie composé de matières végétales, que M.rs Guettard & Fougeroux aient fait mention de matières végétales trouvées dans le tripoli; cependant comme les échantillons de pierre envoyés par M. Dutour ont quelque rapport avec les ſchites, ce qui tendroit à prouver que cette ſubſtance eſt plus commune qu'on ne penſe, & que d'ailleurs cette obſervation peut ſervir à appuyer ce que nous avons déjà dit

dans cette histoire *, d'après M. Fougeroux, sur la formation du Tripoli, l'Académie a cru la devoir insérer dans son Histoire.

* Voy. ci-dessus, page 1 & suiv.

VIII.

Des ouvriers qui travailloient dans une carrière à plâtre, située à Montmorency, trouvèrent dans un morceau de masse qu'ils détachoient, des os & des dents d'animaux; cet endroit n'étoit éloigné que d'environ 30 toises de celui où l'on avoit trouvé, il y avoit environ deux ans, de pareils ossemens, que le P. Cotte avoit envoyés à l'Académie, qui en a fait mention dans son Histoire de 1767 *: les nouveaux lui furent aussi portés, & il les fit de même passer à l'Académie; l'examen qu'on en fit, prouva qu'ils étoient réellement pétrifiés; ils rougissoient au feu sans donner aucune fumée & sans se consumer, & ils étoient dissolubles par les acides: mais il ne fut pas plus possible cette fois que la première, de déterminer à quel animal ces dents avoient appartenu; tout ce qu'on put remarquer, fut qu'elles différoient de celles de tous les animaux que nous connoissons dans ce pays.

* Voy. Hist. 1767, p. 28.

IX.

Le 24 Octobre 1769, il y eut une très-belle Aurore boréale, qui fut observée en plusieurs endroits du Royaume; à Reims, où étoit pour lors M. Lavoisier, elle commença presqu'à la chute du jour, M. Lavoisier n'en fut averti que vers les huit heures & demie, il se transporta aussi-tôt sur les remparts de la ville pour y avoir le Ciel plus découvert; l'horizon lui parut nébuleux jusqu'à quelques degrés de hauteur, & on y voyoit un nuage échancré, d'où partoient des rayons lumineux assez blancs; le nuage étoit terminé à l'est par un vertical qui auroit passé par le milieu de la constellation de Cassiopée; & à l'ouest, par celui qui auroit passé par la dernière étoile de la queue de la grande Ourse; les rayons qui en partoient s'élevoient d'environ 60 degrés, & paroissoient tendre à se réunir non au zénith, mais à un point plus méridional; celui qui partoit du point précis du nord, paroissoit passer par le zénith: à droite & à gauche du nuage, étoient deux taches lumineuses d'un rouge de sang, qui occupoient la partie de l'est & de l'ouest; bientôt la tache occidentale se convertit en rayons de la

même couleur, qui prirent une direction semblable aux rayons blancs qui partoient du nuage ; bientôt après, la tache rouge orientale s'étendit, sans perdre sa couleur rouge, jusqu'aux étoiles de la grande Ourse & d'une égale quantité : de l'autre côté, la couleur rouge commença alors à diminuer peu à peu ; & vers $9^h \frac{1}{2}$, tout étoit presqu'entièrement fini.

Cette même Aurore boréale fut observée à Ausch, par M. Despiau, Professeur de Philosophie, qui en avoit observé le 15 une autre qui ne put être aperçue à Paris, le Ciel y ayant été couvert.

X.

Le 1.er Décembre 1769, un peu après $6^h \frac{1}{2}$ du soir, il y eut un tremblement de terre qui se fit sentir à peu de distance de Paris, & même dans quelques quartiers de cette capitale ; un des amis de M. Fougeroux, qui étoit alors dans son appartement au château de Saint-Cloud, se sentit comme soulevé avec un mouvement de tourbillon fort singulier, la charpente craqua ; & dans l'appartement au-dessus, tous les instrumens de cuisine furent mis en mouvement ; chez un autre particulier logé dans la même aile du château, le craquement fut si fort, que toute la compagnie s'enfuit en criant que le plancher tomboit : ce même tremblement de terre fut ressenti & observé à Dieppe par M. Ancel ; à Rouen, par M. Bouin ; & à Montmorency, par le Père Cotte, qui tous ont eu l'attention d'en informer l'Académie.

XI.

Dans l'intérieur de la coquille de quelques grandes moules d'eau douce, qu'on nomme communément *moules d'étang*, il s'est trouvé plusieurs petites perles de différentes grosseurs, il y en avoit même une assez grosse, mais celle-ci avoit pour noyau une petite pierre recouverte par une couche de nacre. On sait que les perles ne sont qu'une espèce d'extravasation du suc destiné à former la nacre, & qui est vraisemblablement causée par une maladie de l'animal ; quelques Asiatiques, voisins des pêcheries de perles, ont l'adresse d'insérer dans les coquilles des huîtres à perles, de petits ouvrages qui se revêtissent, avec le temps, de la matière

qui forme les perles : les moules en queſtion, qui ont une eſpèce de nacre, peuvent être ſujettes à quelque maladie ſemblable ; & puiſqu'une petite pierre s'étoit incruſtée dans une moule, pourquoi ne tenteroit-on pas de ſe procurer de petits ouvrages incruſtés de même ? Ces moules avoient été pêchées dans les foſſés du château de Maulette près de Houdan, & elles ont été envoyées à l'Académie par M.me Pétau, fille de ſon Hiſtorien.

X I I.

En travaillant aux fouilles néceſſaires pour aſſeoir la culée du nord-oueſt du pont de pierre qu'on conſtruit à Neuilly, on trouva, après pluſieurs lits de terre, de gravier, de coquilles & de glaiſe, à 8 pieds plus bas que la ſuperficie des plus baſſes eaux, un lit que M. Morand fils, qui étoit préſent, reconnut pour du charbon de bois foſſile ; & au-deſſous de ce banc, qui pouvoit avoir environ un ou deux pieds d'épaiſſeur, il y en avoit un autre de 7 à 8 pieds d'épais ; & entre deux, couloient des ſources aſſez abondantes. M. Morand eut la curioſité d'examiner ſi dans l'iſle où ſe trouvoit l'emplacement de la culée du nord-eſt, il retrouveroit le même banc de charbon foſſile, il ne l'y retrouva pas ; mais ſa recherche ne fut pas pour cela tout-à-fait inutile, & il trouva une ſubſtance bien plus ſingulière que celle qu'il cherchoit : la ſuperficie du terrein de l'iſle en queſtion eſt élevée de 25 pieds au-deſſus du niveau du lit de charbon foſſile dont nous avons parlé ; cette maſſe de terrein eſt compoſée d'un lit de terre limonneuſe, mais un peu moins graſſe que celle de la rive oppoſée, d'un lit de gros gravier poſé ſur un autre lit de ſable ; celui-ci poſe ſur un lit de coquilles de moules de rivière, la plupart incruſtées de vaſe durcie ; enfin au-deſſous de celui-ci, eſt un lit épais de glaiſe dont le deſſus eſt mal formé, mais celle de deſſous a tous les caractères de la véritable glaiſe ; on y trouve des coquilles de moules d'étang, ſans preſque aucune altération ; on y trouve encore des gâteaux aſſez épais de feuillages, quelques branchages & des racines qui paroiſſent avoir appartenu à la ſalicaire ou à d'autres plantes approchantes ; ces branches & ces racines n'ont d'entier que l'écorce, le dedans en eſt abſolument détruit & rempli de

grumeaux

grumeaux remarquables par une belle couleur bleue : tandis qu'il confidéroit cette fingulière matière, M. Perronet lui en montra d'abfolument femblable tirée des fouilles faites pour la fondation des piles du pont de Creil, & qui s'y trouve en affez grande abondance ; quelques-uns de ces grumeaux ne font bleus qu'à leur furface qui renferme une terre jaunâtre affez dure ; leur couleur eft foncée lorfqu'on les tire de la fouille, mais ils prennent en féchant une belle couleur de bleu-célefte : en un mot, ils font de vrai bleu de Pruffe dont la Nature a fait tous les frais. Pour mieux s'affurer de la nature de cette fubftance bleue, M. Morand en a employé d'abord avec l'eau gommée, & elle a donné une couleur bleue-pâle & un peu tirant fur le vert : traitée avec l'huile, elle a donné un bleu plus foncé & qui s'eft très-bien foutenu ; les acides minéraux, & même l'acide végétal, détruifent plus ou moins efficacement cette belle couleur, elle n'eft pas même à l'abri de l'action de l'alkali fixe ; mais fi les uns ou les autres de ces agens l'ont détruite, on peut faire reparoître la partie colorante dont ils font chargés, en verfant dans l'acide une folution d'alkali fixe, ou dans l'alkali fixe un acide délayé.

Ces grumeaux, dans leur état naturel, ne font point attirables par l'aiman ; mais fi on les expofe au feu, ils perdent leur couleur, prennent celle d'une ocre rouge ; & fi on mêle cette ocre avec du charbon en poudre & du fuif, le feu la convertit en une poudre noire dont une grande partie eft attirable par l'aiman.

Il ne manque donc rien à cette fubftance pour être un véritable bleu de Pruffe natif. Il feroit certainement curieux, mais il eft en même temps bien difficile, d'imaginer les moyens que la Nature a employés pour fuppléer aux opérations par lefquelles les Chimiftes obtiennent, à l'aide du feu, cette fubftance dans leurs laboratoires.

NOUS renvoyons entièrement aux Mémoires :

Les Obfervations Botanico-Météorologiques, faites en 1768, au château de Denainvilliers, près Pithiviers en Gâtinois, par M. du Hamel. V. les Mém. p. 558.

CETTE année M. de la Faille, Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres, & de la Société d'Agriculture de la Rochelle, Membre des Académies Impériale & Royale d'Augſbourg & de Lunebourg, de la Société Économique de Berne, & Correſpondant de l'Académie, lui envoya un ouvrage intitulé : *Eſſai ſur l'Hiſtoire Naturelle de la Taupe & ſur les différens moyens qu'on peut employer pour la détruire.*

La taupe eſt peut-être, malgré ſa petiteſſe, un des animaux des plus nuiſibles; ſon dégât eſt extrême dans les prairies, & ſur-tout dans celles qui ſont les plus fraîches & les meilleures. Pour attraper les vers de terre, qui font ſa nourriture, elle creuſe des rameaux de mine multipliés & détruit toutes les racines qui s'oppoſent à ſon paſſage; on prétend même qu'il y en a quelques-unes qu'elle recherche pour elles-mêmes & dont elle ſe nourrit. Ces raiſons ont déterminé M. de la Faille à en faire l'objet de ſes obſervations & de ſes recherches.

Il y a pluſieurs eſpèces de cet animal, les unes plus groſſes, les autres plus petites que la taupe vulgaire, mais qui, pour la plupart, n'en diffèrent que par la variété des couleurs de leur poil; il y en a cependant une plus ſingulière en Canada, qui eſt caractériſée par des différences bien plus marquées. M. de la Faille ne laiſſe ignorer à ſon lecteur, aucunes de ces variétés ſingulières dont il donne toute l'hiſtoire avant que d'en venir à la taupe vulgaire, principal objet de ſon travail : On a ſu preſque de tout temps, & la taupe ne l'a que trop fait voir, que cet animal creuſe continuellement ſous terre & aſſez près de la ſuperficie du terrein, une infinité de boyaux ou galeries de mines dont il rejette la terre d'eſpace en eſpace & en forme des mottes plus ou moins groſſes, qu'on nomme des *taupinières*, ces galeries lui ſervent à chercher les vers & autres inſectes ſouterreins dont il ſe nourrit, & à le mettre à l'abri du vent qu'il craint & de la lumière qui l'incommode; car, malgré tout ce qu'on a pu dire de ſon aveuglement, il eſt certain que la taupe a des yeux, mais très-petits, & il eſt à préſumer qu'étant deſtinée à vivre ſous terre, ſes yeux ont été

diſpoſés pour être ſenſibles à la foible lumière qu'elle peut y trouver & ſont déſagréablement affectés du grand jour.

Ces rameaux que creuſe la taupe, ſuffiſent pour lui procurer la nourriture qu'elle cherche, mais ils ne ſuffiroient pas pour la loger dans les temps où elle vaque à la propagation de ſon eſpèce & à l'éducation de ſes petits ; comme elle a beſoin pour cela d'être à l'abri des eaux, elle choiſit quelque berge un peu élevée ; ou, à ce défaut, elle fait élever le terrein du pré le plus humide & y bâtir une maiſon ſolide, couverte de la même matière, reſſemblante à une très-groſſe taupinière, dans laquelle elle a ſuffiſamment d'eſpace pour ſe loger avec toute ſa famille ; & pour y être en ſûreté, elle ménage toujours pluſieurs galeries qui y aboutiſſent. La deſcription de ces ſinguliers logemens n'eſt pas un endroit des moins intéreſſans du livre de M. de la Faille.

Quoique toutes les fouilles de la taupe n'aient pour but que la recherche des vers, elles ne nous ſont pas moins nuiſibles ; ces routes multipliées coupent & détruiſent toutes les racines des plantes & les font périr : on doit donc regarder cet animal comme un ennemi, & faire tous ſes efforts pour s'en délivrer.

On auroit peut-être de la peine à imaginer combien de ſecrets & de recettes ont été propoſées pour détruire les taupes ou pour les éloigner, M. de la Faille en a eſſayé la plus grande partie, mais preſque toujours inutilement, & il leur préfère les piéges qui ſervent à les tuer ou à les prendre en vie ; il en donne la deſcription, mais il s'attache ſur-tout à celui qu'on nomme *taupière*, & qui réuſſit preſque toujours quand il eſt bien fait & qu'on ſait l'employer.

Cet inſtrument conſiſte en un tuyau de bois, long d'environ neuf à dix pouces, cylindrique & d'environ 18 lignes de diamètre intérieur ; ce tuyau porte à l'un de ſes bouts une eſpèce de ſoupape qui cède aiſément au moindre effort de l'animal, & retombant enſuite par ſon propre poids dès qu'il eſt paſſé, lui interdit le retour ; l'autre bout eſt fermé, ou par un bouchon, ou par un grillage : ce piége ſe met dans l'un des boyaux nouvellement creuſé par la taupe ; l'animal inquiété par l'air frais qui entre par l'extrémité grillée de ce piége, vient pour réparer le dommage

fait à sa demeure, & se précipite lui-même dans la prison qui l'attend.

Ce piége manque rarement son effet lorsqu'il est bien fait & bien placé; mais faute de ces deux conditions, il demeure inutile: voici les réflexions que M. de la Faille a tirées de sa propre expérience & des conférences qu'il a eues avec les meilleurs Taupiers.

Puisque la taupe n'est déterminée à entrer dans la taupière que par l'envie de fermer le chemin à l'air froid qui entre par-là dans son souterrein, on doit en mesurer si bien la grosseur, qu'il fasse pour ainsi dire une continuité de tuyau avec le boyau creusé par l'animal, sans quoi il s'apercevroit bientôt que cette portion de la galerie n'est pas de son ouvrage, & il reculeroit au lieu d'avancer; c'est pourquoi M. de la Faille fixe le diamètre intérieur de la taupière à 18 lignes, parce que ses expériences lui ont appris que c'étoit presqu'invariablement le diamètre des boyaux creusés par les taupes.

Par la même raison, on doit éviter de les percer avec une tarrière qui soit ébréchée, ces brèches feroient nécessairement des circonférences en relief dans le creux du tuyau, qui avertiroient infailliblement la taupe du piége & l'empêcheroient de s'y enfoncer. Il en est de même de la porte qu'elle doit soulever, elle peut être mise en garde par cet obstacle qu'elle n'a pas mis en son chemin, & qui même, lorsqu'elle l'a soulevée, la gêne par une saillie incommode.

Il ne faut pas moins observer de précaution pour placer le piége; il doit paroître à la taupe une continuation de sa galerie, une direction trop différente lui feroit bientôt reconnoître la supercherie, & elle ne manqueroit pas de s'en éloigner.

Pour remédier à ces inconvéniens, M. de la Faille prescrit, comme nous l'avons dit, les dimensions de la machine, il adopte la méthode usitée dans quelques Provinces, de noyer la porte ou soupape dans le dessus du cylindre & de l'y tenir relevée & cachée, au moyen d'une espèce de verrou long qui la retient dans cette situation & qui porte à son autre extrémité une plaque qui bouche une partie du tuyau; l'animal ne trouvant alors aucun obstacle, entre dans la taupière sans défiance; & il n'a pas plutôt

légèrement touché la plaque en queſtion, que le verrou abandonne la porte qui, retombant par ſon propre poids derrière la taupe, l'enferme abſolument dans la taupière.

Comme on pourroit trouver quelque difficulté à creuſer la place de la porte & du verrou, & à placer toutes ces pièces dans l'intérieur du tuyau, M. de la Faille propoſe de le faire de deux pièces, ce qui donne le moyen de faire cette opération avec la plus grande facilité; & les deux demi-cylindres réunis & retenus par quelques cercles ou quelques liens, remettent la taupière en état de ſervir.

Mais une attention eſſentielle eſt de paſſer à la flamme l'intérieur de la taupière avant que de la remettre en place, ſi une taupe a péri dedans, ce qui arrive quand on n'eſt pas exact à les aller viſiter; l'animal inſtruit, par l'odeur qu'y a laiſſé le cadavre de ſon ſemblable, du danger qui le menace, s'en éloigneroit infailliblement & rendroit par-là le piége inutile.

Nous ne pouvons entrer ici dans tout le détail des précautions que preſcrit M. de la Faille pour réuſſir dans cette utile chaſſe; mais en les obſervant avec attention, on ne pourra s'empêcher d'être étonné du nombre de ces animaux qu'on peut détruire par ce moyen: un ſeul Taupier des environs de la Rochelle en avoit pris au printemps de 1765, quatre cents treize dans l'eſpace d'environ neuf arpens.

L'ouvrage de M. de la Faille eſt donc également intéreſſant, & pour la curioſité des Phyſiciens, auxquels il offre l'hiſtoire naturelle intéreſſante & les variétés d'un animal juſqu'ici médiocrement connu, & pour l'utilité des cultivateurs auxquels il donne les moyens, ſinon d'arrêter les ravages d'un ennemi très-dangereux, au moins de les diminuer beaucoup.

CETTE année M. de Fallois, Major du corps des Ingénieurs, Inſtituteur dans les Mathématiques & l'Art militaire de S. A. S. Électorale de Saxe, Membre de l'Académie des Arcades & de la Société Électorale d'agriculture de Leipſic, préſenta à l'Académie un ouvrage intitulé *l'École de la fortification, &c.*

A ne considérer que superficiellement la manière de fortifier des Anciens, leur manière d'attaquer & de défendre les places, il semble qu'il n'y ait sur ce point rien de commun entre eux & nous; cependant, malgré l'énorme changement qu'a dû produire dans cet art l'invention de la poudre & le changement des armes, on est étonné de retrouver dans ces méthodes si différentes, les mêmes principes & presque les mêmes maximes. C'est par ce parallèle que M. de Fallois commence son ouvrage.

Les premières fortifications ont été des murailles dont on entouroit les habitations, & du haut desquelles on lançoit des traits sur l'ennemi qui osoit s'en approcher. Bientôt on s'aperçut que la nuit pouvoit favoriser les approches, & que l'ennemi, une fois au pied du mur, étoit à l'abri de la plus grande partie des traits de l'assiégé & pouvoit sapper le mur, & le faire écrouler, sans courir presque aucun risque.

Pour remédier à cet inconvénient, on fit au haut du mur une saillie qui avoit des ouvertures en dessous, par lesquelles on jetoit des pierres, des traits, &c. dont on l'accabloit.

Cette défense fit imaginer une nouvelle manière d'attaquer. L'assiégeant se couvrit de larges boucliers, mis l'un sur l'autre comme les tuiles d'un toit, il construisit des galeries qui le mirent à l'abri, & on reconnut bientôt que ce n'étoit pas assez que de voir le pied du mur de haut en bas, mais qu'il falloit encore le voir de côté & s'il se pouvoit de revers, & c'est à quoi l'on parvint par les tours saillantes rondes & quarrées qu'on joignit au mur.

Ces tours, & sur-tout les quarrées, avoient toujours un côté parallèle à la place que l'ennemi pouvoit attaquer sans être vu d'aucun endroit; pour obvier à cet inconvénient, on tourna les tours de manière qu'elles se présentassent par un de leurs angles, & pour lors il n'y eut aucun point sur toute la surface extérieure de la tour où l'ennemi pût paroître sans être exposé aux traits de la place, & voilà l'angle flanqué & les faces des bastions d'aujourd'hui.

Ces tours incommodoient l'assiégeant, celui-ci trouva moyen de les faire abandonner en construisant de grandes tours de bois

mobiles ſur des roues plus hautes que les tours des villes; du haut deſquelles on perçoit, à coups de dards & de flèches, ceux qui défendoient la place, & par le moyen deſquelles, & des eſpèces de ponts qui s'en détachoient lorſqu'on les avoit aſſez approchées de la place, l'aſſiégeant pouvoit paſſer ſur le rempart.

Pour rendre ces tours inutiles, on entoura les places d'un large foſſé qu'on tâcha de remplir d'eau; pour lors les tours mobiles ne purent plus approcher des places, & il fallut combler ou ſaigner le foſſé, pour pouvoir être à portée de battre la muraille.

Ce fut ce qui donna lieu aux tranchées, on les fit d'abord en ligne droite, & pour ſe couvrir des traits de la place, on les couvroit avec des pièces de bois; mais les pierres lancées par les machines rendant ce blindage inutile, on imagina les tranchées en zig-zag, telles que nous les avons aujourd'hui, & on ſe contenta de couvrir la tête des ſappes de pièces de bois aſſez fortes pour réſiſter aux pierres: qui ne reconnoît, dans cette attaque les mêmes principes que ceux qui ſont encore en uſage aujourd'hui.

Quelquefois on entouroit une place d'une ſeconde & d'une troiſième enceinte, c'étoit autant de ſiéges qu'il falloit faire l'un après l'autre; il eſt aiſé de voir que ces doubles & triples enceintes tenoient lieu des dehors ajoutés à nos places, ſeulement elles étoient beaucoup moins utiles, parce que l'ennemi une fois entré dans une de ces enceintes, étoit maître de tout le tour & d'attaquer celle qui ſuivoit par où il vouloit; au lieu que nos dehors étant ſéparés, l'ennemi qui s'eſt emparé d'une pièce, n'eſt maître que de celle-là ſeule, & ne peut attaquer celle qui ſuit que par l'endroit que celle qu'il a pris, couvroit.

L'invention de la poudre fit une révolution étonnante dans l'attaque & dans la défenſe des places, mais elle laiſſa ſubſiſter preſque tous les principes de cet art. Le canon ſubſtitué au bélier & aux catapultes, fit diſparoître les hautes tours qui donnoient trop de priſe à ſon action; mais on en retint la baſe qui fut convertie en baſtions, on éloigna les pièces les unes des autres, parce que la portée de ces nouvelles armes étoit plus grande; on terraſſa les murailles pour les mettre à portée de réſiſter au canon; on imagina les dehors pour tenir lieu des doubles enceintes; en

un mot, tout l'art changea, mais les maximes fondamentales ne changèrent pas.

Ce font ces maximes que M. de Fallois a foigneufement raffemblées, qui forment la première partie de fes recherches fur la Fortification proprement dite, ce qui a précédé n'étant, pour ainfi dire, que l'hiftoire de la marche de l'efprit humain fur cette matière, néceffaire pour les découvrir.

M. de Fallois commence fon ouvrage par les définitions des parties qui compofent la Fortification actuelle; après ce préliminaire, il applique les maximes qu'il a énoncées à chaque partie, tant pour la bien conftruire en particulier que pour la difpofer relativement aux autres, de manière qu'elle puiffe les défendre, & en être défendue, il ajoute la manière de les tracer fur le papier & fur le terrein & de les conftruire, eu égard à la pouffée des différentes efpèces de terres, à la force des revêtemens & aux différentes circonftances locales qui peuvent les faire varier.

De-là il paffe à l'examen, toujours fondé fur les mêmes principes, des trois fyftèmes de Fortification de M. de Vauban, & fait voir les améliorations defquelles le troifième peut être fufceptible; il examine de même un des fyftèmes de M. de Cohorn relativement à l'attaque & à la défenfe des places, ufitées aujourd'hui, & un fyftème de Fortification, propofé par un auteur anonyme; & enfin il donne la manière de fortifier tous les polygones tant reguliers qu'irréguliers. Nous paffons légèrement fur tous ces articles dont la plupart font tirés des meilleurs auteurs & raffemblés avec le choix le plus éclairé; mais ce que nous ne pouvons nous difpenfer de préfenter avec un peu plus de détail, c'eft l'idée que propofe M. de Fallois, relativement aux dehors, ou ouvrages extérieurs, & qui femble mériter une attention toute particulière.

C'eft un ufage conftant, & qui eft même regardé comme une règle parmi les Ingénieurs, que le corps de la place doit dominer tous les dehors, & que ceux-ci doivent être commandés les uns par les autres, de manière que les plus éloignés du corps de la place foient toujours les plus bas; on prétend qu'il réfulte de cette difpofition, un avantage confidérable, qui eft d'écarter plus efficacement l'affiégeant par un feu en amphithéâtre; mais, felon M.

M. de Fallois, cet avantage n'eſt qu'apparent; ſi les ouvrages dominent beaucoup les uns ſur les autres, ils ſont en priſe à l'ennemi qui en a bientôt éteint le feu avec ſes batteries ; & s'ils dominent peu, la place ne peut ſe ſervir de ſon canon ſans riſquer de tuer ſon propre monde.

Pour obvier à cet inconvénient, M. de Fallois propoſe de ſubſtituer au glacis & au chemin couvert, des ouvrages auſſi élevés que le corps de la place ; par-là il met l'aſſiégeant dans l'impoſſibilité de ruiner les défenſes par le ricochet & dans l'incertitude de ce qu'il trouvera derrière la partie qu'il attaque. Ces ouvrages ſont en terre, revêtus de gazons, leurs foſſés ont ſept à huit toiſes, & au milieu du fond de ces foſſés, eſt placée une paliſſade : ces ouvrages ſont détachés les uns des autres, & s'entrelaſſent de façon qu'ils peuvent ſe défendre de front & de revers; on y peut établir des batteries contre la tête de la tranchée, c'eſt-là même qu'il place ſa plus groſſe artillerie pour éloigner davantage les approches, réſervant la moindre pour le corps de la place qui, dans cette conſtruction, n'a jamais à tirer que de près : ces batteries ſont à l'abri du ricochet, par le peu d'étendue des faces de ces ouvrages, qui ſont petites & ſans traverſes ; & pour faciliter les ſorties, il y a entre ces ouvrages des ouvertures fermées de barrières à couvert du canon de l'ennemi, & défendu par les ouvrages voiſins : aux angles ſaillans & rentrans, ſont de grandes places d'armes, dont la retraite eſt couverte par des lunettes conſtruites aux angles rentrans de la contreſcarpe, qui protègent de leurs feux les ouvrages qu'elles ont devant elles. M. de Fallois nomme l'enſemble de tous ces ouvrages, *la Crémaillère.*

Comme il n'a pu ſe diſſimuler combien il ſeroit expoſé à perdre l'artillerie qu'il place dans la crémaillère, il ménage des ponts, ou plutôt des bâtardeaux, au travers des foſſés des lunettes dont nous venons de parler placées à l'épaule de la contregarde des baſtions, & coulant ſur la contreſcarpe du foſſé du corps de la place qui tient lieu de chemin couvert ; il paſſe le long de cette contreſcarpe, de-là par un pont, il paſſe le foſſé qui doit être plein d'eau, & enfin par une poterne dans le corps de la place : cette eau des foſſés peut tomber auſſi dans les foſſés des ouvrages

avancés, quand le besoin le demande, par des écluses pratiquées dans les bâtardeaux dont nous venons de parler.

De tout ce que nous venons de dire, il est facile de conclure que la plus grande partie de l'ouvrage de M. de Fallois contient beaucoup de choses déjà connues, mais rangées de manière à être facilement enseignées aux jeunes Militaires; ce qui paroît avoir été le but de l'Auteur, qui parle par-tout en homme qui a joint à la spéculation l'expérience de plusieurs siéges, dont il tâche de faire profiter son lecteur. Ce qui est plus particulièrement à lui, est la suppression du chemin couvert & la construction des ouvrages en crémaillère qu'il y substitue. Les avantages de cette nouvelle fortification se présentent d'eux-mêmes; on a craint seulement que les communications qu'elle laisse ne puissent donner, à un ennemi vigilant & actif, le moyen de forcer les barrières & de s'emparer de ces ouvrages avancés; mais nul système de fortification ne peut mettre une place à l'abri des entreprises d'un tel ennemi, sans la vigilance du chef, & sans la bravoure de la garnison; & c'est ce qui rend comme impossible la comparaison des systèmes de fortification.

On a vu, du temps de la Ligue, la place de Quillebœuf, dont les fortifications n'étoient qu'à peine tracées, défendue pendant seize ou dix-sept jours par le grand Écuyer de Bellegarde, contre l'armée de l'Amiral de Villars; & nous avons vu, de nos jours, Berg-op-zoom, place qu'on pouvoit regarder comme imprenable, si cependant il y en avoit de cette espèce, emportée presqu'en aussi peu de temps par M. le Maréchal de Lowendal. Il n'est donc pas possible de prononcer, d'après l'expérience même, sur cette matière; mais à en juger selon les règles de la théorie, la construction des crémaillères paroît offrir des avantages considérables. On ne peut d'ailleurs savoir trop de gré à M. de Fallois du travail avec lequel il a réduit, dans un Ouvrage de médiocre volume, tous les principes essentiels de la fortification, nécessaires à ceux qui se destinent au génie, & de la clarté avec laquelle il a trouvé moyen de les présenter.

ANATOMIE.

SUR LA STRUCTURE ET SUR LES USAGES DE L'OURAQUE DANS L'HOMME.

IL n'est peut-être aucune partie du corps animal sur la structure & sur les usages, de laquelle les Anatomistes aient autant varié que sur celle qui fait l'objet de cet article : on sait que l'Ouraque est une partie ayant à peu près, sur-tout dans le fœtus, la figure d'une chausse d'hypocras extrêmement alongée, dont la base tient au fond de la vessie, & la pointe à l'ombilic. V. les Mém. p. 287.

Mais comment est composée cette partie, & quel peut être l'usage auquel elle est destinée? C'est sur ces deux points que les Anatomistes se partagent; les uns ont regardé l'ouraque comme un vrai ligament, & les autres en ont fait un canal de communication entre la vessie & la membrane allantoïde : feu M. Hales ne pouvant découvrir de canal dans l'intérieur de l'ouraque, avoit imaginé qu'elle étoit composée d'un tissu spongieux, qui absorboit, pour ainsi dire, l'urine de la vessie, & l'alloit porter dans l'allantoïde ; mais, indépendamment de ce que l'Anatomie ne fait rien remarquer de semblable dans cette partie, cette explication ne peut avoir aucun lieu dans le fœtus humain qui, comme on sait, n'a point d'allantoïde.

Cette diversité d'opinions a pour origine le peu de soin que les Observateurs ont eu de consulter la Nature ; elle seule peut donner la solution de cette question, & c'est aussi la voie que M. Portal a cru devoir prendre, & qui lui a effectivement procuré des connoissances plus claires & plus certaines.

L'ouraque est, conformément à ce qu'en dit M. Senac, dans ses Essais de Physique, composée de quatre filets exactement réunis, depuis l'ombilic jusqu'à très-peu de distance de la vessie; là ils se séparent l'un de l'autre, & forment, par cet écartement,

une eſpèce de patte-d'oie, dont les filets ſe diſtribuent ſur la veſſie: deux de ces filets embraſſent les côtés de ce viſcère; un occupe la partie antérieure, & un autre la partie poſtérieure; ils s'uniſſent avec les fibres de la tunique muſculeuſe de la veſſie, mais ſans contracter avec elles une adhérence qui empêche abſolument de les ſéparer, de les ſuivre & de réduire, pour ainſi dire, l'ouraque en ſes propres élémens, pourvu cependant que le ſujet ſoit très-jeune; car dans un fœtus qui a ſeulement trois mois, ils deviennent très-difficiles à ſéparer; & dans l'adulte cette ſéparation ſeroit impoſſible. Ces filets, dont nous venons de parler, ſont revêtus, d'un bout à l'autre, par une prolongation du tiſſu cellulaire qui les enveloppe ſans les ſerrer, & leur forme une enveloppe que M. Portal nomme *tunique vaginale.*

Quelques recherches qu'ait pu faire M. Portal, il n'a jamais pu apercevoir de cavité dans ces filets, ni que leur réunion en formât une: à meſure que le ſujet avance en âge, les filets ſe réuniſſent plus exactement, & le volume de l'ouraque diminue, & quelquefois cette diminution va juſqu'à l'entier anéantiſſement de cette partie.

De tout ce que nous venons de dire, il ſuit que l'ouraque eſt véritablement un ligament, qu'il eſt deſtiné dans le fœtus à des uſages particuliers qui ceſſent après la naiſſance de l'enfant: eſſayons de les déterminer.

La poſition de la veſſie n'eſt nullement la même avant & après la naiſſance: avant que le fœtus ſoit né, elle eſt ſuſpendue beaucoup au-deſſus du baſſin, qui n'a pas alors pris tout ſon accroiſſement, & il ſemble que l'Auteur de la Nature ait eu en vue de diminuer le volume du fœtus, & de rendre l'accouchement plus facile; or, pour aſſujettir ainſi la veſſie hors & au-deſſus du baſſin, & cependant l'empêcher de ballotter, il falloit qu'elle fût ſuſpendue & fixée; & c'eſt vraiſemblablement l'uſage de l'ouraque qui remplit parfaitement ces vues; mais dès que l'enfant eſt né, l'agrandiſſement du baſſin, le poids de la veſſie qui s'emplit d'urine, & celui des inteſtins, ſollicitent puiſſamment la veſſie à deſcendre; ce qui ne ſe peut faire ſans diſtendre l'ouraque, & ſans en rapprocher les filamens qui s'uniſſent alors

au point de ne pouvoir plus ſe ſéparer; la tunique qui l'enveloppe s'y colle davantage & en fait une eſpèce de ligament qui même s'oblitère quelquefois entièrement chez les vieillards.

Mais comment, dans cette hypothèſe, expliquer les écoulemens d'urine qui ſe font quelquefois par le nombril, & deſquels on a pluſieurs exemples? La ſtructure de la veſſie donne, ſelon M. Portal, la ſolution de cette difficulté.

Ce viſcère eſt compoſé de deux parties, l'une membraneuſe & continue, deſtinée à recevoir & à conſerver l'urine, & l'autre qui recouvre celle-ci, compoſée de fibres muſculaires deſtinées à comprimer, par leur action, la membrane interne qu'elles enveloppent, & à la forcer de chaſſer l'urine.

Cette partie muſculaire n'eſt pas continue comme l'autre, les trouſſeaux de fibres forment plutôt une eſpèce de réſeau qu'un corps uniforme, au moins y a-t-il des endroits qui en ſont preſqu'entièrement dénués; il doit donc arriver, & il n'arrive en effet que trop ſouvent, que ſi par quelqu'accident la veſſie ſe trouve trop gonflée, la membrane interne ſe faſſe jour par quelqu'une des mailles de la tunique muſculaire, & forme une hernie de la membrane interne. On a vu quelquefois près de la moitié de la membrane interne paſſer au travers de la tunique muſculaire, & former l'apparence d'une veſſie double; or, ſi cette hernie ſe fait du côté de la baſe de la veſſie, où effectivement les trouſſeaux de fibres muſculeuſes ſont les plus écartées les unes des autres, il peut arriver qu'elle ſe prolonge dans la gaine qui enveloppe les fibres de l'ouraque; & alors ou la membrane interne s'étendra juſqu'à l'ombilic, & y formera un conduit urinaire; ou ſi elle crève avant que d'y être parvenue, la gaine de l'ouraque y ſuppléera, & dans l'un & l'autre cas le malade rendra ſes urines, en tout ou en partie, par le nombril; M. Portal a vu de ces hernies de l'une & de l'autre eſpèce.

Il n'eſt donc pas néceſſaire que l'ouraque ſoit eſſentiellement un canal, pour qu'il puiſſe arriver des écoulemens d'urine par le nombril, & ce fait ne détruit en aucune manière le ſentiment de ceux qui la regardent comme un vrai ligament. Combien de précautions à prendre dans l'étude de l'Anatomie, pour n'être

pas séduit par les apparences qui semblent les plus fortes & les plus décisives ?

SUR L'ACTION DU POUMON, SUR L'AORTE PENDANT LA RESPIRATION.

V. les Mém. p. 549.

ON n'auroit pas lieu d'être surpris de trouver de l'incertitude sur la position, la structure & l'usage de quelques organes petits & cachés du corps animal ; mais il est singulier qu'il puisse s'en trouver sur la structure de parties très-apparentes, & qui n'ont pu manquer de s'offrir aux regards des Anatomistes, dans toutes les dissections qu'ils ont faites.

De ce nombre sont certainement les bronches, ces rameaux de la trachée-artère, destinés à porter l'air de la respiration dans le poumon. M. Portal a été surpris des différences qui se trouvent dans les descriptions que les Anatomistes font de ces parties, leur structure & leur position dans le corps animal ; quelquefois même ils ne s'accordoient pas avec leurs propres figures, & il sembloit que le Peintre eût dessiné plus fidèlement que l'Anatomiste n'avoit décrit.

Pour savoir ce qu'il y avoit de bon sur ce point dans les différens ouvrages des Anatomistes, il résolut de ne s'en rapporter qu'à l'inspection des pièces mêmes, & de consulter, par de nombreuses dissections, le grand livre de la Nature, & non-seulement il y a trouvé le moyen de dissiper toutes ses incertitudes, mais encore il a recueilli quelques faits importans, qui avoient échappé jusque-là aux Observateurs, ou du moins n'en avoient été vus que très-imparfaitement : voici, en abrégé, le résultat de ses observations.

La trachée-artère, parvenue entre la seconde & la troisième vertèbre du dos, se divise en deux branches, que les Anatomistes nomment *bronches* *, & qui diffèrent entr'elles par leur grosseur, leur longueur & leur direction ; la bronche droite est d'un quart plus grosse que la gauche, & celle-ci d'un cinquième

* *βρόγχος guttur.*

plus longue que la droite, & en même temps plus inclinée & plus postérieure.

La direction de ces canaux n'est pas la même dans les différens âges; la bronche gauche est dans le fœtus qui n'a pas respiré plus inclinée & plus en arrière que dans l'enfant venu au jour, & la bronche droite dans l'enfant venu à terme est un peu plus élevée qu'elle ne l'étoit avant la naissance de l'enfant.

Cette description est exactement conforme à ce que l'observation a offert à M. Portal, elle a fixé ses idées, & l'a mis à portée de reconnoître ce qu'il y avoit d'exact dans les descriptions & dans les planches des différens Anatomistes: poursuivons ce que ces observations lui ont fait remarquer sur la structure de ces canaux aëriens.

Les premières divisions des bronches ont, comme la trachée-artère, des anneaux cartilagineux; mais ils sont entiers & non pas interrompus comme ceux de la trachée-artère. Ces anneaux sont retenus en leur place par un ligament très-élastique d'un blanc un peu rougeâtre, que quelques Anatomistes, au nombre desquels on compte M. Haller, ont regardé comme musculaire; ce ligament est composé de deux plans de fibres, & Bartholin croit que le plan intérieur est une prolongation de la membrane qui tapisse la bouche, & l'extérieur une production de la plèvre.

L'examen anatomique n'a rien offert à M. Portal qui pût appuyer ces sentimens, la simple macération suffit pour séparer ce ligament des cartilages, & il n'y a rien reconnu qui pût servir à justifier l'origine qu'on lui donne, ni à le faire reconnoître pour musculeux.

L'intérieur des bronches est tapissé d'une membrane qui forme plusieurs replis longitudinaux, parallèles entr'eux; mais outre ces replis, il s'en trouve encore un autre dans le point où la trachée-artère fournit la bronche gauche: celui-ci est formé en partie par la membrane & en partie par le premier cartilage de la bronche qui est poussé dans l'intérieur du canal; & cette espèce de saillie dépendant de l'inclinaison de la bronche, varie dans les différens âges de la vie; elle fait en cet endroit l'effet des éperons d'un pont.

Jusque-là les recherches de M. Portal n'ont servi qu'à lever les doutes que les descriptions des Anatomistes avoient jetés sur cette partie; voici présentement quelque chose de plus intéressant & qui lui appartient en propre.

La bronche droite flotte librement dans la poitrine, rien ne s'oppose aux différens mouvemens que peut lui imprimer l'air ou l'abaissement des côtes; elle s'élève lorsque le lobe du poumon qui lui répond s'enfle, & s'abaisse aussi facilement lorsqu'il s'affaisse.

Mais il n'en est pas de même de la bronche gauche, l'aorte l'embrasse exactement; d'où il suit qu'elle ne peut s'élever sans gêner le cours du sang dans cette artère principale; cette connexion de la bronche & de l'artère-aorte a été connue de quelques Physiologistes, mais personne ne s'étoit avisé de penser que cette jonction mettoit ces deux parties dans le cas d'agir nécessairement l'une sur l'autre.

En effet, il est évident que l'aorte ne peut dans cette construction, augmenter son volume sans comprimer la bronche gauche & sans gêner le passage de l'air qui va dans le lobe gauche du poumon: aussi M. Portal a-t-il trouvé dans le cadavre d'un homme dont la respiration étoit très-gênée, qu'il y avoit un anévrisme à la crosse de l'aorte, que la bronche gauche étoit comprimée par l'artère, & que sa capacité étoit extrêmement diminuée.

D'un autre côté, la bronche gauche dilatée ou relevée par l'air, peut, en pressant l'aorte, gèner prodigieusement le cours du sang, donner lieu à des palpitations violentes & occasionner un nombre infini de maladies qui étoient d'autant plus difficiles à guérir, qu'on n'en soupçonnoit pas même la cause.

Il est donc d'une extrême importance de bien établir ce nouveau principe & d'en examiner attentivement les suites: suivons M. Portal dans cette dicussion, l'aorte dans le fœtus qui n'a pas respiré est très-inclinée de devant en arrière & un peu sur le côté de la bronche gauche qui elle-même est plus en arrière à cet âge, qu'elle ne l'est dans l'enfant qui a respiré, parce que le thymus qui remplit une partie de la poitrine, la porte encore en arrière.

Mais lorsque l'air pénètre, après la naissance, dans l'intérieur du poumon

poumon gauche, la bronche s'élève & élève en même temps l'aorte qu'elle porte en avant, & ce changement de ſituation va toujours en augmentant à meſure que le thymus, en s'oblitérant, laiſſe la poitrine plus libre. Une multitude d'animaux diſſéqués tant avant que d'avoir reſpiré, qu'après avoir reçu l'air dans leurs poumons, ont conſtamment offert à M. Portal cette différence.

Il a fait plus, après avoir levé le ſternum à un chien vivant, il a ſoufflé avec un tuyau de verre par une ouverture faite à la trachée-artère, & il a vu que toutes les fois que le poumon gauche ſe dilatoit, la bronche & l'aorte s'élevoient, & qu'au contraire ces deux canaux s'abaiſſoient quand il exprimoit l'air des poumons; expérience qui démontre bien juſqu'à quel point les maladies du cœur & des vaiſſeaux ſanguins peuvent agir ſur les poumons, & combien les vices de la reſpiration peuvent au contraire ſe faire ſentir dans tout le ſyſtème vaſculeux dont ils attaquent le principe. Mais voici quelque choſe de plus ſingulier.

Dans le thorax d'un petit chat, mort depuis peu, M. Portal aperçut que le poumon droit étoit d'un rouge pâle, & le poumon gauche d'un rouge obſcur, il préſuma que le poumon droit avoit reçu l'air, & que le gauche ne l'avoit pas admis; & en effet ces poumons ayant été jetés dans l'eau, le droit ſurnagea, & le gauche alla à fond; cette ouverture méritoit d'être ſuivie, & elle le fut. Les poumons de trois petits chiens qui avoient reſpiré, ſurnagèrent, ceux de pluſieurs chats qui n'étoient pas venus à terme & ceux de trois petits chiens, tirés du ventre de leur mère, allèrent à fond, & M. Portal ayant ſoufflé dans le poumon droit d'un petit chien qui n'avoit pas reſpiré, ce poumon ſurnagea tandis que le gauche s'enfonça, & M. Portal ne put parvenir à faire enfoncer le premier, quoiqu'il eût fait ſon poſſible pour en exprimer entièrement l'air.

D'autres animaux, ſoumis aux expériences, confirmèrent les obſervations précédentes de M. Portal; mais il crut en devoir faire ſur l'homme même. Il ſe procura un fœtus humain qui n'étoit pas venu à terme & qui, par conſéquent, n'avoit pas reſpiré, & il trouva qu'en ſoufflant dans la trachée-artère, l'air gonfloit le poumon droit plutôt que le gauche. Cette obſervation

s'eſt trouvée confirmée par une autre de feu M. Petit, qui dans l'examen d'un fœtus monſtrueux trouva le poumon droit pâle & gonflé, & le gauche d'un rouge brun; preuve évidente que l'air avoit pénétré dans le poumon droit, ſans avoir pénétré dans le gauche.

Tous ces faits raſſemblés, prouvent donc que le fœtus une fois né reçoit d'abord l'air dans le poumon droit & enſuite dans le gauche, & que s'il meurt peu de minutes après ſa naiſſance, l'un des poumons ſurnage l'eau dans laquelle on le jette, & l'autre s'enfonce dans cette même eau.

La deſcription des parties que nous venons de donner, fait voir évidemment quelle eſt la cauſe de cette différence ; la bronche droite n'offre aucune réſiſtance à l'air, tandis que la gauche en offre beaucoup par ſa ſituation, ſon embouchure oblique, ſon moindre calibre, & par la preſſion qu'elle éprouve de la part de l'aorte & du canal artériel: on tire de même, de l'arrangement de ces parties, la raiſon pour laquelle le canal artériel s'oblitère après la naiſſance, la bronche gauche en s'élevant éloigne l'aorte de l'artère pulmonaire; ce qui ne ſe peut faire ſans que le canal artériel ſoit diſtendu & comprimé; mais M. Portal termine ſon Mémoire par une remarque bien importante. Puiſque des deux poumons d'un même enfant, l'un peut ſurnager, tandis que l'autre s'enfonce dans l'eau ; ceux qui ſont, par état, obligés de faire des rapports en juſtice, ne peuvent y apporter trop d'attention, puiſqu'en ne portant leur jugement que d'après une ſeule épreuve, ils courroient riſque de tomber dans des mépriſes d'autant plus fâcheuſes qu'elles intéreſſeroient preſque toujours la vie & l'honneur des citoyens.

OBSERVATIONS ANATOMIQUES.

I.

LE célèbre M. Haller, & à ſon exemple pluſieurs autres Anatomiſtes ſe ſont beaucoup occupés, dans ces derniers temps, à rechercher ſi toutes les parties du corps animal ſont

également douées de ſenſibilité, & à diſcerner celles qui ont cette qualité de celles qui en ſont privées; mais malgré tous leurs efforts, on n'a pu encore parvenir à aucune connoiſſance certaine ſur ce point : bien loin de-là, il ſemble réſulter des expériences, que des parties qui, dans de certaines circonſtances, avoient paru inſenſibles, avoient donné dans d'autres des marques de la plus grande ſenſibilité. Voici deux nouveaux faits qui ſemblent appuyer ce paradoxe anatomique, & qui ont été communiqués à l'Académie par M. Houſſet, Médecin des hôpitaux d'Auxerre, Membre de la Société des Sciences & Belles-Lettres de la même ville, Correſpondant de celle de Montpellier, & bien connu par ſes travaux ſur cette matière.

La première obſervation a eu pour ſujet la ſœur même de M. Houſſet; elle mourut au vingt-unième jour d'une fièvre continue, accompagnée d'un flux diſſenterique, ou plutôt d'une hémorrhagie; à l'ouverture du corps, on trouva la véſicule du fiel diſtendue par un nombre infini de pierres biliaires qui en rempliſſoient tellement la capacité, qu'elles en rendoient la ſurface comme raboteuſe; cependant cette dame n'avoit reſſenti antérieurement aucune douleur qui ſe pût rapporter à la véſicule du fiel, malgré la préſence & la multitude de ces pierres anguleuſes qui devoient la bleſſer.

La ſeconde obſervation a pour objet une pierre groſſe comme une noix muſcade trouvée dans la véſicule du fiel du corps d'une demoiſelle, qui n'avoit de même reſſenti, antérieurement à la maladie dont elle étoit morte, aucune douleur qu'on pût regarder comme occaſionnée par la préſence de cette pierre.

II.

M. Houttuyn, ſavant Médecin à Amſterdam & Correſpondant de l'Académie, lui a communiqué l'Obſervation ſuivante: Un homme âgé de cinquante-huit ans, Médecin lui-même, ayant naturellement la vue bonne, mais un peu uſée par le fréquent uſage du microſcope, fut ſurpris un matin, en ſortant de ſon lit, de s'apercevoir qu'il ne voyoit preſque plus de l'œil gauche, quoiqu'il n'y ſentît aucune douleur: la foibleſſe de cet

œil continua d'augmenter pendant un an; enfin il cessa de faire aucune fonction sans qu'on y remarquât rien d'extraordinaire. On regarda cet accident comme une goutte sereine, ou comme un de ces obscurcissemens de la vue, sans cause apparente, qu'on nomme *amaurose* *. Environ un an après, l'œil parut affecté d'une espèce de cataracte qui formoit une tache blanche & ronde dans la prunelle; cette tache changea de couleur, au bout de trois mois elle devint jaunâtre, puis d'un bleu verdâtre; en un mot, elle prit tous les caractères du glaucoma, & resta dans cet état pendant deux ans & demi, sans que le malade souffrît aucune douleur; mais au bout de ce temps, étant vers la fin du mois de Juin dans son jardin, le dos tourné au soleil, & s'occupant à ramasser des oignons de jacinthe, il fut surpris d'une inflammation à l'œil malade; il en guérit assez promptement, mais quelques jours après, il sentit tout-à-coup son œil s'enfler jusqu'au point de lui paroître de la grosseur d'un œuf de poule, & cette enflure subite fut accompagnée d'une vive douleur; quelques gouttes de liqueur qu'il sentit couler par le nez, l'engagèrent à se moucher, & l'effort qu'il fit à cette occasion lui occasionna dans la tête un bruit épouvantable qu'il compara au tonnerre, & la douleur devint extrême: il lui sortit, au même instant, par le grand angle de l'œil, un filet de sang qui coula le long du visage; alors la douleur diminua & cessa entièrement au bout d'une demi-minute; mais l'hémorrhagie subsista pendant deux heures, & il perdit environ cinq à six onces de sang. Le malade se mit ensuite au lit & dormit pendant environ deux heures: il guérit de cet accident en six semaines, par le régime & les remèdes ordinaires, mais l'œil s'est tout-à-fait consumé, & le malade peut porter actuellement un œil artificiel.

* Αμαυρὸς *obscurus.*

Le singulier assemblage de six maladies de l'œil, savoir, la goutte sereine, la cataracte, le glaucoma, l'ophtalmie, l'hémorrhagie & la consomption de l'œil a paru assez singulier à l'Académie, pour qu'elle ait cru devoir donner place à cette observation dans son Histoire.

III.

Un ancien Officier d'Infanterie, retiré du ſervice & Chevalier de Saint-Louis, fut mis au château de Saumur, à cauſe de quelques légères abſences, auxquelles on s'aperçut qu'il devenoit ſujet. La douceur & la nobleſſe de ſon caractère, ſoutenues de beaucoup de lecture, & d'une heureuſe mémoire, le firent bientôt deſirer dans les meilleures compagnies; le Gouverneur même du Château le jugea ſi peu dangereuſement affecté, qu'il obtint pour lui la liberté de la ville: après avoir joui quelque temps de cette liberté, il apprit que ſa famille ne payoit pas exactement ſa penſion; l'honnêteté de ſon caractère en fût bleſſée, & ſans faire attention à ſon état, il partit pour en aller accélérer le payement: à ſon arrivée dans ſa patrie, il fut arrêté & ramené au château, & on lui ôta une liberté dont il avoit abuſé: cette clôture plus ſévère augmenta ſon mal, & bientôt on ne put plus communiquer avec lui qu'en ſe prêtant à ſes idées: il ſe croyoit tour à tour, Prince, premier Miniſtre, Maréchal de France, faiſoit des projets, des traités, des déclarations de guerre; toutes les femmes qu'il voyoit étoient des princeſſes, & les moindres domeſtiques des grands ſeigneurs.

Dans cet état de délire aſſez complet, après avoir déjeûné à ſon ordinaire, le 25 Décembre, il ſe mit dans l'eſprit de ne vouloir plus abſolument manger, & fut en effet depuis ce jour juſqu'au 9 Février, c'eſt-à-dire, quarante-ſix jours complets ſans prendre aucune nourriture, ſeulement le cinquième jour il demanda des liqueurs, & on lui donna un demi-ſetier d'huile d'anis qu'il but en trois jours; il en redemanda, & on lui en donna un ſecond; mais ſur l'avis qu'on lui donna d'en uſer plus ſobrement, il n'en mettoit que trois gouttes dans chaque verre d'eau qu'il buvoit, & cette bouteille lui dura juſqu'au trente-neuvième jour; il buvoit à peu près autant qu'on en pouvoit juger, une pinte & demie d'eau par jour: le trente-neuvième jour il ceſſa de boire, & ne prit abſolument rien juſqu'au quarante-ſeptième.

Il s'étoit toujours levé juſqu'au trente-huitième jour, mais la foibleſſe inſéparable d'un jeûne ſi long & ſi ſévère, l'obligea pour

lors de ſe coucher ; on peut bien croire qu'il n'alla à la ſelle que les premiers jours ; les urines coulèrent en médiocre quantité tant qu'il prit de la boiſſon, mais elles ſe ſupprimèrent entièrement dès qu'il ceſſa de boire : nous devons encore ajouter ici que cet homme, naturellement propre & ſans mauvaiſe odeur, en exhala une infecte & cadavéreuſe au commencement de ſon jeûne ; que vers les huit derniers jours, il ſe priva entièrement du tabac dont il prenoit près d'une once par jour, & que ſa vue paroiſſoit ſur la fin très-affoiblie.

Dès qu'on ſe fut aperçu de ce ridicule projet, on eſſaya tous les moyens poſſibles de déterminer le malade à prendre quelque nourriture, mais ce fut toujours inutilement ; ni les ſoins du Gouverneur, ni les attentions des Officiers, ni les pathétiques exhortations des Eccléſiaſtiques vertueux qu'on lui envoya, ne purent faire aucune impreſſion ſur ſon eſprit ; on eſſaya même, dans les derniers jours, de lui donner de l'eau panée ou de l'eau de poulet, au lieu d'eau pure ; mais ce breuvage lui occaſionna un vomiſſement, en ſorte qu'on le regardoit comme perdu, lorſque la Nature obtint de lui ce que la raiſon avoit juſqu'alors inutilement demandé.

Le quarante-ſeptième jour, voyant entrer chez lui une jeune fille qui tenoit un gros morceau de pain, ſur lequel elle avoit étendu du fromage, il demanda vivement qu'on lui donnât une copieuſe ſoupe ; on s'empreſſa de lui en donner une, mais très-légère ; & malgré l'envie qu'il témoignoit d'avoir du pain & d'autres alimens ſolides, on le tint quelque temps au régime de quelques ſoupes & de quelques cuillerées de crême de ris, de deux heures en deux heures : enfin on le remit peu-à-peu à la viande & aux alimens ordinaires ; les évacuations ſe rétablirent, & il revint quoique lentement, à ſon état de ſanté.

Juſqu'ici cette obſervation n'offre qu'une longue privation des alimens dont on a déjà pluſieurs exemples ; mais voici quelque choſe de plus ſingulier : dans les premiers jours qu'il commença à manger, ſa tête étoit fort ſaine, il n'étoit plus Prince, Miniſtre ni Général, il vouloit qu'on le nommât par ſon nom, & on eſpéroit que l'acte de folie qu'il avoit fait l'auroit rappelé à la raiſon ; mais cette eſpérance ne fut pas de longue durée, à meſure que

les forces revinrent, les disparates reparurent; & on craignoit fort qu'il ne retombât dans son premier état, au départ du Courrier qui apporta cette relation à M. le Duc de la Vrillière, qui l'a communiquée à l'Académie.

IV.

L'Académie a déja rapporté dans son Histoire, plusieurs observations qui prouvent que les mules ne sont pas aussi généralement privées de la fécondité, qu'on se l'étoit persuadé; voici un nouveau fait qu'on peut joindre aux précédens. Dans une habitation située à la Petite-Anse de Saint-Domingue & appartenante à M. de Nort, Chevalier de Saint-Louis & ancien Major de la Légion Royale de Saint-Domingue, il se trouva une mule malade qu'on amena à M. de Nort, qui étoit alors accompagné de plusieurs personnes; l'animal avoit le ventre gros, & il lui sortoit une espèce de boyau par la vulve: M. de Nort envoya aussitôt chercher un Nègre, qui passoit pour le plus habile maréchal de ce canton; celui-ci ne soupçonnant pas même la véritable maladie de la mule, la jeta à terre pour lui faire prendre un breuvage: cette chute la détermina à mettre bas, & il la délivra à l'instant d'un petit muleton vivant bien conformé & couvert d'un poil long & très-noir; la mule & le muleton moururent environ dans l'espace de dix heures, l'un & l'autre ayant été blessés par la chute que le Nègre avoit mal-à-propos fait faire à la mère; & celle-ci, en particulier, par le tiraillement & le renversement de la matrice, causés par la manière brusque avec laquelle elle avoit été délivrée. La relation de ce fait singulier a été envoyée par M. de Nort, revêtue de tous les témoignages & de toutes les formalités qui pouvoient la rendre authentique.

Cette relation rappela à quelques Académiciens, qu'ils avoient entendu parler de quelques faits semblables, arrivés au Royaume de Naples, & ç'en fut assez pour déterminer l'Académie à s'en informer au Père Della Torre son Correspondant: celui-ci s'adressa à Don Carlo de Marco, Secrétaire d'État, & au Prince de Francavilla, qui, tous deux, ont des haras où ils

font des élèves de chevaux & de mulets; voici le précis de sa réponse.

Par le nom de mule ou de mulet, on entend à Naples l'animal produit par une ânesse & un cheval; ces animaux sont les meilleurs de ce genre. L'animal que nous nommons en France mulet, & qui est le produit d'un âne & d'une jument, se nomme à Naples, *gazzino*, & on en fait beaucoup moins de cas, ces animaux étant généralement pleins de défauts.

Les mulets mâles sont toujours inféconds, & il n'y a pas d'exemple à Naples qu'ils aient jamais produit; à l'égard des mules femelles, elles ont quelquefois produit un mulet, étant couvertes par un cheval: ces exemples sont rares; cependant le P. la Torre en a vu un arrivé du règne de Don Carlos, à présent Roi d'Espagne, lorsqu'il étoit Roi de Naples, & le Prince de Francavilla & Don Carlo de Marco, ont assuré avoir été témoins de quelques faits semblables dans leurs haras.

Ce que nous venons de dire, d'après le P. de la Torre, ne diminue au reste en rien la singularité de l'observation de M. de Nort; le P. la Torre ne parle que de l'animal né du commerce d'une ânesse & d'un cheval, & la mule de M. de Nort étoit née de celui d'un âne & d'une jument; mais il paroit résulter de tout ce que l'Académie a vu sur cette matière, que les mâles de l'une & de l'autre espèce sont constamment inféconds, mais que les femelles peuvent, dans quelques circonstances rares & jusqu'à présent inconnues, devenir fécondes.

L'ÉVÈNEMENT qui a donné lieu à l'article suivant, a eu son entier accomplissement dès l'année 1767, & nous nous hâtons de réparer cette espèce d'omission.

Dès l'année 1757, M. Razoux, Docteur en Médecine de la Faculté de Montpellier, Médecin de l'Hôtel-Dieu de Nîmes & Correspondant de l'Académie, lui communiqua l'essai d'une espèce de Journal des différentes températures de l'air à Nîmes, & des maladies qui règnoient alors dans le même canton; il est aisé de voir quel jour ces observations rapprochées peuvent jeter dans

dans la pratique de la Médecine, sur une infinité de phénomènes, qui ne peuvent être expliqués que par ce moyen. Ces observations étoient réduites, pour ainsi dire, au moindre terme, par l'adresse avec laquelle M. Razoux avoit su les rassembler dans des espèces de Tables qu'il nommoit *Nosologiques* *. Ce même travail fut continué par M. Razoux les années suivantes, & l'Académie jugea qu'il étoit assez utile pour mériter qu'elle en publiât un Essai de quelques mois dans le volume des Savans étrangers; le temps nécessaire à l'impression de ce volume a permis à M. Razoux d'en former un corps d'ouvrage à part, qu'il a fait imprimer, & qu'il a dédié à l'Académie en 1767.

* Νόσος, morbus.

M. Razoux commence son Ouvrage par l'exposition du but qu'il s'étoit proposé, dont il présente les avantages dans une Préface qui sert comme d'introduction; il y détaille, avec la plus grande exactitude, la méthode qu'il emploie pour construire ses Tables, & rapporte des passages nombreux, par lesquels il prouve que les plus savans Médecins qui l'avoient précédé desiroient un pareil Ouvrage, & des lettres qui font voir que ceux de ses contemporains qui ont eu connoissance de son dessein, n'ont cessé de l'exhorter à se livrer à ce travail.

Cette Préface est suivie d'un Discours préliminaire, dans lequel M. Razoux commence à entrer en matière. Comme un des principaux objets qu'il s'est proposé dans cet Ouvrage, est de présenter le tableau des variétés que les différentes températures de l'air ont pu introduire à Nîmes dans les maladies; il commence par une description exacte de la situation de la ville de Nîmes & de son territoire, situation qui doit nécessairement influer sur les vents qu'on y éprouve, sur le plus ou moins d'humidité, & sur le plus ou moins de pureté de l'air; la nourriture dans les différens états de la vie, la manière de vivre, les productions du terrein, les animaux; en un mot, tout ce qui peut influer sur l'état de la santé des habitans y est savamment discuté; il n'épargne pas même les superfluités agréables, lorsqu'elles peuvent porter atteinte à cet important objet; mais en récompense il recommande l'usage des bains, & desire beaucoup d'en

voir établir de publics; il appuie même cet article de plusieurs obſervations qui en font voir l'avantage.

Comme il y a quelques remèdes uſités dans l'Hôtel-Dieu de Nîmes, qui pourroient n'être pas ſi bien connus ailleurs, M. Razoux n'oublie point d'en donner la compoſition; il ajoute de même un extrait du Livre de M. de Sauvages, intitulé, *Nozologia Methodica ſiſtens Morborum genera & claſſes, &c.* pour mieux mettre ſon lecteur en état de diſtinguer les eſpèces de maladies deſquelles il va être dans le cas de parler.

Ce n'eſt qu'après tous ces préliminaires, qu'il a jugé néceſſaires, que M. Razoux vient enfin à ſes Tables, qu'il commence par le mois de Juin 1757; il donne pour chaque jour du mois la hauteur du mercure dans le baromètre, la hauteur de la liqueur dans le thermomètre matin & ſoir; les vents qui ont ſoufflé & l'état du ciel pendant chaque jour: ces obſervations occupent la première page de chaque mois, au bas de laquelle il en fait une courte récapitulation.

Les pages ſuivantes contiennent le nombre des malades de chaque eſpèce de maladie, qui ſont entrés pendant le mois, tant dans la ſalle des hommes que dans celle des femmes; l'eſpèce de leurs maladies; le nombre de ceux qui ont été guéris, celui des morts, celui des convaleſcens, & les obſervations qu'il a faites ſur les différens traitemens que les maladies ont exigés, leurs ſymptômes, leurs criſes & la réuſſite bonne ou mauvaiſe que ſes ſoins ont eue.

La dernière page de chaque mois contient une eſpèce de récapitulation du nombre des malades, des guéris, des morts & de ceux qui ſont reſtés à l'Hôtel-Dieu, rangés ſuivant l'ordre de leurs maladies.

Ces Tables ſont continuées de la même manière depuis le mois de Juin 1757 juſqu'en Décembre 1761.

L'Ouvrage de M. Razoux eſt terminé par douze Lettres, Obſervations & Mémoires ſur divers ſujets de Médecine.

Il s'agit dans le premier article, d'une hydrophobie ſingulière dont un homme fut attaqué ſans avoir été précédemment mordu

ni piqué par aucun animal, & ſeulement pour avoir reſpiré de trop près l'air qui ſortoit de la gueule d'un chien enragé.

Dans le ſecond, il s'agit de vers ſortis des puſtules de la petite vérole, mais ſeulement de celles du viſage, & que M. Razoux reconnut être nés des œufs qu'y avoient déposés des mouches, du genre de celles qu'on nomme ici *mouches bleues*.

D'autres vers font le ſujet du troiſième article, ils étoient dans les ſinus frontaux & cauſoient au malade des maux de tête affreux. M. Razoux trouva qu'ils étoient de la nature de ceux qui ſe trouvent quelquefois dans les ſinus frontaux des moutons, & qui leur occaſionnent une eſpèce de vertige qu'on nomme *turelu*.

Les quatrième & cinquième articles ont pour objet les bons effets de la plante appelée *ſolanum ſcandens ſeu dulcamara*, priſe intérieurement pour la guériſon du ſcorbut; nous n'en dirons rien ici, en ayant amplement parlé en 1761 * d'après les obſervations mêmes de M. Razoux; nous ajouterons ſeulement que la malade qui a fait le ſujet de cette obſervation, jouiſſoit en 1767 d'une parfaite ſanté, qu'elle s'étoit mariée & étoit accouchée d'un enfant bien conſtitué.

* *Voyez Hiſt. année 1761, p. 54.*

L'objet du ſixième article eſt un vomiſſement habituel cauſé par une excreſcence ou *fungus* qui fermoit abſolument l'orifice intérieur de l'eſtomac & qui fit à la fin périr le malade.

Dans le ſeptième, M. Razoux rend compte des rhumes épidémiques obſervés aux environs de Nîmes, des divers ſymptômes qu'il y a obſervés & des différens remèdes qu'il a employés pour les guérir.

Le huitième roule tout entier ſur les obſervations que M. Razoux a faites ſur les pouls critiques, c'eſt-à-dire qui annoncent de ces évacuations qui terminent ou, comme diſent les Médecins, jugent une maladie; ce morceau, ſoutenu par-tout d'obſervations curieuſes, eſt peut-être le morceau le plus intéreſſant du Livre de M. Razoux.

Les neuvième, dixième & onzième articles contiennent l'hiſtoire de quelques inoculations & quelques diſcuſſions polémiques à ce ſujet.

Quant au douzième, il n'eſt que l'indication d'un Mémoire

présenté par M. Razoux à la Société Médico-Physique de Bâle; & inséré dans le cinquième volume des *Acta Helvetica*, & qui a pour objet les maladies exanthémateuses ou caractérisées par une éruption à la peau.

Cet Ouvrage contient un nombre prodigieux d'Observations curieuses & qui peuvent devenir d'une extrême utilité dans la pratique de la Médecine ; on y reconnoît par-tout l'Observateur exact, le Médecin prudent & l'ami de l'humanité.



CHIMIE.

SUR LA NATURE DE LA BILE.

NOUS avons rendu compte en 1767 * du travail de M. Cadet sur cette matière: il en résultoit que la bile étoit un véritable savon, composé d'une huile animale, de la base alkaline du sel marin, du sel marin lui-même, d'un autre sel de la nature du sucre de lait, d'une terre calcaire, participant légèrement du fer, & enfin d'une petite quantité d'une substance animale gélatineuse.

V. les Mém. p. 66.

* *Voy. Hist. année 1767, p. 68.*

Toutes ces parties intégrantes de la bile avoient été démontrées par les observations de M. Cadet, d'une manière qui lui paroissoit incontestable; & d'ailleurs la propriété savonneuse de la bile est si bien reconnue, qu'on l'emploie à dégraisser des étoffes, sur lesquelles le savon même a souvent peine à mordre.

Malgré toutes ces preuves, M. Cadet a été extrêmement surpris de trouver, dans une thèse de M. Rœderer, soutenue à Strasbourg, que la bile contient un principe acide, & qu'elle coagule le lait; deux propriétés qui détruiroient absolument le sentiment de M. Cadet, puisqu'alors la bile ne seroit plus un savon, ou qu'au moins ce seroit un savon extraordinaire, dont la partie saline, au lieu d'être un alkali, seroit un acide.

Quelqu'assuré que fût M. Cadet de l'exactitude & de la précision de ses recherches, cependant l'autorité de M. Rœderer l'ébranloit; & dans cette incertitude, il a cru devoir consulter l'oracle des vrais Physiciens, l'expérience.

Pour cela il a pris deux onces de bile, tirée d'un bœuf qu'on venoit de tuer, & par conséquent exempte de toute altération, & les a mêlées avec une chopine de lait de vache, tiré depuis quatorze heures; il a bien remué ce mélange, & l'a laissé reposer

plusieurs heures, sans y rien remarquer qui tendît à la coagulation du lait.

Il a mis sur le feu une autre chopine de lait, & lorsqu'il a été bouillant, il y a mêlé deux onces de bile, & a fait faire au mélange deux ou trois bouillons; il ne s'est fait aucune coagulation, seulement la partie grasse & visqueuse de la bile a rendu le lait plus crêmeux. Ces deux mélanges furent mis rafraîchir dans de l'eau, à la température de dix degrés; le premier y est resté près de quatorze heures, sans qu'on y vît aucune séparation; à l'égard du second, il s'en éleva au bout de trois heures une crême lisse & sans grumeaux, que la simple agitation réunit au lait, précisément comme il arrive au lait bien pur qui est en repos.

Il étoit déjà bien prouvé, par ces expériences, que la bile récente ne caille point le lait; mais voici quelque chose de bien plus fort, non-seulement elle ne le caille pas, elle l'empêche de se cailler, & rétablit celui qui l'est.

Pour s'en assurer, M. Cadet a fait cailler du lait avec le vinaigre distillé, & il y a mêlé de la bile; après quelques bouillons, la bile a régénéré une partie du lait; preuve certaine de l'alkali qu'il a démontré dans la bile, & d'autant plus certaine que l'alkali semblable à celui de la soude, que M. Cadet a tiré de la bile, l'huile de tartre par défaillance, & même l'alkali volatil, ont produit le même effet; surquoi M. Cadet observe que ce moyen pourroit être employé, avec succès, pour empêcher le lait de tourner, pendant les chaleurs & les orages.

Tout ceci semble prouver, avec la plus grande évidence, que, comme M. Cadet l'avoit avancé dans son premier Mémoire, la bile est une espèce de savon qui ne contient aucun acide développé; nous disons développé, car l'acide entre nécessairement dans les huiles & les graisses comme un de leurs principes constituans, & à cet égard la bile contient de l'acide; mais ce n'est pas de celui-ci, que l'état dans lequel il est privé de toute action rend oisif, qu'a voulu parler M. Rœderer, c'est d'un autre acide libre & capable d'agir sur le lait, ce qui changeroit considérablement la nature de la bile considérée comme savon.

M. Cadet a cru ne pouvoir mieux s'éclaircir sur ce point;

qu'en traitant le lait avec le ſavon, comme il l'avoit traité avec la bile.

Dans cette vue, il a fait diſſoudre quatre gros de bon ſavon blanc dans quatre onces d'eau, & a mêlé cette diſſolution avec une chopine de lait; cette liqueur n'y a occaſionné aucune décompoſition; un pareil mélange auquel il a fait faire trois ou quatre bouillons, lui a offert une décompoſition ſenſible: une partie du lait s'eſt caillée, mais le reſte s'eſt bien ſoutenu; & l'ayant mis repoſer, il s'en eſt élevé une crême bien liſſe & ſans grumeaux.

Cette eſpèce de décompoſition piqua la curioſité de M. Cadet, il en rechercha la cauſe & crut l'avoir trouvée dans une portion d'huile rance que le ſavon gardé pouvoit contenir & dont l'acide ſe ſeroit échappé; il étoit aiſé de s'en éclaircir, il ne falloit qu'employer du ſavon récemment fait, il ne devoit opérer dans le lait aucune coagulation; auſſi n'en opéra-t-il aucune, & il reſta bien prouvé que le ſavon qui ne contenoit aucun acide développé, produiſoit ſur le lait le même effet que la bile; & que pour peu qu'il en contînt, il cailloit le lait au moins en partie. La bile qui agit ſur le lait, comme le ſavon qui ne contient point d'acide, n'en contient donc pas elle-même.

On n'ignore pas que les matières animales ne contiennent que peu ou point d'acide développé; la bile qu'on ſait d'ailleurs contenir beaucoup de principe alkalin, en doit par-là même contenir moins qu'une autre, & il eſt bien facile de s'en aſſurer; on ſait que l'acide rougit le papier bleu, & que l'alkali le verdit, M. Cadet prit donc de la bile de bœuf récente, l'étendit dans quatre fois autant d'eau, & il vit, comme il s'y étoit attendu, que cette liqueur, loin de rougir le papier bleu, lui donna une couleur verte; & pour s'aſſurer que la plus petite portion d'acide libre lui auroit donné la propriété de rougir le papier bleu, M. Cadet mêla avec huit onces de la diſſolution de bile dans l'eau, une ſeule goutte d'huile de vitriol, & cette petite quantité d'acide ſuffit pour lui donner la propriété de rougir le papier bleu,

Il y a plus, les acides agiſſent ſur la bile comme ſur le ſavon, & la coagulent en grumeaux en ſéparant l'huile de l'alkali.

M. Cadet avoit d'abord ſoupçonné que l'acide que M. Rœderer

avoit obſervé dans la bile, pouvoit s'être dégagé de l'huile animale par la fermentation acide qui précède ordinairement la putride; mais ſi ce paſſage a lieu dans la bile, il doit être bien court & bien difficile à ſaiſir; car M. Cadet ayant eu la patience d'examiner de quart-d'heure en quart-d'heure l'effet de la bile ſur le papier bleu, juſqu'à ce qu'elle fût parvenue à la fermentation putride, n'a pu trouver aucun inſtant où elle l'ait rougi, & où par conſéquent elle ait pu être ſoupçonnée de la plus petite acidité.

Il y a bien de l'apparence que dans l'expérience de M. Rœderer, il eſt arrivé, ou que le lait dont il s'eſt ſervi étoit déjà diſpoſé à l'aigre, ou que la bile elle-même étoit altérée: on ſait, par exemple, que la bile verte ne doit cette couleur qu'à la préſence d'un acide étranger; il ne ſeroit donc pas difficile à une bile de cette eſpèce de cailler le lait. Mais un cas particulier de cette eſpèce ne peut tirer à conſéquence & ne peut porter aucune atteinte à l'opinion avancée par M. Cadet, que la bile eſt un véritable ſavon animal exempt de tout acide développé; opinion que les expériences qu'il a rapportées dans ſon premier Mémoire & celles qu'il rapporte dans celui-ci, ſemblent prouver de la manière la plus inconteſtable.

SUR LA
NÉCESSITÉ DE RETIRER DES COUPELLES, LA PARTIE D'ARGENT FIN QU'ELLES RETIENNENT TOUJOURS.

V. les Mém. p. 153.

NOUS avons déjà rendu compte en 1762 [a] & en 1763 [b] des travaux que M. Tillet avoit entrepris ſur cette matière, de laquelle nous allons reprendre la ſuite; les expériences précédentes avoient évidemment démontré que les coupelles retenoient toujours une partie ſenſible d'argent fin dans l'opération de l'eſſai, que c'étoit cette partie retenue qui avoit fait regarder comme impoſſible d'avoir de l'argent abſolument pur & indeſtructible; & enfin qu'en faiſant rendre à la coupelle ce qu'elle avoit abſorbé, l'argent

[a] *Voy. Hiſt. année 1762, p. 56.*
[b] *Voy. Hiſt. année 1763, p. 39.*

l'argent pouvoit être porté à un tel degré de pureté, qu'il ne perdoit plus rien à être essayé, même plusieurs fois. L'importance de la matière a déterminé M. Tillet à reprendre la suite de ce travail & à rapprocher, pour ainsi dire, les idées qu'il avoit données dans les précédens Mémoires.

Essayer une certaine portion d'argent, c'est déterminer la quantité d'argent pur & celle de cuivre ou d'autres métaux qui y sont contenus.

Pour cela on met une petite partie de l'argent qu'on veut essayer, mêlé avec une certaine quantité de plomb, dans une espèce de creuset poreux fait avec des cendres d'os bien lessivées; on expose ensuite ce creuset, qu'on nomme *coupelle*, dans une moufle placée dans un fourneau, où elle est environnée de tous côtés de charbons ardens; bientôt l'ardeur du feu fait couler le plomb qui aide l'argent à se fondre. Le plomb qui se vitrifie aisément, facilite la vitrification des autres métaux & les entraîne avec lui sous la forme de litharge à travers la coupelle dans laquelle il ne reste que l'argent fin; on pèse alors cet argent, & ce qu'il a perdu de son poids est regardé comme la partie de métaux étrangers qu'il tenoit & qui s'en sont allés avec le plomb, & on juge par-là du titre auquel doit être fixée la portion d'argent qu'on vouloit essayer.

On voit par ce court exposé, que, comme on ne soumet à l'essai qu'une très-petite partie de la matière, on conclut toujours du petit au grand, & que les moindres erreurs sont extrêmement à craindre.

Aussi M. Tillet compte-t-il jusqu'à onze défauts dans lesquels peuvent tomber les Essayeurs; le peu de sensibilité & de précision dans les balances d'essai, le peu de justesse des poids, qu'on nomme *de semelle*, & qui ne sauroient être trop exacts, la mauvaise fusion des matières à essayer dans lesquelles l'alliage est souvent très-inégalement distribué, les matières étrangères que contient souvent le plomb, l'argent dont il n'est presque jamais dépouillé, l'inégalité avec laquelle cet argent peut être mêlé dans la masse, peuvent faire que différens essais où il sera employé, donnent des titres différens; si on emploie des doses de plomb plus ou moins fortes que celles qui sont prescrites, il en naîtra encore des

variations dans le titre ; pour peu qu'on manque d'attention à la conduite du feu, les boutons, quoiqu'avec toute l'apparence possible d'une opération parfaite, pourront encore retenir de l'alliage, ou au contraire avoir rendu du fin, soit par des petits globules d'argent qui s'en séparent & restent adhérens aux coupelles, soit par des pétillemens qui écartent ces globules ; & ce cas est le plus à craindre, parce que non-seulement il appauvrit l'essai, mais encore parce qu'il enrichit à ses dépens les autres qui se trouvent dans la moufle qui reçoivent ces globules étrangers, & en sont réellement augmentés.

En examinant ce que nous venons de dire, il est aisé de voir que la plus grande partie de ces défauts peut s'éviter avec du soin & de l'attention, & c'est aussi ce que M. Tillet recommande aux Essayeurs & qu'il a pratiqué lui-même ; l'exactitude des balances, l'examen de la masse d'argent qui a servi à ses expériences, celui du plomb qu'il employoit, la fabrique des coupelles, la conduite du feu, ont fait l'objet de ses soins & ont assuré le succès de ses expériences ; nous allons essayer de présenter une idée de son travail & des résultats qui en ont été le fruit.

Il ne sera donc point ici question de toutes ces erreurs qu'on peut éviter avec de l'attention, il s'agit ici d'une autre cause d'erreur qui ne tient à aucune de celles que nous venons d'indiquer, si ce n'est peut-être à la conduite du feu pendant la durée de l'opération.

L'opération par laquelle on essaye l'argent, tend essentiellement à constater combien il y a d'argent fin dans le morceau qu'on essaye, & combien d'alliage ou de métal étranger y est mêlé.

Comme cet essai ne se fait que sur une très-petite quantité d'argent, il est nécessaire qu'il soit fait avec toute la précision possible, puisque la proportion se trouve entre l'argent, & l'alliage de cette petite quantité sert à fixer le titre de la masse, souvent considérable, dont elle a été tirée.

Il se trouvoit cependant un grand nombre de défauts dans l'opération usitée par les Essayeurs, & malheureusement ils alloient presque tous à diminuer la quantité de fin, & par conséquent au détriment du propriétaire.

L'importance de cette matière a déterminé M. Tillet à tourner ses vues vers cet objet si intéressant ; & pour ne point s'égarer, voici les précautions qu'il a prises.

Pour s'assurer que l'argent & le cuivre étoient également mêlés dans les portions qu'il alloit soumettre à l'essai, il a tiré la portion d'argent qu'il y destinoit d'une masse de 1800 marcs, chargée d'environ un douzième de cuivre, & qui avoit été fondue & bien brassée dans un creuset de fer ; il fit laminer cette portion, & ce fut de ces lames qu'il tira la matière de ses essais.

Il s'étoit de même assuré d'une portion de plomb dépouillé, autant qu'il étoit possible, de tout argent ; chose absolument nécessaire dans la recherche qu'il alloit entreprendre.

Les fourneaux d'essai sont ordinairement construits de manière à ne donner qu'une chaleur assez modérée ; elle suffit à l'opération telle qu'on la pratique, mais elle auroit été insuffisante pour les épreuves que M. Tillet méditoit ; il falloit donc les rendre capables de donner un degré de chaleur plus considérable, & voici le moyen qu'il emploie pour y parvenir.

Il fait le cendrier de son fourneau de 14 pouces de haut, au lieu de trois pouces qu'on lui donne ordinairement ; & pour y introduire un courant d'air plus vif, il y adapte à 4 pouces du fond un tuyau de tôle qui, passant au-dehors à travers le mur de la cheminée, y appelle l'air extérieur ; deux barreaux de fer traversent le cendrier à la hauteur de 9 pouces, & y forment une grille qui reçoit les charbons embrasés qui tombent du fourneau, & les expose à tout le courant d'air du tuyau ; mais comme ces charbons à demi-consumés n'échaufferoient pas assez le plancher de la mouffle, M. Tillet a ménagé, au-dessous de ce plancher, une ouverture dans le corps du fourneau, par laquelle on y peut introduire du charbon noir & faire éprouver à la mouffle l'activité du charbon qui s'allume ; une porte de tôle garnie en-dedans de terre à creuset, ferme cette ouverture : enfin, pour occasionner un plus grand tirant d'air, il couvre l'extrémité supérieure du fourneau d'une espèce de chapiteau conique de fer, au-devant duquel est une ouverture fermée d'une porte qu'on n'ouvre que pour jeter du charbon au-dessus de la mouffle, & cette espèce de dôme est

encore prolongé par un tuyau de tôle de 3 pieds ou environ de longueur & de six pouces d'ouverture; pour peu qu'on soit au fait de la manière dont l'air agit dans les fourneaux, il est aisé de sentir combien les additions que fait M. Tillet au fourneau d'essai, doivent augmenter la force & l'activité du feu.

M. Tillet employa d'abord le fourneau d'essai dans l'état ordinaire; il n'avoit alors pour but que de voir si, après avoir reconnu un titre quelconque dans un argent dont il connoissoit le degré de pureté, il le retrouveroit toujours le même en l'essayant de nouveau; mais il eut beau faire, il trouva toujours des variations dans le titre; il n'ignoroit pas que les coupelles retenoient un peu d'argent, mais il n'étoit pas alors question de savoir ce qu'il se perdoit de fin, mais de rendre cette perte égale dans tous les essais, puisqu'alors on pourroit y suppléer par un calcul facile.

M. Tillet s'étoit aperçu dans le cours de ses opérations, que, sur la fin de l'opération, l'air qui favorise l'imbibition de la litharge dans la coupelle, y diminue aussi la chaleur à tel point qu'il n'en reste que ce qui est absolument nécessaire pour tenir la matière en fusion; & cette remarque lui fit soupçonner que le bouton qui demeuroit après l'opération, pourroit bien avoir retenu quelque portion de cuivre, & alors il n'étoit plus étonnant que cette portion de cuivre, vraisemblablement variable, introduise quelque variation dans le titre.

Pour éviter cet inconvénient, M. Tillet employa donc le fourneau tel que nous venons de le décrire; alors le feu devenu plus fort, ne laissa plus refroidir la matière; il employa de plus fortes doses de plomb, il fit subir aux boutons un second essai, il retira des coupelles l'argent qu'elles avoient retenu; & ayant rejoint à chaque bouton la particule d'argent retirée de sa coupelle, les résultats furent par-tout les mêmes & donnèrent le même titre de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$.

Devenu par-là certain du titre de son argent, il recommença ses expériences: dans la première faite avec la dose de plomb ordinaire de six fois le poids de l'argent, le titre donné par l'opération fut 10 deniers 21 grains; la coupelle auroit donc dû retenir 1 grain $\frac{1}{4}$; cependant elle en rendit 2 grains $\frac{1}{2}$, d'où il suit

évidemment que le bouton de fin tenoit encore 1 grain $\frac{1}{4}$ d'alliage: dans la feconde, le bouton d'effai retenoit encore plus d'alliage : dans la troifième enfin, le bouton contenoit 2 grains $\frac{3}{4}$ d'alliage.

Le bouton de la feconde expérience paffé une feconde fois à la coupelle avec trois parties de plomb, perdit 4 grains $\frac{1}{8}$ de fon poids, ce qui l'auroit mis au titre de 10 deniers 17 grains $\frac{1}{8}$; mais en réuniffant à ce bouton 2 grains qu'avoit retenu la première coupelle, & 2 grains $\frac{3}{8}$ abforbés par la feconde; le vrai titre fe trouvera de 10 den. 22 grains $\frac{2}{8}$ ou $\frac{1}{4}$, qui revient précifément au titre intrinsèque de la matière de l'effai.

Quoique M. Tillet fut bien fûr du titre de la matière de fes effais, il réfolut de s'en affurer encore d'une autre manière, en compofant une portion d'argent dont le titre ne peut pas être équivoque.

Il avoit eu befoin en 1763, pour quelques expériences, d'une portion d'argent abfolument pur *, & il avoit trouvé moyen de l'obtenir; il avoit encore une partie de cet argent précifément à 12 deniers; cependant, pour être encore plus fûr de fa pureté, il l'effaya de nouveau avec une forte dofe de plomb, & fut par-là convaincu que cet argent ne contenoit aucun alliage; 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$ de cet argent, furent mis avec 1 grain $\frac{3}{4}$ de cuivre de rofette, & compofèrent par conféquent un bouton allié qui contenoit 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$ de fin.

* Voy. Hift. 1763. p. 47.

Cette portion mife à la coupelle avec la dofe ordinaire de fix parties de plomb, vint au titre de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{2}$, il y avoit donc un quart de grain de plus que dans l'argent pur, fans compter celui qu'avoit abforbé la coupelle, & en y joignant ce dernier, il fe trouva 11 deniers 0 grain & $\frac{7}{8}$; d'où il fuit que le bouton pefoit 2 grains $\frac{1}{8}$ plus que la quantité d'argent pur qui avoit été employée, & qui ne pouvoit venir que d'un refte d'alliage ou de plomb que le bouton avoit retenu, auffi cette quantité difparut-elle; en paffant une feconde fois le bouton à la coupelle avec trois parties de plomb, en rejoignant au fecond bouton, provenu de cette opération, ce que la coupelle avoit retenu, M. Tillet trouva fon argent précifément au même titre qu'il l'avoit mis; il eft donc prouvé que les petites différences qui fe

trouvent entre ces essais, viennent très-vraisemblablement beaucoup plus de la partie d'alliage que retient le bouton, que de l'inégalité dans le mélange de l'alliage de la matière qui a servi aux essais, & qu'on pouvoit faire disparoître ces différences en enlevant aux boutons, par une seconde opération, la petite partie d'alliage qu'ils avoient retenue.

Presque tout ce que nous venons d'exposer avoit été fait au feu ordinaire de coupelle. M. Tillet voulut voir si en faisant l'opération à un feu beaucoup plus vif & qui pût faire passer les essais en beaucoup moins de temps, il obtiendroit un autre résultat; il employa pour ces expériences le fourneau tel que nous l'avons décrit, mais il y remarqua les mêmes circonstances, & la perte sur les boutons d'essai ne fut pas plus marquée dans une façon d'opérer que dans l'autre; d'où il conclut que l'exactitude rigoureuse des essais ne tient point à la conduite du feu, que les boutons d'essais éprouveront toujours une perte de fin plus ou moins considérable tant qu'on ne retirera point de la coupelle le fin qu'elle a absorbé pour le rejoindre au bouton.

La dose du plomb qu'on emploie dans les affinages, méritoit bien d'être examinée, & M. Tillet en a fait un des objets de ses recherches; il avoit déjà examiné cette matière, & il n'ignoroit pas que plus on employoit de plomb au-delà d'un certain point, plus il y avoit de perte sur le fin; & cette considération, jointe à la nécessité de ne se pas trop écarter de la dose de plomb qu'on emploie dans les affinages étrangers, l'avoit déterminé à proposer au Conseil de fixer la quantité de plomb à six fois le poids de l'argent qu'on essaye.

Quand nous avons dit que l'augmentation du plomb augmente la perte de l'argent fin, nous n'avons pas prétendu dire que cette perte fût proportionnelle à la quantité de plomb que l'on ajoute; bien loin de-là, passé un certain terme, cette augmentation n'a presque plus d'effet.

M. Tillet a voulu chercher la raison de cette différence si marquée, & voici ce qu'il a observé: pendant tout le temps que l'argent allié nage dans une grande quantité de litharge, l'affinage ne se fait qu'imparfaitement, la circulation de la matière

eſt lente, & la coupelle n'abſorbe que peu d'alliage, & par conſéquent peu de fin, qui ne s'y introduit qu'à la faveur de l'introduction de la litharge; d'où il ſuit que pendant tout ce temps il ne ſe fait preſqu'aucune imbibition dans la coupelle, ni aucune perte de fin, & que l'un & l'autre n'ont lieu que lorſque la matière circule vivement dans une quantité modérée de litharge.

D'après ces remarques, il fit deux nouveaux eſſais en employant ſix parties de plomb à l'ordinaire, mais dont il ne mit d'abord que quatre dans la coupelle; & lorſqu'elles furent preſque imbibées, & que l'argent fut prêt à ſe fixer en bouton, il y remit les deux autres, & il obtint un bouton qui ne laiſſa aucun doute ſur ſa pureté.

Dans le ſecond eſſai, M. Tillet mit d'abord cinq parties de plomb dans la coupelle, & la ſixième lorſqu'elles ſe furent imbibées; le produit fut abſolument égal à celui du premier eſſai.

Pour peu qu'on y faſſe réflexion, la cauſe de cet effet eſt aiſée à apercevoir: en effet, l'argent allié ſe trouve dans cette opération réduit deux fois à n'être mêlé qu'avec une ou deux parties de litharge; il circule donc avec plus de facilité & s'épure davantage: il eſt vrai qu'il s'y fait une plus grande perte de fin, mais cette perte n'eſt pas réelle puiſqu'on peut retirer de la coupelle la partie de fin qu'elle a abſorbé.

On ſait depuis long-temps qu'on peut employer dans les affinages le biſmuth au lieu du plomb, ſoit qu'on l'emploie pur, ſoit qu'on le mêle avec le plomb. M. Tillet a cru qu'il étoit de ſon objet d'examiner s'il y avoit quelqu'avantage à ſubſtituer en tout ou en partie ce demi-métal au plomb; il a trouvé qu'à la vérité il purifioit un peu mieux l'argent, mais qu'il en entraînoit auſſi un peu plus dans la coupelle; inconvénient qui n'en eſt un, que tant qu'on ſe tiendra à juger du titre de la matière par le ſeul bouton, ſans faire rendre à la coupelle ce qu'elle a retenu de fin.

Puiſque les coupelles retiennent toujours une partie de fin, il étoit naturel de chercher les moyens de faire en ſorte qu'elles en retinſſent le moins poſſible: dans cette vue, M. Tillet imagina de former des coupelles neuves avec des débris de vieilles

coupelles, comptant que cette matière, déjà imbibée de litharge, abſorberoit moins de fin que l'autre; mais l'expérience lui fit voir qu'elles n'en abſorboient pas moins, & il n'en tira d'autre utilité que d'apprendre que ces débris d'anciennes coupelles pouvoient ſervir à en conſtruire de nouvelles lorſqu'on manque de matière propre à les conſtruire; mais en ce cas on devroit obſerver, lorſqu'on voudra revivifier la litharge qu'elles avoient abſorbées, qu'elles donneroient toujours une certaine quantité de plomb & de fin étrangère au dernier eſſai, & ne feroient qu'induire en erreur.

De toutes les obſervations de M. Tillet, que nous venons de rapporter, il réſulte:

1.° Que dans la manière d'eſſayer, uſitée en Europe, l'argent même le plus pur éprouve conſtamment une perte plus ou moins conſidérable par la quantité de fin qu'abſorbent les coupelles.

2.° Qu'en reſſuſcitant la litharge imbibée par les coupelles & paſſant ce plomb à l'eſſai, il rend la partie de fin qu'il avoit entraînée avec lui, & qu'on obtient par ce moyen la totalité de l'argent fin contenu dans la matière qu'on eſſaye.

3.° Qu'un Eſſayeur, même en prenant toutes les précautions preſcrites pour l'exactitude des eſſais, ne peut ſe flatter de trouver toujours la même matière au même titre.

4.° Que l'égalité du titre, abſtraction faite de la perte cauſée par l'imbibition du fin dans la coupelle, ne dépend ni de la chaleur exceſſive, ni de la chaleur modérée du fourneau, ni de la promptitude ou de la lenteur de l'opération; ou que du moins le degré de feu qui pourroit la produire, dépend de tant de cauſes, qu'il eſt preſque impoſſible de le déterminer; & que ſi, par une longue habitude, un Eſſayeur avoit pu parvenir à le ſaiſir, cette connoiſſance ne ſeroit que pour lui, & que les inſtructions les plus préciſes ne pourroient le tranſmettre à d'autres.

Il en réſulte encore que le ſeul moyen d'avoir le titre réel des matières qu'on eſſaye, ſeroit de faire reſtituer aux coupelles l'argent qu'elles ont abſorbé: il eſt vrai que ce ſeroit faire deux opérations au lieu d'une; mais le degré d'exactitude qu'on obtiendroit par-là, & qu'on ne peut obtenir que par ce moyen, dédommageroit bien de ce travail.

M.

M. Tillet a cependant cherché à l'abréger, & voici les tentatives qu'il a faites sur cet objet.

Il avoit remarqué qu'il se trouve d'autant moins de variation dans le titre des essais, qu'on vise plus à épurer le bouton, qu'à le garantir de la perte que lui fait éprouver la coupelle.

Il avoit encore observé que huit parties de plomb étoient suffisantes pour affiner complettement le bouton, pourvu qu'on les employât à deux fois; savoir, six parties la première fois, & les deux autres lorsque celles-ci sont imbibées dans la coupelle; que même six parties pouvoient suffire en faisant l'opération en trois fois; savoir, trois à la première, deux à la seconde, & une à la troisième.

Quelle que soit la dose qu'on adopte, le bouton s'épure également, & la perte est de 4 grains absorbés par la coupelle: or, il n'est pas difficile de trouver le moyen de charger le plomb d'assez d'argent fin pour qu'il restitue au bouton ces quatre grains absorbés par la coupelle; on pourroit même sans cela tenir compte de ces quatre grains, mais il faudroit pour cela que le plomb ne contînt aucune partie d'argent, & c'est ce qu'il n'est pas aisé de se procurer; c'est pourquoi M. Tillet croit qu'on doit s'en tenir à enrichir le plomb dans la proportion nécessaire, pour qu'il compense le déchet du bouton.

Avec tout cela pourtant, il ne juge pas cette opération absolument sûre, quoiqu'elle le soit beaucoup plus que l'opération ordinaire; & ce n'est, selon lui, qu'en faisant restituer à la coupelle ce qu'elle a retenu, qu'on peut juger invariablement du titre de l'argent.

Mais à quoi peut servir cette exactitude, & cette petite partie d'argent, qu'absorbe la coupelle, mérite-t-elle qu'on emploie tant d'art & tant de peine pour s'en assurer? Oui sans doute; car la portion d'argent qu'on essaye, doit régler, par son essai, la valeur de masses énormes auxquelles elle est relative; elle répond à 1 & environ un septième pour cent de tout l'argent monnoyé qui circule dans le commerce, & à 1 & environ un douzième de tout celui qu'on emploie en vaisselle: on peut juger de l'énorme non-valeur que cette petite partie d'argent, absorbée par les coupelles, introduit

dans le commerce, mais cette non-valeur ne peut disparoître que par un concours généial de toutes les Puissances; celle qui poinçonneroit seule plus haut que les autres, auroit trop à perdre dans son commerce, & il y a bien de l'apparence que ce concours si utile n'arrivera jamais, & que la vérité physique paroîtra inutilement; elle sera cependant de quelqu'usage, s'il vient jamais à s'élever quelque système spécieux sur cet objet; ces expériences seront autant de points immuables & lumineux, à la faveur desquelles il sera facile d'en juger sainement; mais n'eussent-elles que la curiosité pour objet, les Physiciens auront toujours à M. Tillet l'obligation d'avoir le premier éclairci une matière si curieuse & si intéressante.

OBSERVATION CHIMIQUE.

M. CADET a fait part à l'Académie d'un phénomène digne de l'attention des Chimistes; il avoit mêlé une dissolution de mercure, par l'acide nitreux, avec une proportion déterminée d'esprit-de-vin rectifiée; il distilla ce mélange, & le résidu de la distillation traité avec l'alkali qui sert de base au sel marin, ou avec l'alkali fixe du tartre, lui a constamment donné de l'alkali volatil en liqueur, du sel volatil concret & un peu d'huile qui avoit une odeur de bitume: d'où pouvoient venir ce sel volatil & ce bitume dans un composé de matières qui paroissent si peu capables d'en contenir?

NOUS renvoyons entièrement aux Mémoires:

V. les Mém. p. 589.

La description d'un grand Fourneau à affiner le cuivre, construit au mois d'Août 1755, dans la fonderie des mines de Chessey en Lyonnois, dans lequel se raffine tout le Cuivre provenant desdites mines & de celles de Sainbel: Par M. Jars.

CETTE année M. Guindant, Médecin de la Faculté de Montpellier & de l'Hôtel-Dieu d'Orléans, & de la Société royale d'Agriculture de la même ville, présenta à l'Académie un Mémoire intitulé : *Examen chimique & pratique des Eaux de la Loire, du Loiret & des puits d'Orléans,* fait par lui & par M. Prozet, habile Apothicaire d'Orléans, que M. Pajot de Cypierre, Intendant de cette généralité, avoit engagé à concourir à cet examen.

Le travail de M. Guindant a donc trois objets séparés; l'examen des eaux de la Loire, celui des eaux du Loiret, & celui des eaux des puits d'Orléans: nous allons essayer d'en présenter le résultat.

M. Guindant commence son examen de l'eau de la Loire, par une courte description de cette rivière, qui a environ cent quatre-vingts lieues de cours, depuis ses sources, qui sont dans le Vivarais au pied du mont Gerbier-de-Joux, jusqu'à son embouchure dans l'Océan, à douze lieues de Nantes; cette rivière a deux espèces de poissons, les poissons de résidence, qui sont la carpe, le barbeau, le brochet, la plie, l'anguille, la perche, la brême & le goujon; & les poissons de passage, qui sont le saumon, l'alose & la lamproye: elle a peu de plantes qui croissent sur ses bords, & par conséquent rien à craindre de leur part pour sa salubrité.

La pureté des eaux ne peut être altérée que par les matières qui y sont dissoutes; toutes celles qui n'y sont que mêlées s'en séparent aisément par la filtration ou même par le seul repos qui les obligent à se précipiter, mais celles qui y sont dissoutes s'y trouvent intimement unies, & l'art seul peut les en séparer; elles augmentent la pesanteur spécifique de l'eau, & y produisent différens changemens, suivant les différentes matières qu'on y mêle. C'est d'après ces principes que M. Guindant a examiné les eaux de la Loire.

Cette eau a été scrupuleusement pesée & comparée aux eaux reconnues les plus salubres, & M. Guindant l'a trouvée plus légère; mêlée avec le sirop de violettes, elle n'a point altéré sa

couleur; d'où il suit qu'elle ne contient aucun acide ni aucun alkali libre ; la dissolution de mercure par l'acide nitreux, ni l'alkali du tartre n'en ont point troublé la transparence, & n'y ont occasionné aucun précipité ; ce qui seroit arrivé si elle avoit contenu quelque matière séléniteuse en quantité sensible.

M. Guindant en a fait évaporer 25 pintes, qui ont été réduites à quatre onces, d'une liqueur trouble qui a laissé sur le filtre 8 grains de terre calcaire jaunâtre : la liqueur filtrée étoit très-claire ; & évaporée jusqu'à siccité, elle a laissé dans la capsule de verre 24 grains d'une matière saline, sur laquelle on a versé 2 onces d'eau distillée qui est devenue louche ; traitée avec la dissolution de mercure par l'acide nitreux, elle a donné un précipité blanc ; & y ayant versé de l'acide vitriolique, il s'en est élevé des vapeurs blanches qui avoient une odeur de safran, d'où il résultoit que l'acide marin étoit le principe constituant de cette matière saline qu'avoit donnée l'eau de la Loire. M. Guindant soupçonnant que ce sel pourroit bien être à base terreuse, il mêla dans la dissolution de l'huile de tartre, il s'en sépara en effet une terre calcaire, & le reste mis à évaporer donna des cristaux cubiques, preuve non équivoque de la présence du sel marin.

Il résulte de cet examen, que l'eau de la Loire ne contient qu'environ un grain de sel marin & environ un tiers de grain d'une terre calcaire jaunâtre libre, mais qui n'est que mêlée à l'eau, sans entrer dans la composition d'aucune matière saline qui puisse l'y unir.

Cette eau est d'ailleurs, selon M. Guindant, très-légère & très-claire, sans goût & sans odeur ; elle dissout très-bien le savon, & blanchit parfaitement le linge ; on en fait de très-bonne bière & de très-bon pain ; elle n'est pas moins propre à faire d'excellent mortier ; en un mot, il ne lui manque aucune des qualités qui peuvent rendre une eau salubre & excellente.

Au sud & à très-peu de distance d'Orléans, coule une rivière nommée *le Loiret*, qui prend sa source à une lieue environ au-dessus de cette ville, & va se jeter dans la Loire à deux lieues au-dessous : cette rivière nourrit une très-grande quantité de poissons & de plantes, & elle ne gèle jamais, propriété commune à

presque toutes les eaux souterraines; ses eaux sont à peu près dormantes & n'ont qu'un mouvement insensible ou du moins très-lent: elles sont transparentes & verdâtres; elles n'altèrent point la couleur du sirop de violettes; mêlées avec la dissolution du mercure par l'esprit de nitre, elles deviennent laiteuses, & déposent un précipité jaune qui y décèle l'acide vitriolique; en un mot, il résulte de l'examen qu'en ont fait M.rs Guindant & Prozet, que vingt-cinq pintes de l'eau du Loiret, contiennent 12 grains de sel marin, 3 gros d'une liqueur incristallisable qui, étant desséchée, a donné 48 grains de substance saline mucilagineuse & 74 grains de dépôt terreux, dont 18 étoient de la sélénite, & les 56 autres de la terre martiale calcaire.

Ces observations, jointes à la pesanteur de cette eau, à son mauvais goût, à son peu de mouvement, au lit bourbeux où elle coule & à la quantité de plantes & de poissons qu'elle contient, ont paru, avec raison, suffisantes pour condamner absolument l'usage de cette eau.

La troisième partie de l'Ouvrage de M.rs Guindant & Prozet a pour objet l'examen de l'eau des puits d'Orléans: on se plaignoit depuis long-temps de la mauvaise qualité de ces eaux; & en effet, comme l'observe avec raison M. Guindant, une rivière qui coule sur un beau sable ou sur une terre vitrifiable, peut fournir des eaux très-pures & très-salubres, tandis que les puits ne peuvent fournir que des eaux qui séjournent sur de la marne ou de la glaise, & qui se chargent de ces substances étrangères, celles d'Orléans nommément étant dans ce cas, puisqu'elles ne viennent que de la Beauce.

Il auroit été trop long d'examiner l'un après l'autre tous les puits d'Orléans, M.rs Prozet & Guindant prirent le parti de diviser la ville en quatre quartiers; savoir, celui de l'Hôpital général, celui de l'Hôtel-dieu, celui de l'hôpital Saint-Louis & celui de la Prison.

Les eaux des puits de chacun de ces quartiers furent soumises aux mêmes épreuves que celles de la Loire, & voici quel en fut le résultat.

Les eaux des puits de l'Hôpital, donnèrent par pinte 4 grains $\frac{1}{2}$

de terre calcaire, preſque 3 grains $\frac{1}{3}$ de ſélénite, un tiers de grain de ſel de Glauber, & environ 3 grains d'eau-mère.

Les eaux des puits du quartier de l'Hôtel-dieu, ont fourni par pinte, environ 4 grains $\frac{1}{3}$ de terre calcaire, 2 grains de ſélénite, $\frac{1}{4}$ de grain de ſel de Glauber & 3 grains d'eau-mère.

L'eau des puits de l'hôpital Saint-Louis, contenoit par pinte; environ 3 grains de terre calcaire, demi-grain de ſélénite, & un peu plus de 8 grains $\frac{1}{2}$ d'eau-mère.

Les eaux du puits de la Priſon ont donné, par pinte, plus d'un grain $\frac{1}{2}$ de terre calcaire, plus d'un demi-grain de ſélénite, & près de 6 grains d'eau-mère.

A ces produits de l'analyſe chimique, M. Guindant ajoute les obſervations ſuivantes.

Toutes ces eaux ſont beaucoup plus peſantes que celle de la Loire: elles ont une ſaveur dure & âcre; le ſavon ne s'y diſſout qu'imparfaitement, le linge s'y blanchit mal, & les légumes n'y cuiſent qu'avec beaucoup de temps.

De toutes ces obſervations, M. Guindant croit pouvoir légitimement conclure, que la plupart des maladies auxquelles les habitans d'Orléans ſont ſujets, ne peuvent être attribuées qu'à l'uſage qu'ils font de ces eaux de puits; ne pouvant être attribuées ni à l'air dont la pureté & la ſalubrité ſont reconnues, ni aux alimens dont ils uſent, qu'on peut mettre au nombre des meilleurs.

Les expériences chimiques de Mrs Guindant & Prozet ont paru parfaitement bien faites & très-exactes; & ce Mémoire a été trouvé plein de vues très-utiles, dirigées par une bonne phyſique: l'Académie a cru devoir des éloges à leur zèle, & elle croit qu'il ſeroit à deſirer que les Citoyens d'Orléans euſſent une entière connoiſſance de ce travail, qu'ils en ſentiſſent tout le prix, & qu'ils ſe déterminaſſent en conſéquence à abandonner l'uſage de l'eau de leurs puits qui nuit à leur ſanté, & à adopter celui des eaux de la Loire, dont les obſervations de Mrs Guindant & Prozet prouvent la bonté & la ſalubrité.



BOTANIQUE.

SUR LE CHANGEMENT DES ESPECES DANS LES PLANTES.

UNE Obfervation de feu M. Marchant, rapportée dans l'Hiftoire de l'Académie de 1719 * a donné lieu à la queftion qui fait l'objet de ce Mémoire, dans lequel M. Adanfon recherche fi les efpèces font conftantes, ou fi par la communication de pouffières féminales étrangères à une plante, il peut fe former de nouvelles efpèces qui fe reproduifent conftamment fous la même forme. V. les Mém. p. 31. * Voy. Hift. 1719, p. 57.

La plante qui avoit fait le fujet de l'obfervation de M. Marchant étoit une efpèce de mercuriale qui vint d'elle-même dans fon jardin au mois de Juillet 1715, & qui avoit les feuilles comme des filets; il la trouva affez différente de la mercuriale ordinaire pour lui donner un nom nouveau, & la nomma *Mercurialis foliis capillaceis.* Au mois d'Avril fuivant, cette plante reparut dans le même endroit, avec une autre efpèce de mercuriale à feuilles, profondément dentelées, qu'il nomma *Mercurialis foliis in varias & inæquales lacinias quafi dilaceratis.*

De cette obfervation de M. Marchant, il fembloit qu'on pouvoit inférer qu'il fe pouvoit produire de nouvelles efpèces, & que les Anciens n'avoient pas eu tort de n'en décrire qu'un fi petit nombre; les autres, que nous obfervons aujourd'hui en fi grande quantité, ayant été produites depuis eux, & n'exiftant pas de leur temps.

Ces plantes de M. Marchant ne durèrent que quelques années, & il n'en fut plus queftion jufqu'en 1744 que M. Linnæus, qui avoit jufque-là regardé les efpèces comme conftantes, commença à douter de cette conftance, & même à croire qu'il s'en pouvoit produire de nouvelles; & voici ce qui donna lieu à ce changement.

En 1742, M. Ziobeŕg herborisant dans une île située en mer à environ sept milles d'Upsal, trouva dans un terrein graveleux tout couvert de linaire, une plante assez semblable à la linaire commune, mais qui en différoit assez considérablement dans ses fleurs, pour constituer, selon M. Linnæus, une nouvelle espèce qu'il imagina provenir de la fécondation d'une linaire ordinaire par une autre plante qu'on croit être la jusquiame ou le tabac, M. Linné lui a donné le nom de *peloria*, & il présume qu'elle sera constante.

M. Linné cite une autre métamorphose du même genre, qui arrive tous les ans dans le jardin d'Upsal, où les graines du chardon ordinaire à tête velue, lui ont donné le chardon à têtes velues & rassemblées des Pyrénées; il ignore si cette variation provient des semences même de la plante ou de la fécondation de ces mêmes semences, faite par les poussières d'une autre plante.

Il rapporte encore une transformation de cette espèce; la grande & la petite verveine d'Amérique ont produit une nouvelle espèce de verveine semblable, pour les feuilles, à la verveine d'Europe, & pour toutes les autres parties à la grande verveine d'Amérique. M. Gmélin parle encore d'une plante de la linaire à feuilles rondes, qu'on nomme pour cette raison *nummulaire*, qui avoit porté une fleur toute semblable à la *peloria* de M. Linnæus: il ajoute même encore que le pied d'allouette de Sibérie, nommé *Delphinium*, dont il n'avoit trouvé dans ce pays que deux espèces avoit produit dans son jardin de Péterſbourg jusqu'à six espèces de cette plante, qui différoient, par la grandeur de leurs fleurs, par la couleur, le port & la découpure plus ou moins profonde de leurs feuilles, & qu'il croyoit provenir du mélange des deux premières espèces primitives qu'il y avoit apportées. M. Von-Linné lui-même a prétendu, en parlant des plantes de cette espèce, que la pimprenelle-aigremoine qui s'est reproduite de graine à Upsal pendant plusieurs années, est venue de la pimprenelle commune fécondée par les poussières de l'aigremoine, & qu'un grand nombre de plantes qu'il cite ont une pareille origine; & il conclut, de toutes ces observations, que tous les genres de plantes ne sont autre chose que des plantes nées d'une même mère & de pères différens, & que c'est un nouveau

nouveau champ ouvert aux Botaniſtes pour tenter de multiplier les eſpèces par de pareils mélanges.

M. Adanſon avoit d'abord adopté le même ſentiment, d'après les obſervations de M. Linnæus; mais ayant eu occaſion d'élever non-ſeulement la pelore vivace de la linaire commune, envoyée par M. Linnæus, mais encore une pelore annuelle formée en 1762 au Jardin du Roi, de la linaire d'Eſpagne à feuilles menues, la mercuriale de M. Marchant, & pluſieurs autres plantes; il a cru devoir embraſſer un ſentiment contraire; & pour autoriſer ce changement, il reprend dans ſon Mémoire tous les faits qui ont ſervi de fondement à l'opinion de M. Linnæus, deſquels il fait voir qu'on ne peut rien conclure en faveur de cette hypothèſe: eſſayons de rendre compte de ſes motifs.

La mercuriale de M. Marchant étoit diſparue en 1716; elle reparut pour la première fois en 1766, ſous les chaſſis du Jardin du Roi; & M. de Juſſieu la confia à M. Adanſon, pour ſuivre les expériences qu'il méditoit ſur ce ſujet.

On étoit pour lors au 11 Juin, & la plante étoit en pleine fleur; M. Adanſon la reconnut pour un individu mâle, ſes feuilles reſſembloient à celles d'un réſéda rongées des inſectes, ſans cependant en avoir éprouvé aucune atteinte; mais les antères ou ſommités des étamines, étoient trois fois plus petites qu'à l'ordinaire, ſphériques, &, autant qu'il fut poſſible d'en juger, abſolument vides de pouſſière ſéminale.

Il étoit aiſé de voir ſi cette plante étoit capable de ſe reproduire, ou ſi ce n'étoit qu'une variété monſtrueuſe: M. Adanſon n'y manqua pas; pour cela il plaça, ſur une des couches de ſa melonnière, dix pieds de mercuriale femelle, au-deſſous de la mercuriale mâle en queſtion; &, trois ou quatre fois par jour, il ſecouoit cette dernière ſur elles, pour que la pouſſière ſéminale, ſi elle en contenoit, pût les féconder; & afin d'ôter toute ambiguité, il avoit détruit tous les pieds de mercuriale qui avoient paru dans ſon jardin. Les graines des mercuriales femelles étant venues en maturité dès le 25 de Juillet, il en ſema une partie dont aucune ne leva, & le pied de mercuriale extraordinaire crut

jusqu'à 12 pouces de hauteur, & dura jusqu'aux premières gelées qui le firent périr.

Au printemps de l'année suivante, M. Adanson sema ce qui lui restoit de ses graines; il en leva environ un dixième, qui ne produisit que des mercuriales communes.

Nous avons dit que les feuilles de la mercuriale extraordinaire, ressembloient à celles du réséda: d'après l'idée de M. Linnæus, il essaya de féconder des mercuriales femelles avec les poussières du réséda & par celles du chanvre mâle; mais toutes les graines provenues de ces mélanges, n'ont encore donné que des mercuriales ordinaires.

Toutes ces expériences ont fait voir à M. Adanson, que la fécondation n'a pas lieu par le secours des poussières étrangères quand les plantes sont de familles différentes; & que le peu de graines de ses mercuriales qui ont germé, malgré la scrupuleuse attention qu'il avoit apportée à détruire tous les mâles de cette espèce qui avoient paru dans son jardin, avoient été fécondées par quelques poussières de mercuriale mâle que le vent avoit apportées du dehors, & que cette mercuriale à feuilles déchiquetées, de même que celles de M. Marchant, ne sont que des individus monstrueux ou des mulets viciés dans leurs tiges, dans leurs fleurs & dans les parties de la génération, & non pas de nouvelles espèces.

La pelore que M. Linnæus cite, comme se reproduisant de graines, ne prouve pas davantage en faveur de la production de nouvelles espèces: la linaire vivace ordinaire qu'il a envoyée & la linaire annuelle d'Espagne, ont donné tantôt quelques fleurs pelores, mêlées avec des fleurs naturelles sur le même pied, tantôt tous les pieds sont à fleurs naturelles, tantôt ils sont à fleurs pelores, mais toujours les fleurs pelores ont été stériles: les seules fleurs naturelles ont produit des graines fécondes; ces plantes extraordinaires doivent donc être regardées comme des demi-mulets dans lesquels les organes de la génération sont constamment viciés.

Ces faits sont cependant les seuls authentiques que produise M. Linnæus pour appuyer son opinion; les autres que lui &

M. Gmelin citent ſur les plantes qu'ils nomment *hybrides* ou *bâtardes,* n'ont pas été obſervés avec autant d'attention & ne paroiſſent être que des eſpèces de conjectures, fondées ſur les deux premiers faits de la mercuriale & de la pelore; & comment pourroit-on ſe fier à des conjectures, tandis que deux faits bien plus poſitifs & bien mieux circonſtanciés, deſquels M. Linnæus n'avoit eu probablement aucune connoiſſance, ne prouvent cependant rien en faveur de ſon opinion?

Le premier de ces faits regarde le fraiſier commun; la graine de ce fraiſier a donné en 1763, un fraiſier dont les feuilles ſont ſimples; c'eſt-à-dire, qu'au lieu de trois feuilles, ou pour mieux dire de trois lobes ſur chaque tige, il n'en paroît qu'un, & les graines de celui-ci ont produit des pieds à une feuille, d'autres à trois, & d'autres enfin qui ont des unes & des autres mêlées enſemble; ce fraiſier ſe multiplie plus conſtamment par ſes fouets ou bourgeons qui repréſentent aſſez ordinairement les individus dont ils ſont ſortis: on a cru pouvoir partir de-là pour donner à ce fraiſier le nom de nouvelle race: on a même été plus loin, en ſuppoſant que les diverſes eſpèces de fraiſiers connus ſont des races venues toutes d'une même eſpèce primitive par des mélanges de fécondation. Cependant M. Adanſon penſe que ce fraiſier à une feuille n'eſt pas une race ou eſpèce particulière, puiſqu'il n'eſt pas conſtant dans ſa multiplication par graines; & en ſecond lieu, parce qu'en examinant de près ces feuilles uniques, on y retrouve des veſtiges des deux feuilles qui manquent, & une biſurcation dans la principale nervure qui indique que les trois feuilles ſe ſont réunies en une; d'où il ſuit que ce fraiſier n'eſt pas même une variété, mais ſeulement une monſtruoſité par défaut, tandis que la fleur a plus de parties qu'elle n'en devroit avoir, & eſt monſtrueuſe par excès; on peut, ſelon lui, comparer ce fraiſier aux animaux monſtrueux qui ont quelques parties doubles, & d'autres au contraire réunies en une ſeule.

Pour faire voir avec quelle circonſpection on doit porter ſon jugement en pareille matière, M. Adanſon rappelle l'orge quarré, provenu du ſucrion qu'il a obſervé en 1762; cet orge qui, comme on ſait, a deux rangs de grain à chaque épi, a produit

quelques épis à quatre rangs; ces grains recueillis avec ſoin ont donné pendant ſix ans quelques épis quarrés, & au bout de ce temps ont perdu tout-à-coup cette propriété, pour rentrer dans leur état naturel: nous avons rendu compte de cette obſervation en 1764 [a] & en 1765 [b].

[a] Voy. Hiſt. 1764, p. 77.

[b] Voy. Hiſt. 1765, p. 50.

La plante qui mériteroit mieux qu'aucune autre le nom d'eſpèce, ſeroit ſans doute l'eſpèce de blé qu'on nomme *blé de miracle;* cependant ce n'eſt qu'une monſtruoſité par excès; M. Adanſon s'eſt aſſuré, par des expériences ſuivies, qu'en le ſemant dans une terre trop maigre ou trop sèche, il dégénère peu à peu, & rentre dans l'eſpèce originaire dont il eſt ſorti, qui eſt celle qu'on nomme *groſſet,* & qu'on cultive dans les provinces méridionales du royaume.

M. Adanſon ſe croit donc autoriſé à rejeter abſolument la production de nouvelles eſpèces; il demeure d'accord que par le ſecours de fécondations étrangères, qui cependant ne peuvent avoir lieu qu'entre des individus de la même eſpèce, ou entre des eſpèces peu différentes, on peut obtenir des variations & des monſtruoſités ſingulières, mais qui ne ſeront pas des changemens d'eſpèce; ces changemens ne ſe peuvent guère opérer que dans les plantes, il eſt très-difficile d'en opérer de pareils ſur les arbres; la longueur du temps néceſſaire pour voir l'effet des fécondations étrangères, & l'aſſiduité qu'exigent des obſervations de cette eſpèce ont empêché juſqu'ici qu'on ait pu s'en aſſurer.

On ne doit pas au reſte s'étonner que l'art & même le haſard aient produit de pareils phénomènes: la culture, le terrein & ſur-tout le climat, opèrent journellement des changemens encore plus ſurprenans & qui feroient même méconnoître ces plantes par des Botaniſtes peu exercés: le tabac, le ricin ou *palma chriſti,* qui ſont ici au rang des plantes annuelles, forment en Afrique des arbriſſeaux vivaces. M. Adanſon même eſt parvenu à faire paſſer deux hivers à des plantes de tabac; mais ces changemens, quelques grands qu'ils ſoient, ne ſont pas pour cela des changemens d'eſpèces.

Il ſuit de tout ce que nous venons de dire, que tous les exemples allégués pour preuve du changement dans les eſpèces

ou la production de nouvelles races, ne sont que des variations ou des monstruosités; que l'examen de ces changemens exige l'attention la plus scrupuleuse; & qu'enfin il paroît que la transmutation des espèces n'a pas plus lieu dans les plantes que dans les animaux. Les écarts même de la Nature ne lui sont permis que dans certaines bornes au-delà desquelles tout rentre dans l'ordre établi par la sagesse du Créateur; c'est par cette judicieuse réflexion que M. Adanson termine son Mémoire.

OBSERVATIONS DE BOTANIQUE.

I.

ON n'est que trop instruit de la maladie nommée *ergot*, qui affecte quelquefois le seigle, & des suites funestes de l'usage de ces grains viciés; l'Académie en a rendu compte en plus d'un endroit de son Histoire *, mais on étoit communément persuadé que cette espèce de maladie n'attaquoit que le seigle. Le Père Cotte, de l'Oratoire, Correspondant de l'Académie, a trouvé cette année 1769, aux environs de Montmorency, dix épis de froment dont presque tous les grains étoient ergotés; les moissonneurs l'ont assuré qu'ils en avoient remarqué beaucoup d'autres. M. Royer, savant Botaniste & ami du Père Cotte, lui a dit plusieurs fois que dans les différens cantons où l'avoient conduit ses herborisations, il avoit trouvé beaucoup de fromens ergotés; & l'Historien de l'Académie peut certifier qu'il en a recueilli lui-même, en 1749, une assez grande quantité dans un champ de blé barbu près de Bayeux.

* *Voy. Hist.* 1710, p. 61; & Mém. 1748, p. 528.

II.

Le Bambou, le plus grand des roseaux connus, croît naturellement dans l'Inde & dans l'Afrique; on croit qu'il a été transporté dans les îles du vent de l'Amérique, par l'escadre de M. de Bompart en 1759, & il y a prodigieusement multiplié; le terrein le plus propre au bambou, comme à tous les autres roseaux, est un sol léger & frais, comme les bords des rivières; il se multiplie

de boutures, chaque nœud portant le germe de la racine & des jets. Cette plante exige les plus fortes chaleurs; mais pendant leur durée, sa végétation est étonnante; chaque brin, gros comme le bras ou la jambe, s'élevant, dans l'espace de quelques mois, jusqu'à 40 ou 50 pieds de hauteur, suivant la qualité du terrein. Lorsque les souches sont suffisamment espacées, elles peuvent produire jusqu'à cent jets & plus; ces souches ne portent des brins de cette force que lorsqu'elles sont bien formées, c'est-à-dire de deux ou trois ans, & il n'en sort jamais du même endroit où on en a coupé, mais à côté : le bambou ayant en sortant toute la grosseur dont il est susceptible, & s'élevant si rapidement à sa hauteur, le reste de sa végétation est employé à remplir l'intérieur des tiges & à pousser les feuilles qui ne paroissent qu'alors, & dont les animaux sont très-friands: le développement de ces feuilles se fait successivement en descendant, & elles partent de chaque nœud dont il sort diverses branches lorsque le bambou est mûr, c'est-à-dire depuis trois jusqu'à six ans, suivant sa grosseur. On reconnoît sa maturité à la couleur de jaune-orangé que prennent ses feuilles & le corps du roseau, pour lors il est très-dur; son écorce serrée & très-polie le défend des impressions de l'eau & du Soleil, & il est alors très-solide, l'intérieur en étant presqu'entièrement rempli.

Ce roseau est d'un usage infini dans les Colonies; on en fait des pieux pour entourer les champs, & il arrive souvent que ces espèces de haies deviennent vivantes, les pieux prenant quelquefois racines; on en fait des chevrons, des sablières & des faîtages pour les cases à Nègres; en le refendant, il donne de la latte, du cercle & du clissage pour ces cases: en un mot, on peut dire que cette production est une des plus utiles qui ait été transportée aux îles. Tout ce détail est tiré d'une lettre de M. Dubuisson, habitant de Saint-Domingue, à M. de Bory, qui l'a communiquée à l'Académie.

CETTE année, M. Sieuve, de Marſeille, préſenta à l'Académie un Ouvrage *ſur les moyens de garantir les Olives de la piqûre des Inſectes, & ſur une nouvelle méthode d'en extraire une huile plus abondante & plus fine, par le moyen d'un moulin de ſon invention, avec la manière de la garantir de toute rancíſſure.*

L'Ouvrage de M. Sieuve eſt diviſé en trois parties; dans la première, il indique les différentes eſpèces d'olives, les accidens auxquels elles peuvent être ſujettes, & les moyens de les prévenir.

On cultive en Provence, ſix eſpèces différentes d'olives, M. Sieuve examine les avantages & les déſavantages de ces différentes eſpèces, ſoit par rapport à la quantité d'huile, ſoit eu égard à ſa qualité plus ou moins parfaite, c'eſt à raiſon du peu d'huile que fourniſſent les olives d'une certaine eſpèce qu'on réſerve les plus belles de cette eſpèce pour les ſaler, & ce ſont ces olives qu'on nous apporte en baril, & qu'on nomme *picholines*, nom qui leur vient de celui de Picholini, qui a inventé la manière de les apprêter, & non, comme bien des gens le prétendent, de ce qu'elles ſont plus petites que quelques autres eſpèces d'olives, ce qui ſoit dit en paſſant.

La ſéchereſſe ou les pluies exceſſives nuiſent beaucoup aux olives, mais l'ennemi le plus redoutable qu'elles aient eſt un petit ver qui s'inſinue au dedans du fruit, & en mange ſi bien la ſubſtance, que ſouvent il laiſſe le noyau à ſec; la perte que cauſe cet inſecte eſt immenſe, M. Sieuve prouve dans ſon Ouvrage qu'elle eſt ſouvent de la moitié de l'huile qu'on auroit recueillie.

On peut bien juger qu'il n'a pas négligé d'examiner un ennemi ſi terrible; il a découvert qu'il venoit d'une mouche aſſez petite, d'une couleur à peu près ſemblable à celle d'une jeune abeille: cette mouche pond ſes œufs dans les gerçures du tronc des oliviers; ils écloſent peu de mois après, commencent à grimper aux branches de l'arbre dont ils rongent d'abord les feuilles, & s'établiſſent enfin dans le fruit qu'ils détruiſent, & dans lequel ils ſubiſſent leur métamorphoſe. Nous ne pouvons entrer ici dans le curieux détail de toutes les opérations de cet animal, qu'a ſuivi

M. Sieuve ſur des vers de cette eſpèce qu'il avoit fait éclore dans ſon cabinet : cet article doit être lû dans ſon Ouvrage.

Ce ver a cependant des ennemis parmi les inſectes, les fourmis en ſont fort friandes & en détruiſent beaucoup; mais elles en laiſſeroient encore beaucoup trop pour les propriétaires des oliviers, ſi M. Sieuve n'avoit trouvé un moyen de garantir les olives de leurs atteintes. Nous avons dit que les mouches deſquelles naiſſent ces vers, dépoſoient leurs œufs dans les gerçures du tronc de l'olivier, & que de-là ils s'élevoient, en rampant, juſqu'aux branches, aux feuilles & aux fruits où ils faiſoient leurs ravages : on peut donc anéantir ce ravage, en empêchant ce ver de pouvoir parvenir aux branches, & c'eſt ce qu'opère M. Sieuve, au moyen d'une eſpèce de goudron de ſa compoſition, avec lequel il fait au haut du tronc un collier de la largeur de ſix doigts, ce collier devient pour les vers un obſtacle inſurmontable; & l'expérience lui a fait voir qu'en effet aucun des arbres qui avoient eu ce préſervatif, n'avoit eu d'olives attaquées par les vers; tandis que ceux du même plant, qui n'avoient pas eu ce ſecours, avoient une grande partie de leurs fruits détruits ou altérés par ces inſectes.

La ſeconde partie de l'ouvrage de M. Sieuve, a pour objet de déterminer le temps auquel on doit cueillir les olives, les précautions néceſſaires pour en extraire l'huile & la manière de la conſerver.

Les olives ſont, ſelon M. Sieuve, en état de fournir la meilleure huile lorſqu'elles ont acquis une couleur rouge noirâtre, & conſervent encore une certaine conſiſtance; c'eſt dans ce temps qu'elles doivent être cueillies, ſi on en excepte cependant celles du plant ſauvage qu'on peut ſans riſque cueillir un peu avant leur maturité.

Mais ce qu'il recommande le plus expreſſément, eſt de n'employer que la chair de l'olive à faire de l'huile : celle-ci eſt parfaite; & des expériences ſuivies, lui ont appris qu'elle ſe conſerve pluſieurs années, au lieu que celle qu'on tire du bois ou de l'amande du noyau, ou même de l'olive entière broyée à la manière ordinaire, eſt toujours inférieure & ſujette à ſe rancir.

Ce ne ſeroit rien que d'obtenir d'excellente huile, ſi l'on n'avoit

n'avoit encore l'art de la conſerver. M. Sieuve prouve, par pluſieurs expériences délicates, que l'huile peut s'évaporer, & que cette évaporation peut la détériorer : il juge donc à propos de l'enfermer dans des vaſes très-exactement bouchés; les meilleurs bouchons de liége ne ſuffiſent pas, il faut qu'ils ſoient recouverts de cire; & pour la mettre entièrement à l'abri de toute altération, il y enferme un morceau d'éponge préparée: l'Académie n'a pu prononcer ſur ce préſervatif dont l'Auteur s'eſt réſervé le ſecret.

Nous avons dit que M. Sieuve preſcrivoit de n'employer que la chair des olives pour faire l'huile: ce triage ſeroit long, difficile & diſpendieux, avec les moulins ordinaires; mais il devient extrêmement facile avec un moulin tout nouveau qu'il a inventé, & dont la deſcription forme la troiſième & dernière partie de ſon Ouvrage.

Ce moulin, duquel nous ne pouvons donner ici que la plus légère idée & qui eſt très-bien décrit dans l'Ouvrage de M. Sieuve, ne reſſemble, en aucune façon, à tous ceux dont on a communément connoiſſance; il conſiſte en une grande caiſſe oblongue, traverſée vers le milieu de ſa hauteur par une table toute coupée de cannelures tranſverſales, au fond deſquelles ſont percés des trous en grand nombre pour permettre à l'huile de s'écouler dans le fond de la caiſſe: au-deſſus de cette table, eſt ſuſpendu à quatre cordons un morceau de bois peſant, ayant des cannelures toutes pareilles; ce morceau de bois peut s'approcher, ou s'éloigner à volonté, de la table cannelée; & comme il eſt plus court que la caiſſe, on le peut faire aller & venir ſuivant ſa longueur, au moyen d'une poignée qui y eſt attachée; & à l'autre bout, il y a une pièce qui, à chaque mouvement, permet aux olives de tomber, de la trémie où on les met, entre les cannelures de la table & de la pièce mobile, qu'il nomme *détritoir;* c'eſt-là qu'elles ſont écraſées, ſans que les noyaux puiſſent l'être, parce qu'on a ſoin d'écarter ſuffiſamment les deux pièces; l'huile paſſe par les trous qui ſont au fond des cannelures de la table, & tombe au fond de la caiſſe, qui eſt terminée par un entonnoir de bois, garni d'une chauſſe, à travers laquelle l'huile coule nette dans le baquet deſtiné à la recevoir; le marc & les noyaux

restés sur la table cannelée, en sont tirés avec une espèce de rable & traités à l'ordinaire, pour en tirer une huile moins parfaite que la première, qui, comme on voit, n'est tirée que de la seule chair des olives.

Telle est, mais dans un très-grand abrégé, la construction du moulin de M. Sieuve, au moyen duquel il parvient à exécuter parfaitement ce qu'il propose ; c'est par cette description qu'il termine son Ouvrage, dont l'objet est trop intéressant pour ne pas mériter toute l'attention du Public : l'examen qu'en a fait l'Académie, l'a convaincue que les expériences de l'Auteur étoient choisies avec intelligence & très-multipliées, que les choses y paroissoient vues avec attention, sans précipitation, & toujours assurées par de longues épreuves; que tout y annonçoit un Observateur zélé qui a dirigé constamment ses vues sur un objet utile, & qu'on a tout lieu de présumer que cet Ouvrage sera favorablement reçu du Public.



GEOMÉTRIE.

SUR LA NATURE DES SUITES INFINIES.

RIEN ne fait peut-être plus d'honneur à l'eſprit humain, que l'art de repréſenter, ſous des ſymboles numériques ou arbitraires, les différentes quantités dont on veut obtenir les dimenſions ou les rapports, & de ſoumettre au calcul les choſes qui en paroiſſent le moins ſuſceptibles. V. les Mém. p. 193.

Dans le nombre de ces quantités, il s'en eſt trouvé qui ſe ſont, pour ainſi dire, laiſſé volontairement ſubjuguer, & que l'Arithmétique ni l'Algèbre n'ont eu aucune peine à ſoumettre à leurs loix; mais d'autres ont fait réſiſtance, & il a fallu que l'art ſoit en cette occaſion, comme en bien d'autres, venu au ſecours de la Nature; tâchons de préſenter plus clairement cette idée.

L'Arithmétique a des expreſſions très-formelles pour les quantités rationnelles; elle peut exprimer tous les nombres déterminés ou déterminables; elle peut par conſéquent donner la racine quarrée de tout nombre quarré, & trouver par exemple que 9 eſt la racine quarrée de 81, & 8 celle de 64; mais elle ne peut ni exprimer ni déterminer la racine quarrée de tous les nombres qui ſe trouvent entre 64 & 81, qui cependant eſt évidemment compriſe entre 8 & 9, la fraction qui s'y trouve néceſſairement, & dont la multiplication produiroit une fraction plus petite, y apporte un obſtacle invincible. Mais ſi cet obſtacle empêche une détermination exacte de la quantité cherchée, l'art & l'adreſſe des Calculateurs ont trouvé le moyen d'en approcher auſſi près que l'on voudra; éclairciſſons ceci par un exemple.

Nous ne pouvons avoir aucune idée diſtincte de la racine quarrée de 2, qui doit cependant ſe trouver entre 1, racine quarrée de lui-même, & 2; ſi l'on veut prendre 1 pour racine quarrée, on verra d'abord qu'elle ſera trop petite; ſi l'on prend $1\frac{1}{2}$,

elle ſera trop grande, ſi on en ôte $\frac{1}{8}^e$, on verra qu'on en aura trop ôté; ſi on y ajoute enſuite $\frac{1}{16}^e$, elle ſe trouvera trop forte, ſans qu'on puiſſe parvenir, par ce moyen, qu'à diminuer l'erreur, ſans jamais l'épuiſer, du moins dans les cas que nous avons ſuppoſés, puiſque ſi on l'épuiſoit, on parviendroit à trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, donneroit 2 pour ſon produit, ce qui eſt manifeſtement impoſſible, cet arrangement de termes ayant alternativement plus & moins eſt ce qu'on nomme *une ſuite.*

Nous avons dit que les nombres irrationnels ne pouvoient être exprimés que par des ſuites qui donnoient moyen d'en approcher toujours, ſans jamais y atteindre; mais l'uſage des ſuites ne ſe borne pas là; les nombres rationnels même peuvent s'exprimer par des ſuites; la ſeule différence qu'il y a, eſt que ces ſuites ſe peuvent quelquefois ſommer, au lieu que celles des nombres irrationnels ſont eſſentiellement inſommables, ces nombres ne pouvant par leur nature avoir d'expreſſion finie, & exprimable en nombres.

Quelquefois ces ſuites ne ſont pas compoſées de termes alternativement affectés des figures + & —, il y en a qui ne vont que par additions & d'autres par ſouſtractions; mais de quelqu'eſpèce qu'elles ſoient, comme elles ne repréſentent jamais qu'une grandeur finie, leurs termes doivent toujours aller en décroiſſant, & le grand art eſt même de les faire décroître aſſez rapidement, afin qu'étant une fois parvenues à un petit nombre de termes, le reſte ſe puiſſe négliger ſans riſque.

Comme dans le nombre des ſuites, il y en a qui peuvent repréſenter des nombres rationnels & déterminables, il ſeroit aſſez naturel de penſer que toutes ces ſuites ſeroient ſommables, ce qui ne ſeroit pas exactement vrai; un nombre rationnel peut être exprimé par une ſuite qui ne ſe laiſſera pas ſommer : d'autres conſervent exactement le caractère de ſuites infinies, mais après un certain nombre de termes, tous les autres parviennent à ſe détruire & deviennent égaux à o; d'où il ſuit qu'elles n'ont qu'une apparence d'infini ſans en avoir la réalité; ſouvent la même grandeur ſe pourra exprimer par deux ſuites, dont l'une ſera ſommable, & l'autre ne ſe pourra ſommer : c'eſt au Calculateur

habile à reconnoître toutes ces circonſtances & à ſavoir en profiter.

Nous n'avons jusqu'ici parlé que des ſuites numériques qui n'ont que la quantité diſcrète pour objet; mais la Géométrie qui s'occupe de la quantité continue, a auſſi les ſiennes, & l'Algèbre qui ſoumet à ſon calcul l'une & l'autre quantité, doit avoir auſſi cette même forme d'exprimer les quantités qui ſe refuſent à ſes règles ordinaires & qui ne peuvent s'exprimer autrement, elles y ſont même bien plus fréquentes & bien plus diverſifiées par la nature & par l'expreſſion des quantités qu'on y fait entrer; nous avons cru ce préliminaire néceſſaire pour faciliter au Lecteur l'intelligence du travail de M. le Marquis de Condorcet, en préſentant une idée des principes métaphyſiques ſur leſquels toute la théorie des ſuites eſt fondée.

Nous avons dit que les ſuites algébriques étoient bien plus diverſifiées que les ſuites numériques; celles-ci n'admettent que les nombres poſitifs ou négatifs & leurs fractions, mais les ſuites algébriques admettent les radicaux, les coëfficiens & les expoſans qui ne peuvent trouver place dans les ſuites numériques; ſouvent même ce ſont ces quantités qui déterminent la marche de ces ſuites.

Puiſque la ſomme infinie des termes qui compoſent la ſuite; ne repréſente que la fonction même qui a été réduite ſous cette forme, il eſt clair que ſi l'on prend l'expreſſion analytique de la ſomme des termes de cette ſuite, juſqu'à un certain terme marqué, cette ſomme repréſentera la première fonction qui a donné lieu à la ſuite, moins les termes laiſſés qui peuvent être regardés comme formés par une autre fonction affectée des coëfficiens & des expoſans qui conſtituent la loi de la ſuite.

Le terme auquel on coupe, pour ainſi dire, la ſérie, n'eſt pas arbitraire; & pour peu qu'on y faſſe attention, on verra que ſouvent en rendant le nombre de termes qui le précèdent, plus grand que tout nombre donné, ce qui reſte au-delà n'eſt plus compoſé que d'infinimens petits; que par conſéquent la nouvelle fonction eſt, relativement à la première, regardée comme nulle, & qu'on a la véritable ſomme de la ſuite.

Si au contraire le nombre des termes où l'on coupe la ſuite eſt fini, on n'aura plus le même réſultat, la ſomme de la première partie ne repréſentera plus la totalité de la fonction qui l'avoit formée, & la nouvelle fonction qui doit ſervir à former le reſte de la ſuite, ne ſera plus un infiniment petit, mais une quantité finie: tout ceci fait voir qu'il y a des ſuites qu'on peut réduire plus ou moins facilement à une valeur déterminée, & d'autres encore plus rébelles qui ne s'y laiſſent jamais réduire.

Quelquefois ces ſuites rébelles ſe peuvent convertir en d'autres ſuites dont on peut plus aiſément obtenir la valeur, & pour lors les coëfficiens de la nouvelle ſuite ſeront donnés par une ſuite infinie; il eſt évident que cette nouvelle ſuite doit avoir une fonction génératrice, & voici comment M. le Marquis de Condorcet parvient à la trouver.

On peut dans cette recherche avoir pour but, ou de trouver la fonction génératrice de la ſuite, ou d'en déterminer la ſomme. Dans le premier cas, il faudra ſubſtituer à la ſuite qui repréſente les coëfficiens, non leur ſomme, mais leurs fonctions génératrices, & prendre enſuite la fonction génératrice de la nouvelle ſuite; & cette fonction génératrice de la ſuite des coëfficiens ſe trouve, en multipliant tous les termes par une quantité conſtante, élevée ſucceſſivement à toutes ſes puiſſances: ſi au contraire on cherchoit la ſomme d'une ſuite propoſée convertie en une nouvelle ſuite, on prendroit la ſomme de la ſuite des coëfficiens & celle de la ſuite nouvelle; mais de quelque manière qu'on puiſſe opérer, la fonction génératrice de l'une & la ſomme de l'autre, ne ſe pourront pas toujours prendre pour la ſuite même ou pour ſa ſomme; la méthode eſt ſujette à des reſtrictions que M. le Marquis de Condorcet ne manque pas d'indiquer; ce qui, au reſte, ne doit pas étonner: ſi la méthode étoit générale, il n'y auroit point de ſuite dont on ne pût avoir la valeur exacte, & il y en a certainement qui ne ſe laiſſent jamais réduire, & qui s'enfoncent ſi avant dans l'abyme de l'infini, que tout l'art de l'analyſe eſt inſuffiſant pour les en rappeler.

Juſqu'ici nous n'avons conſidéré les ſuites que comme compoſées de quantités, à la vérité, croiſſantes ou décroiſſantes à l'infini,

mais cependant finies, ou au moins toutes du même ordre ; ce n'eſt cependant pas là toute leur étendue, elles admettent les quantités différentielles, & font partie du calcul infiniteſimal.

Il étoit donc eſſentiel d'examiner la nature des ſuites qu'on peut employer dans ces deux cas différens ; & c'eſt-là l'objet du travail de M. le Marquis de Condorcet, duquel nous avons à parler.

Dans le cas où la ſérie repréſente une équation finie, il ſe trouve ſouvent que la ſérie préſente des valeurs non continues, quoique l'expreſſion réelle les donne continues ; ſi, par exemple, la ſérie repréſente une courbe, elle paroîtra donner des angles finis, au lieu des angles infiniment petits qui conſtituent la nature de la courbe. Voici comment on peut donner la raiſon de cette différence ; on n'eſt obligé eſſentiellement d'employer les ſuites, que lorſque la quantité qu'elles repréſentent n'a pas & ne peut pas avoir d'expreſſion réelle, on en approche par ce moyen auſſi près qu'on le veut ; mais ſouvent, & c'eſt le cas dont nous parlons, la ſérie ne repréſente pas toujours la quantité même que l'on cherche, mais une autre qui en diffère infiniment peu : dans l'hypothèſe préſente, la ſérie ne repréſente pas la courbe même, mais deux courbes paraboliques qui l'accompagnent & dont les ordonnées ſont repréſentées par les plus & les moins de la ſérie ; il n'eſt donc pas néceſſaire que ſes termes ſuivent la loi de continuité, il n'eſt queſtion que de voir ſi ces valeurs non continues repréſentent la grandeur réelle en ſon entier, il eſt indifférent qu'elles en diffèrent quant à l'expreſſion ; mais ſi une ſolution unique de cette eſpèce embraſſoit ſucceſſivement diverſes racines, il faudroit qu'elles euſſent une expreſſion commune, ſans quoi la ſolution ſeroit illuſoire : toutes ces reſtrictions n'ont pas lieu quand la ſérie eſt divergente, parce qu'en y ſubſtituant la fonction génératrice, la ſolution ſe trouve avoir d'elle-même l'étendue néceſſaire.

S'il étoit queſtion d'une ſuite qui repréſentât une équation différentielle aux différences ordinaires, il reſteroit des coëfficiens arbitraires en nombre égal à celui de l'ordre de l'équation, & un autre coëfficient donné par une équation d'un degré qui dépend de celui où les variables ſont élevées dans la propoſée. Mais cette

ſuite ne donnera aucun moyen de diſcerner ſi l'intégrale eſt algébrique ou non, & au lieu d'une courbe continue, mais tranſcendante qu'elle devroit donner, elle n'offre que des parties interrompues de courbes paraboliques, ſans offrir aucun moyen de reconnoître celles qu'on devroit choiſir. Il faut donc, pour employer une ſérie convergente à la ſolution d'une équation différentielle, lui ſuppoſer la forme la plus compliquée qu'elle puiſſe rigoureuſement avoir, & on peut s'attendre que plus la ſolution ſera compliquée, plus les inconvéniens ſe multiplieront, & plus il ſera néceſſaire de mettre en uſage toutes les reſſources de l'art pour vaincre la difficulté.

On conçoit aiſément que toutes ces règles avoient beſoin d'être éclaircies par des exemples; c'eſt auſſi ce qu'a fait M. le Marquis de Condorcet, par pluſieurs exemples choiſis avec ſoin, pour préſenter les différentes difficultés qui peuvent s'offrir dans la ſolution des Problèmes où l'on emploie les ſuites.

Il en réſulte que l'emploi des ſuites ne peut être avantageux que lorſque la forme que doit avoir l'équation eſt connue, du moins pour chaque cas particulier; que ſouvent le travail néceſſaire pour parvenir à connoître la fonction génératrice eſt plus long que celui qui pourroit donner une ſolution directe; qu'on ne doit employer les ſéries que dans les cas où elles peuvent abréger le calcul; & qu'on ne peut avoir de méthode vraiment générale pour la ſolution approchée, ſans en avoir pour la ſolution exacte. C'eſt encore ce que M. de Condorcet appuie de pluſieurs exemples, qui ſont, pour ainſi dire, toucher au doigt tout ce qu'il vient d'avancer.

M. de la Grange a donné, pour les équations différentielles, une méthode générale d'approximation; mais celle de M. de Condorcet eſt différente, & l'Auteur démontre comment elle eſt également bonne pour tous les degrés; elle réduit les Problèmes à la ſommation des ſuites récurrentes, ou à la recherche de fonctions rationnelles de quantités données; & c'eſt ce qui l'a engagé à terminer ce Mémoire par quelques réflexions ſur cette matière, au moyen deſquelles on peut toujours déterminer les cas dans leſquels

la ſuite

la ſuite propoſée peut être aiſément ſommée, & ceux où cette ſommation eſt impoſſible, ou du moins ſujette à trop de difficultés pour être entrepriſe.

On voit aſſez, par le court expoſé que nous venons de faire du Mémoire de M. de Condorcet, combien il contient de vues utiles; mais ce n'eſt qu'en le liſant qu'on peut en apercevoir toute l'élégance, & voir avec quelle adreſſe il a ſu ſe tirer des difficultés qu'il a cherché pour ainſi dire à affronter.

Le travail de M. de Condorcet ſur les ſuites, n'eſt pas le ſeul que l'Académie ait eu ſur cette matière; elle a été traitée par M. l'abbé Boſſut, mais ſous un autre point de vue; il s'agit dans ſon Mémoire, d'une manière de ſommer les ſuites dont les termes ſont des puiſſances ſemblables de ſinus ou de coſinus d'arcs qui forment entr'eux une progreſſion arithmétique. V. les Mém. p. 453.

Ce même Problème avoit été déjà réſolu par M. Euler, dans ſon Ouvrage intitulé: *Introductio ad Analyſim Infinitorum;* & il rappelle dans cet ouvrage ces ſortes de ſuites aux ſuites récurrentes; mais quoique cette méthode ſoit très-ſavante, elle n'eſt ni ſimple ni facile, & les recherches de M. l'abbé Boſſut l'ont conduit à une autre méthode également ſimple & facile, & qui peut aiſément s'appliquer à toutes les puiſſances des ſinus ou coſinus des arcs propoſés.

Cette méthode a pour fondement ſept théorèmes ſi ſimples, qu'ils n'ont pas beſoin de démonſtration, & qu'il ſuffit de les énoncer. L'application de ces théorèmes à la ſolution de quatorze Problèmes forment le reſte du Mémoire de M. l'abbé Boſſut; mais ces ſolutions n'étant que calcul, ne peuvent être préſentées plus en raccourci, & ne ſont nullement ſuſceptibles d'extrait; il faut les lire dans le Mémoire même, pour y remarquer la fineſſe & la facilité avec leſquelles ce calcul eſt conduit.

NOUS renvoyons entièrement aux Mémoires:

Les Recherches de M. d'Alembert, ſur le Calcul intégral. V. les Mém. p. 73.

ASTRONOMIE.

SUR LA COMÈTE DE 1769.

V. les Mém. p. 49.

LA Comète de 1769 eſt une de celles dont on a eu le plus grand nombre de bonnes Obſervations ; elle a été obſervée par M.rs Meſſier & de la Lande à Paris, M.rs d'Aiquier à Toulouſe, de Saint-Jacques & Poitevin à Marſeille, le P. Audiffredi à Rome, le P. de la Grange à Milan, le P. Mayer à Péterſbourg, M. Liuntberg à Gottinghen, & M. Tofigno, Commandant des Gardes-marines à Cadiz.

Cette multitude d'obſervations a engagé M. de la Lande à rechercher les élémens de la théorie de cette Comète, ſuivant les différens Obſervateurs; nous allons, avant que de rendre compte de ſes réſultats, donner une légère idée de la théorie qui a dirigé ſon calcul.

Pour calculer l'orbite d'une Comète, il faut en avoir au moins trois obſervations. On trace alors un cercle qui repréſente l'orbite de la Terre, qu'on diviſe en ſes ſignes & en ſes degrés. On place la Terre ſur ce cercle, aux trois poſitions qu'elle avoit lors des trois obſervations; & comme on a, dans chaque obſervation, la diſtance apparente de la Comète au Soleil, ou l'angle que font les deux lignes qui vont de la Terre à cet aſtre, & de la Terre à la Comète, on trace auſſi ces lignes ſur la figure. On a donc trois lignes indéfinies ou données ſeulement de poſition qui repréſentent les rayons viſuels, par leſquels la Comète a été vue de la Terre; & il ne s'agit plus que de déterminer ſur ces lignes les points par où paſſe l'orbite de la Comète.

Pour cela on doit remarquer que les Comètes, de même que les Planètes ſe meuvent dans des orbites elliptiques, à l'un des foyers deſquelles ſe trouve le Soleil, & que comme ces dernières

leurs rayons vecteurs décrivent des aires elliptiques, proportionnelles au temps. On peut même, pour plus de facilité, supposer que cette orbite, du moins dans la petite partie que nous en apercevons, soit une parabole, parce qu'elle n'en diffère pas sensiblement. On préparera donc plusieurs paraboles, de différentes amplitudes, divisées suivant la loi que nous venons d'exposer: on placera successivement leur foyer sur le point qui représente le Soleil dans la figure qu'on a décrite, & on verra celle qui donnera entre les deux premières lignes tirées de la Terre à la Comète, un intervalle proportionnel au temps écoulé entre les deux premières observations, & un autre intervalle proportionnel au temps écoulé entre la seconde & la troisième.

Cette opération graphique suffit pour avoir à peu près la position de l'axe de l'orbite de la Comète, sa distance au Soleil, l'instant de son périhélie, &c. mais l'Astronomie moderne ne se contente pas de déterminations peu précises, & il a fallu que le calcul vînt au secours de la main; c'est cependant toujours la même théorie qui le dirige, & il ne sert qu'à parvenir à une plus grande exactitude.

M. de la Lande a calculé les élémens de la théorie de la Comète, suivant toutes les observations qui lui étoient parvenues entre les mains, & en faisant toutes les fausses positions nécessaires; il résulte de son travail, que le passage de cette Comète, par son périhélie, a dû être le 7 Octobre 1769, à 8^h 50'; le lieu du périhélie à 25^d 24' 34" du Lion; le lieu du nœud ascendant à 25^d 9' 51" de la Vierge; l'inclinaison de 41^d 0' 21"; & la distance périhélie de 0,11586; mais en même temps qu'il donne ces élémens, il avertit que ne les ayant déduits que de vingt-cinq jours d'observation, ils pourroient être sujets à quelqu'erreur; cependant ces mêmes élémens ont assez bien représenté les lieux de la Comète observée les 8 Août & 15 Septembre.

En comparant les élémens de cette Comète à ceux de toutes les Comètes connues, M. de la Lande s'est assuré qu'elle n'est aucune des cinquante-cinq Comètes qui ont été calculées jusqu'ici, & qu'elle fait la cinquante-sixième.

Il suit encore des élémens déterminés par M. Clairaut, que

cette Comète n'eſt pas de celles qui, par leur proximité à la Terre, y pourroient cauſer des effets ſenſibles (ſi cependant il y en a dans ce cas); il faudroit pour cela qu'un des points dans leſquels l'orbite de la Comète coupe le plan de l'écliptique, rencontrât préciſément la circonférence de l'orbite terreſtre, & que la Comète & la Terre paſſaſſent en même temps l'une & l'autre par ce point d'interſection; aſſemblage ſi difficile à faire, qu'on doit avoir ſur ce point la plus parfaite aſſurance.

La Comète a reparu après ſon paſſage par ſon périhélie, & elle a été obſervée dans cette ſeconde apparition: M. de la Lande a recherché les élémens de la Comète, il ne les a pas trouvés préciſément les mêmes que ceux qui avoient été donnés par les premières obſervations. Cette différence a paru à M. de la Lande devoir être attribuée à ce que dans ſes recherches il avoit employé, ſelon l'uſage, une orbite parabolique, différente de l'orbite véritable, qui eſt elliptique.

M. de la Lande a reçu des obſervations de la Comète, faites par M.rs Wargentin & Wallot, au commencement de Décembre; celles-ci donnent des élémens encore plus différens que les autres, parce que l'ellipſe diffère encore plus de la parabole dans ces points éloignés du périhélie; d'où il conclut qu'en apportant dans le calcul fait ſur l'ellipſe la plus grande exactitude, on pourroit peut-être calculer le retour de la Comète.

D'après les élémens calculés par M. Zanotti, la queue de la Comète obſervée le 12 Septembre, de 74 degrés, doit avoir, ſuivant le calcul de M. de la Lande, plus de douze millions de lieues.

Un Aſtronome Anglois, nommé M. Dunn, avoit avancé que cette Comète s'approchoit beaucoup de la planète de Vénus; M. de la Lande a eu la curioſité de vérifier cette aſſertion, il a comparé exactement l'orbite de la Comète à celle de Vénus, & il réſulte de cette comparaiſon, que lorſque la Comète avoit traverſé le plan de l'orbite de Vénus, tant avant qu'après ſon paſſage par le périhélie, elle étoit extrêmement éloignée de cette planète. Nous venons de voir combien il faudroit faire concourir de haſards pour qu'une Comète & une Planète puſſent ſe rencontrer;

mais ces hasards ne sont hasards que pour nous, ils sont des suites de l'ordre que l'Etre suprême a établi dans ses ouvrages, & qu'il ne permet à aucune de ses créatures de troubler.

SUR LA CONJONCTION ÉCLIPTIQUE DE VÉNUS ET DU SOLEIL,

Du 3 Juin 1769.

NOUS avons rendu compte, en 1761 *, des Observations du passage de Vénus sur le disque du Soleil, qui arriva le 6 Juin de cette année, & nous y avons exposé tout ce que l'importance de cette observation avoit engagé à faire pour en assurer le succès & la précision, & pour en tirer le plus grand parti possible pour la détermination de la parallaxe du Soleil.

* Voy. Hist. 1761, p. 98.

Celui qui est arrivé le 3 Juin 1769, n'étoit pas moins intéressant pour l'Astronomie; il l'étoit même d'autant plus qu'il s'écoulera plus d'un siècle avant qu'on puisse revoir un pareil Phénomène; circonstance bien propre à réveiller la curiosité des Observateurs, & à leur faire redoubler leurs efforts pour ne pas laisser échapper une circonstance si précieuse.

Le temps avoit été très-peu favorable, à Paris & aux environs, la veille & la surveille du Phénomène; le jour même un orage qui s'éleva peu auparavant l'observation, fit craindre qu'on ne pût la faire. Le Ciel se découvrit cependant presque au moment de l'observation; & nous allons essayer de rendre compte de toutes celles qui ont été faites, & qui sont venues à la connoissance de l'Académie.

Le Roi étant alors à Saint-Hubert, & ayant desiré que l'observation se fît en sa présence, M.rs le Monnier & de Chabert s'y transportèrent, munis de tous les instrumens nécessaires, & surtout d'une excellente lunette de 18 pieds, & d'une lunette achromatique de 10 pieds; ils s'assurèrent de l'état de leur pendule, par cinq hauteurs correspondantes, qu'ils furent assez heureux pour

V. les Mém. p. 187.

obtenir la veille; mais ils ne purent en avoir le jour de l'obſervation, & ils furent obligés d'y employer d'autres moyens d'autant plus pénibles qu'il faut ſuppléer au défaut d'exactitude, par la multiplicité des obſervations.

Tout étant en état, ils attendirent, avec une impatience mêlée d'inquiétude, le moment de l'obſervation principale; mais ils ne purent obtenir que le contact interne, le Soleil ayant été couvert pendant le temps du premier; il leur parut ſe faire à la lunette ſimple qu'employoit M. de Chabert, à $7^h\ 34'\ 32''$ de temps vrai, & à la lunette achromatique de M. le Monnier, à $7^h\ 34'\ 56''$. Vénus paroiſſoit très-mal terminée & très-irrégulière, à cauſe du voiſinage de l'horizon, le Soleil n'étant alors élevé que d'environ deux degrés, de manière qu'il fut impoſſible de meſurer ſon diamètre.

V. les Mém. pages 229 & 245.

A Paris, M.rs de Thury, Maraldi, le duc de Chaulnes, & du Séjour, l'obſervèrent à l'Obſervatoire royal; ils ne purent obſerver que le contact interne. M. de Thury l'obſerva à $7^h\ 38'\ 53''$, avec une excellente lunette de Dollond de 3 pieds & demi; M. Maraldi à $7^h\ 38'\ 50''$, avec une lunette achromatique de 36 pouces, qui faiſoit l'effet d'une lunette ordinaire de 15 pieds; M. le duc de Chaulnes, à $7^h\ 38'\ 58''$; & M. du Séjour, à $7^h\ 38'\ 43''$. Les bords du Soleil & de Vénus étoient extrêmement ondoyans; ce qui rend incertain le diamètre de cette Planète, que M. de Thury obſerva une fois de $1'\ 1''$, & la ſeconde fois de $1'\ 1''\frac{1}{2}$; il ne fut pas poſſible, par la même raiſon, de faire aucune obſervation aſſez exacte pour tracer la route de Vénus ſur le Soleil. M. de Thury avoit précédemment averti que la conjonction devoit arriver plus tard d'environ 4 à 5 minutes qu'elle n'avoit été annoncée; & il avoit déterminé cette différence par le calcul tiré des Tables de M. ſon Père, corrigées par l'obſervation du premier paſſage.

V. les Mém. p. 417.

M. de la Lande, & M. l'abbé Marie, Profeſſeur de Mathématiques au collége Mazarin, l'obſervèrent dans l'obſervatoire établi par feu M. l'abbé de la Caille dans ce collége. Ils ne purent ni l'un ni l'autre obtenir le contact externe; le Soleil ne s'étant découvert qu'après cette phaſe. M. l'abbé Marie eſtima l'entrée

du centre à $7^h\ 29'\ 7''$; à $7^h\ 38'\ 10''$ Vénus étoit déjà entrée presque toute entière; mais la pluie qui survint ne permit pas d'observer immédiatement le contact interne; & M. de la Lande ne put le conclure qu'à $7^h\ 38'\ 45''$.

L'observation fut faite au Cabinet de Physique du Roi, établi à la Muette, par D. Noël, Garde de ce Cabinet, & M.rs de Bory, Bailly, l'abbé Bourriot, & de Fouchy: le mauvais temps, dont ils ne furent pas plus exempts que les autres, leur causa quelqu'embarras pour régler la marche de leurs pendules; elles le furent cependant, & malgré le mauvais temps qui dura toute la journée, ils se préparèrent à l'observation. V. les Mém. p. 531.

M.rs de Fouchy & Bailly se servirent chacun d'un excellent télescope de 30 pouces de foyer, ayant une ouverture de 4 pouces $\frac{1}{2}$; M. de Bory employa une lunette achromatique de 5 pieds de longueur; & M. l'abbé Bourriot, une lunette de même espèce de 5 pieds, dont il a lui-même travaillé l'objectif.

A 6 heures le Ciel se couvrit de nuages très-épais, qui inquiétèrent fort les Observateurs; cependant vers $7^h\ 10'$ on aperçut un instant le Soleil, & ç'en fut assez pour être certain que Vénus n'étoit pas encore entrée sur son disque; à $7^h\ 21'\ 6''$ le Soleil parut encore un instant, & M. Bailly s'écria que le bord du Soleil étoit légèrement entamé; à $7^h\ 21'\ 51''$ le Soleil reparut, & on fut certain que le premier contact étoit fait, l'échancrure étant très-sensible; mais pendant qu'on se disposoit à observer le contact intérieur, il vint un petit nuage couvrir la partie du Soleil où étoit Vénus; enfin ce nuage se dissipa, & M.rs de Bory & de Fouchy aperçurent à $7^h\ 38'\ 33''$, que le contact s'étoit fait il y avoit environ 2 secondes; & tous les autres Observateurs en portèrent le même jugement: d'où il suit qu'il s'étoit fait à $7^h\ 38'\ 31''$; ce qui, réduit au méridien de l'Observatoire revient à $7^h\ 38'\ 45''\ \frac{1}{2}$. La pluie qui survint ne permit plus de faire d'autres observations.

Pendant que les Astronomes de Paris tâchoient de tirer parti de l'observation de ce Phénomène, M. Pingré, qui se trouvoit alors au Cap-françois de Saint-Domingue, par la latitude septentrionale de $19^d\ 57'\ 3''$, & $4^h\ 58$ à $59'$ à l'occident de Paris, V. les Mém. p. 513.

l'obſervoit de ſon côté. Preſque tous les jours, dans cette ſaiſon; le temps eſt ſerein le matin, mais ſur les cinq heures le Ciel s'obſcurcit, & il ſe forme un orage qui dure fort avant dans la nuit; heureuſement le 3 Juin fut privilégié, & l'orage ne commença à ſe former qu'après l'obſervation.

M. Pingré s'étoit aſſocié M.rs de Fleurieu, commandant la frégate l'*Iſis,* M. Saqui Deſtourès, commandant le détachement des Gardes de la Marine à bord de la même frégate, & M. le Chevalier de la Fillière, Officier des vaiſſeaux du Roi, auxquels ſe joignirent dans le cours de l'obſervation, M. de Foucault, Officier des vaiſſeaux du Roi, & M.rs les Chevaliers d'Iſle & de l'Éguille, Gardes de la Marine.

Ils étoient ſuffiſamment munis d'inſtrumens, & ils avoient établi leur obſervatoire dans une maiſon appelée *la maiſon-rouge,* ſituée hors la ville du Cap-françois, au nord; cette maiſon eſt ſituée ſur une petite hauteur, & une gorge entre deux montagnes, permet de ſuivre le Soleil juſque vers ſix heures du ſoir; ce qui ſeroit impoſſible par-tout ailleurs dans la ville & dans les environs.

L'état de la pendule avoit été conſtaté par des hauteurs correſpondantes, priſes depuis le 30 Mai juſqu'au 10 Juin.

Le jour de l'obſervation venu, les quatre Obſervateurs ſe diſposèrent à la faire, & convinrent entr'eux que perſonne n'annonceroit aux autres l'inſtant du contact, ni par paroles, ni par ſignes, mais qu'ils le détermineroient chacun ſéparément. Voici le réſultat réduit au temps vrai: M. de Fleurieu détermina le contact extérieur à $2^h\ 26'\ 14''\frac{1}{2}$; M. le Chevalier de la Fillière, à $2^h\ 26'\ 16''\frac{1}{2}$; M. Deſtourès, à $2^h\ 26'\ 20''\frac{1}{2}$; & M. Pingré, à $2^h\ 26'\ 12''\frac{1}{2}$. Le ſecond contact, ou le contact intérieur, fut obſervé par M. de Fleurieu, à $2^h\ 44'\ 45''$; par M. le Chevalier de la Fillière, à $2^h\ 44'\ 41''$; par M. Deſtourès, à $2^h\ 44'\ 50$; & par M. Pingré, à $2^h\ 44'\ 44''$.

Cette première obſervation finie, M.rs de Fleurieu & Pingré s'appliquèrent à déterminer d'inſtant en inſtant la poſition de Vénus ſur le diſque du Soleil, en faiſant paſſer Vénus & les bords de cet aſtre par le fil horizontal & le fil vertical du quart-de-cercle & d'un inſtrument des paſſages; ces obſervations, extrêmement multipliées,

multipliées, donnoient la trace de l'orbite de Vénus ſur le diſque ſolaire, & elles furent continuées juſqu'à ce que vers les $5^h \frac{1}{2}$ le Soleil fut couvert par les nuages, c'eſt-à-dire, pendant près de trois heures. Pendant ce même temps, M. Deſtourès prenoit à chaque inſtant la moindre diſtance de Vénus au bord du Soleil, avec un micromètre ſoigneuſement examiné. Il réſulte de toutes ces obſervations, que la moindre diſtance des centres du Soleil a été au Cap de 10′ 2″, ou tout au plus de 10′ 7″; car les nuages qui ſurvinrent ne permirent pas de l'obſerver immédiatement, & elle a ſeulement été conclue des obſervations faites avant que le Soleil fût caché.

Un des endroits de la Terre où l'on pouvoit tirer le plus grand parti de cette obſervation étoit le cap Saint-Lucas, à la pointe méridionale de la Californie; feu M. l'abbé Chappe s'étoit offert pour aller la faire dans cet endroit, & quoique le détail de cette opération ne ſoit parvenu que plus d'un an après, l'Académie a cru devoir inſérer ici l'abrégé de cette importante obſervation, qui lui coûte ſi cher, par la perte de ce célèbre Académien qu'elle a cauſée.

M. l'abbé Chappe s'étoit établi près du cap *San-Lucar* de Californie, au village de Saint-Joſeph, compoſé de cabanes couvertes de roſeaux; une de ces cabanes fut deſtinée à ſervir d'obſervatoire; on en perça le toit, & on y ſubſtitua des voiles qu'on pouvoit mettre & retirer aiſément, & qui en formoient une eſpèce de tente. Les inſtrumens y furent placés, M. l'abbé Chappe, avec toute ſa petite troupe, à laquelle s'étoit joint Don Vincent d'Oz, Officier Eſpagnol, s'y établirent, & ils commencèrent à déterminer la poſition de cet obſervatoire, qui ſe trouve être par 23^d 3′ 20″ de latitude boréale, & 7^h 28′ 10″ à l'occident de Paris.

Les préparatifs néceſſaires étant faits, & le jour de l'obſervation ayant été très-ſerein, M. l'abbé Chappe obſerva le premier contact de l'entrée à 23^h 59′ 17″ 2‴ du 2 Juin *; il eſtima l'entrée du centre à 0^h 5′ 15″ du 3 Juin, le contact interne de l'entrée 0^h 17′ 26″ 52‴; le premier contact de la ſortie à 5^h 54′ 50″ 18‴;

* Le jour aſtronomique ſe compte depuis midi & non depuis minuit comme le jour civil.

la sortie du centre fut estimée à 6^h 3′ 57″ 12‴, & le dernier contact parut se faire à 6^h 13′ 19″ 7‴.

Il résulte de ces observations, que la durée du passage ou la demeure du centre de Vénus sur le disque du Soleil, a été de 5^h 55′ 42″ 45‴, & que le milieu du passage s'est fait le 3 Juin à 3^h 6′ 13″ 20‴.

Pendant la durée de ce passage, M. l'abbé Chappe observa plusieurs fois le diamètre de Vénus, avec son micromètre, & le trouva de 57″,8; le même diamètre, mesuré par le temps qu'il mit à traverser le bord du Soleil, fut trouvé de 56″,4.

Les Astronomes de l'Académie n'ont pas été les seuls qui aient observé ce phénomène; il l'a été dans plusieurs endroits du royaume & des Pays étrangers. A Brest, M. de Verdun, Officier de Marine, & M.[rs] Fortin, le Roy & Blondeau firent l'observation avec toute l'exactitude possible; & cette observation fut accompagnée d'une circonstance singulière. Toutes les observations de Brest donnent les contacts plus tard, toute réduction faite, qu'ils n'ont été observés à Paris; mais cet effet n'a, selon M. de la Lande, été produit que parce que l'effet de la parallaxe étoit plus grand à Brest qu'à Paris.

V. les Mém. p. 546.

Les autres Observateurs François qui ont communiqué leurs observations à l'Académie, ont été M. le Président de Saron, à Saron; M. d'Arquier, à Toulouse; M. Diquemar, au Havre-de-Grace; M.[rs] l'Abbé Faugère & de la Roque, à Bordeaux; le P. Christophe, Capucin, à la Martinique; M. le Prince de Croy, à Calais; M. Tournant, à Laon; M.[rs] Bouin & Dulague, à Rouen; M. Pigott, à Caen; M. de Romas, à Nérac; M. d'Après, à Kergars; M. de Saint-Jacques de Silvabelle, à Marseille; M. de Garipuy, à Toulouse; M. de Nancia, près de Nanci; M. Prolange, à Soissons; M. de Relingue, à Montreuil-sur-mer; M.[rs] Bouillet, de Manse & Forès, à Bésiers.

V. les Mém. p. 421. p. 422. p. 505. p. 509.

Les Observateurs étrangers, dont l'Académie a reçu les observations, sont M. le Docteur Bévis, à Londres; M.[rs] Magallens, Maskelyne, Dollon & Hirts, à Greenwich; le Lord Alemoër, James Hey, le Docteur Lind, à Hawkil; M. Jardine, à Gibraltar; M. Plannmann, à Cajanebourg; M.[rs] Wargentin & Wilckes, à

V. les Mém. p. 539. p. 541. p. 542.

Stockolm; M. Melander, à Upſal; M. Mallet, à Poſnoy en Lapponie; M.rs Lexel, le P. Mayer, Albert Euler & le P. Stahl, à Péterſbourg; M. Rumowski, à Kola, ſur la mer blanche; M. Kraſt, à Orambourg; M. Chriſtophe Euler, à Orsk; M. Iſmief, à Yakousk; M. Lowitz, à Gurief près Aſtracan; le P. Hell, envoyé par le Roi de Danemarck, à Wardoë ou Wardhuys, île de la mer glaciale; M.rs Dimont & Wales, au Fort du Prince de Galles, dans la baie d'Hudſon; M. Smith, à Norwirton, dans la Penſilvanie; M. Ewing, à Philadelphie; M. Bidelle, à Leweſton, au cap de la Ware; M. Winthrop, à Cambridge dans la nouvelle Angleterre; Don Alzate & M. Bartolache, à Mexico; M. Tofiño, à Cadiz; le P. Manuel Alvarès de Queiros, Profeſſeur royal de Philoſophie, à Agromonte près Porto en Portugal; M. Mohr, à Batavia; M. Simonin & le P. Théodore d'Almeyda, à Bayonne.

V. les Mém. p. 422. p. 423. p. 424. p. 425.

Le paſſage de Vénus ſur le Soleil, arrivé le 3 Juin au ſoir, fut ſuivi le 4 au matin d'une Éclipſe partiale de Soleil, qui fut obſervée par M.rs le Monnier & de Chabert, à Saint-Hubert; par M.rs Caſſini, Maraldi & du Vaucel, à l'Obſervatoire royal; par M.rs de Bory, Bailly, l'Abbé Bourriot, Dom Noël & de Fouchy, au Cabinet de Phyſique du Roi, à la Muette; & par M.rs de la Lande & l'Abbé Marie, à l'obſervatoire du Collége Mazarin.

p. 191. p. 231. p. 531. p. 426.

Un ſi grand nombre d'obſervations, & l'importance de la concluſion qu'on en pouvoit tirer pour la détermination de la parallaxe du Soleil, étoient bien propres à piquer la curioſité des Aſtronomes, & à les inviter à en faire uſage. C'eſt auſſi ce qui eſt effectivement arrivé; M. le Monnier a comparé les obſervations faites en Amérique, avec celles qui ont été faites dans le nord de l'Europe; la phaſe qu'il a choiſie pour la comparer, eſt le contact interne. La première entrée de Vénus ſur le Soleil lui a paru trop difficile à déterminer: il admet cependant ce premier contact à Stockolm & à Greenwich, parce que le Soleil y étoit élevé ſur l'horizon, l'air plus ſerein, & que trois ou quatre Obſervateurs habiles s'y ſont réunis, pour la détermination de ces premiers momens: il fait encore entrer dans ſes recherches, les durées totales du phénomène dans les deux villes du Nord où elle

V. les Mém. p. 497.

a été obſervée. Il réſulte de toutes ces comparaiſons, que toutes compenſations faites, on trouve 7″ $\frac{1}{2}$ pour la parallaxe du Soleil, ce qui augmente conſidérablement la diſtance qu'on croyoit avoir déterminée de la Terre à cet aſtre.

V. les Mém. p. 505.

La détermination de la parallaxe du Soleil n'eſt pas le ſeul fruit qui peut ſe tirer de l'obſervation du paſſage de Vénus ſur le Soleil ; on peut en tirer un moyen de déterminer l'erreur des Tables de Vénus, indépendamment de l'effet des parallaxes; c'eſt préciſément ce qu'a fait M. le Monnier, en profitant, avec adreſſe, de la circonſtance de quelques obſervations, dans leſquelles le cercle de Longitude ſe confondoit avec le vertical, ce qui faiſoit évanouir la parallaxe de longitude, & il a trouvé le lieu obſervé de Vénus, au moment de ſa conjonction, plus avancé de 58″ $\frac{1}{2}$ que ne le donne le calcul tiré des Tables de M. Halley; il ne regarde cependant pas cette détermination comme abſolument certaine, parce qu'il ſe trouve quelqu'incertitude dans les obſervations.

V. les Mém. p. 509.

M. de la Lande a comparé les obſervations de Bordeaux avec celles qui ont été faites à Paris, en employant la parallaxe du Soleil de 8″,8 ; les obſervations de Bordeaux ſe ſont rapportées très-exactement avec celles de Paris, & on en tire la longitude obſervée de Vénus de 13^d 27′ 22″ des Gémeaux, avec une latitude boréale de 10′ 13″,7, à 2″ près de celle que donnent les Tables de M. Caſſini. M. de la Lande s'eſt auſſi ſervi de l'obſervation du contact pour rectifier la Carte du paſſage de Vénus, qu'il avoit publiée en 1764, fruit ſurnuméraire, ſi l'on veut, de l'obſervation de ce paſſage.

V. les Mém. p. 539.

M. de la Lande a comparé de même les obſervations faites en Angleterre avec celles de Paris; mais il a fallu ſuppoſer la parallaxe de 9 ſecondes pour les y rappeler; elles donnent donc la parallaxe de deux dixièmes de ſeconde de plus que ne la donnent les obſervations de Bordeaux comparées à celles de Paris; différence ſi petite qu'on peut la regarder comme un véritable accord.

V. les Mém. p. 543.

Quelques Aſtronomes avoient penſé qu'en raſſemblant l'entrée de Vénus ſur le diſque, obſervée dans un endroit, avec la ſortie obſervée dans un autre, on pouvoit déterminer, à l'aide de ces obſervations, la parallaxe du Soleil. M. de la Lande s'eſt aſſuré,

en essayant d'employer cette méthode, qu'elle ne pouvoit devenir assez exacte, à moins qu'on n'eût d'ailleurs la plus courte distance à un tiers de seconde près, ce qu'il regarde comme impossible. Il n'est donc pas praticable d'obtenir la parallaxe du Soleil exactement, en employant les seules observations du nord; mais en les comparant avec celles du midi, on trouve, comme par les observations précédentes, la parallaxe de 8 à 9″.

Tel est le léger crayon que nous avons pu donner de ce qui s'est passé au sujet de ce phénomène, mais nous ne devons pas laisser ignorer au public que M. de la Lande est, au moment que nous écrivons cette Histoire, sur le point de publier une Histoire complette du Passage de Vénus sur le Soleil, dans laquelle il rapporte toutes les observations qui ont été faites de ce Phénomène, & toutes les conclusions qu'on a pu tirer de cette importante observation.

NOUS renvoyons entièrement aux Mémoires:

L'Écrit de M. Cassini de Thury, sur le mouvement des Étoiles en longitude & en latitude. V. les Mém. p. 1.

Celui de M. le Monnier, sur le mouvement d'*Arcturus* en ascension droite apparente, & de la vraie longitude du Soleil pendant une suite d'observations faites avant & après le solstice d'été, pour en déduire l'erreur des Tables au temps de l'apogée, & au 3 Juin 1769. p. 14.

Les Remarques du même, sur l'Écrit de M. Cassini. p. 24.

Le Mémoire de M. Maraldi, sur l'inclinaison du 3.e satellite de Jupiter. p. 25.

L'Observation de l'occultation de μ des Gémeaux par la Lune, le 11 Avril 1769, avec des remarques sur la distance des étoiles α & β des Gémeaux; par M. le Monnier. p. 29.

L'observation de deux Éclipses de Lune, du 30 Juin au matin & du 23 Décembre 1768; par M. Maraldi. p. 59.

L'Observation d'une Éclipse de Lune horizontale, faite à Châtillon, dans la tour de M. le Prince de Croy, le 23 Décembre 1768; par M. le Monnier. p. 61.

V. les Mém. p. 63. L'Obſervation de l'Éclipſe de Lune du 23 Décembre 1768, & du paſſage de la Lune par le Méridien; par M. de la Lande.

p. 65. L'Obſervation de quelques phaſes de la même Éclipſe, par M. de Fouchy.

p. 147. Les Obſervations de l'oppoſition de Jupiter au Soleil, arrivée le 8 Mai 1769, du paſſage de Vénus ſur le diſque du Soleil, du 3 Juin; & de l'Éclipſe du Soleil, du 4 Juin 1769; par M. Jeaurat.

p. 297. Et la ſuite du travail de M. du Séjour, ſur les Éclipſes ſujettes aux parallaxes; ſeptième Mémoire.

CETTE année M. Caſſini fils, publia *la relation du voyage qu'il avoit fait, par ordre du Roi, pour examiner les Montres marines de M. le Roy l'aîné.*

On ſavoit depuis long-temps que ſi l'on pouvoit avoir une Montre capable de conſerver invariablement l'heure du port duquel on eſt parti, on pourroit, en comparant cette heure avec celle qu'on obſerve dans le navire, connoître à chaque inſtant la longitude du lieu auquel il eſt parvenu. La ſimplicité de ce moyen faiſoit deſirer qu'il pût être exécuté; mais la conſtruction d'une telle horloge étoit, il y a moins d'un ſiècle, au rang des choſes impoſſibles *, & on avoit été obligé de chercher d'autres moyens bien plus difficiles, pour parvenir à cette connoiſſance.

* *Hydrographie du P. Fournier, p. 475.*

La perfection à laquelle l'art de l'Horlogerie eſt parvenu depuis environ cinquante ans, a fait renaître les eſpérances des marins ſur ce point ſi important. M. Harriſon, en Angleterre, M.rs le Roy, Berthoud, & pluſieurs autres en France, ont travaillé avec ſuccès, & ont préſenté différentes pièces qui ont fixé l'attention des Navigateurs. Mais comme il n'y avoit que la ſeule expérience qui pût décider de la perfection de ces pièces, relativement à l'uſage auquel elles étoient deſtinées; l'importance de la matière engagea M. le Duc de Praſlin à propoſer au Roi de faire armer un vaiſſeau uniquement deſtiné à cette épreuve. Les Montres de M. Harriſon avoient été éprouvées à la mer, celles de M. Berthoud dans la rade de Breſt; celles de M. le Roy l'avoient été dans le

voyage que M. le Marquis de Courtanvaux avoit fait pour ce ſujet, & duquel nous avons rendu compte en 1767 *; mais quelques ſuccès qu'elles euſſent eu alors, l'eſpace parcouru n'avoit pas aſſez d'étendue pour leur faire éprouver la viciſſitude des climats, & on crut néceſſaire de leur faire faire une navigation plus longue, & qui les portât dans des températures très-différentes.

* Voy. Hiſt. année 1767, p. 120.

Dans cette vue on arma la frégate l'*Enjouée*, commandée par M. de Tronjoly, Capitaine de vaiſſeau; elle devoit, en partant du Havre, aller droit à l'île Saint-Pierre proche de Terre-neuve; de-là paſſer à la côte d'Afrique; & enfin revenir en France, après avoir touché les côtes d'Eſpagne & de Portugal. M. le Roy devoit s'embarquer ſur ce navire, avec ſes Montres; & le Miniſtère deſira qu'un des Aſtronomes de l'Académie fût auſſi de la partie, & nomma M. Caſſini fils pour cette expédition. C'eſt de ce voyage qu'il a publié la relation de laquelle nous allons eſſayer de rendre compte.

L'Ouvrage de M. Caſſini eſt diviſé en trois parties.

La première comprend les détails hiſtoriques de ſon voyage, depuis ſon départ du Havre, juſqu'à ſon retour à Breſt. On le ſuivra avec plaiſir dans les brumes continuelles du climat de Terre-neuve, profitant avec ſoin des occaſions rares de voir le Ciel, pour faire quelques obſervations néceſſaires, & employant le loiſir forcé, dans lequel il vivoit malgré lui, à obſerver & à décrire l'art important de la pêche & des différentes préparations de la morue. Les Montres marines ayant été éprouvées dans ce climat, dont l'humidité parut cauſer à l'une des Montres une légère altération, ou du moins on le ſoupçonna, il fut queſtion de les tranſporter aux côtes d'Afrique, dont on vouloit leur faire ſentir les ardeurs. Le voyage fut heureux, & la relâche fut à Salé, dans la rade duquel on mouilla le 25 Août. M. Caſſini n'a pas oublié les détails qui peuvent intéreſſer les Marins, tant ſur la rade & le mouillage, que ſur la barre, très-difficile à franchir, qui ferme l'entrée du port, & ſur les mœurs peu connues & le caractère de ſes habitans.

La ſeconde partie contient le détail des obſervations qui ont été néceſſaires pour l'épreuve des Montres; cette partie ne peut

être abrégée, & veut être lûe dans l'ouvrage même; ce sont les pièces d'une des plus importantes affaires qui puisse intéresser le Genre humain, que M. Cassini met, pour ainsi dire, sous les yeux du Public Astronome & Navigateur, seul juge compétant en cette matière.

Pour connoître la Longitude au moyen des Horloges marines, ce n'est pas assez qu'elles conservent exactement l'heure du port d'où on est parti, il faut encore connoître, avec précision, celle du lieu où se trouve le navire; c'est à procurer aux Navigateurs cette connoissance si nécessaire, qu'est destinée la troisième partie de l'ouvrage de M. Cassini.

Les Astronomes se servent à terre de différentes méthodes pour obtenir l'heure; une des principales, est celle qui emploie des hauteurs égales du Soleil, prises devant & après midi; mais cette méthode, qui souvent manque sur terre, parce que le Soleil peut être couvert l'après-midi à l'heure où il revient à la hauteur où il a été observé le matin, devient encore plus difficile à pratiquer en mer, parce qu'il arrive souvent que l'horizon n'est pas net du côté où l'on veut observer, ce qui rend l'observation impossible.

Cette manière de déterminer l'heure, lorsqu'elle se peut pratiquer, est précise, & n'exige presqu'aucun calcul; mais, comme nous venons de le dire, elle ne peut pas toujours être mise en usage.

On peut y suppléer, en prenant des hauteurs absolues du Soleil ou d'une étoile connue, l'occasion de faire une seule observation, qui n'est assujettie à aucune heure précise, doit être bien plus fréquente que celle d'observer deux hauteurs égales d'un même astre devant & après le méridien; mais le calcul n'est pas aussi simple, la latitude du lieu & la déclinaison de l'astre y entrent, & il y a plusieurs triangles sphériques à résoudre pour déterminer l'heure cherchée par l'observation de la hauteur absolue d'un astre.

Pour lever cet inconvénient, M. Cassini a pris sur lui tout le travail; il a calculé des Tables assez étendues, par le moyen desquelles, connoissant à peu près la latitude du vaisseau, une seule hauteur observée du Soleil ou d'une étoile, donne sur le champ l'angle horaire tout calculé; c'est-à-dire, l'heure vraie du vaisseau qu'on n'a plus qu'à comparer à celle de la Montre marine, pour avoir

avoir la différence de longitude entre le lieu du vaiſſeau & le port d'où l'on eſt parti. Ces Tables, dûes au zèle & au travail de M. Caſſini, réduiſent donc le Problème à prendre une hauteur quelconque du Soleil avec l'octans, & à chercher dans les Tables quelle heure répond à cette hauteur & à la latitude par laquelle on ſe trouve.

L'Ouvrage de M. Caſſini eſt ſuivi, dans le même volume, par la pièce de M. le Roy, qui, au jugement de l'Académie, a remporté le Prix propoſé en 1769, *ſur la meilleure manière de meſurer le temps à la mer,* & dans laquelle ſe trouve la deſcription de la Montre marine éprouvée dans ce voyage.

Ce Mémoire de M. le Roy eſt diviſé en quatre parties, toutes relatives à l'objet qu'il ſe propoſe. Selon lui les corps en mouvement ſont évidemment les ſeuls qu'on puiſſe employer à cette meſure. Les aſtres ont été certainement les premiers qu'on y ait employé. Les heureux efforts des Aſtronomes ont pu parvenir à inventer des méthodes capables de les y employer utilement; mais les aſtres ne ſont pas toujours viſibles, & quand même on pourroit les avoir à ſa volonté, on auroit toujours beſoin d'un inſtrument qui pût conſerver, avec exactitude, l'heure donnée par le Soleil.

Les premiers inſtrumens employés à cet uſage, ont été les clepſydres, ſoit qu'on y ait employé les fluides, ſoit qu'on ait fait uſage des différentes pouſſières, comme dans les ſabliers. Mais il eſt aiſé de s'apercevoir que ces inſtrumens n'agiſſant que par la chute du corps qu'ils contiennent; cette chute doit, de même que les frottemens, éprouver des variations ſi énormes, par les ſecouſſes & l'agitation du vaiſſeau, & par le changement de la gravité dans les différens climats, qu'ils ne peuvent donner une exactitude ſuffiſante.

Ces mêmes cauſes doivent agir encore ſur les machines dont le régulateur eſt animé par la peſanteur, le magnétiſme, &c. Cette dernière cauſe eſt même ſujette à des variations plus accidentelles & plus irrégulières.

Il ne reſte donc d'autres régulateurs à éprouver que ceux qui tirent leur action de l'élaſticité des reſſorts, comme le balancier des Montres lorſqu'il eſt joint au reſſort ſpiral.

C'eſt auſſi ce moyen que M. le Roy a employé dans ſa Montre marine; mais pour en tirer tout le parti poſſible, il falloit le mettre à l'abri des irrégularités auxquelles il eſt ſujet. Ces irrégularités viennent, ou de l'altération de l'élaſticité de ſon reſſort ſpiral, produite par le froid & le chaud, des inégalités de la force motrice; enfin, de la quantité & de la variabilité de ſes frottemens; il a corrigé les irrégularités réſultantes du froid & du chaud, à l'aide de deux thermomètres compoſés d'eſprit-de-vin & de mercure, & placés des deux côtés de l'axe du balancier, au moyen deſquels ſa circonférence de percuſſion s'éloigne ou ſe rapproche de cet axe, ſelon que l'élaſticité du reſſort augmente ou diminue: il a remédié aux irrégularités de la force motrice par l'iſochroniſme de ſon reſſort ou plutôt de ſes reſſorts en ſpiral, car il y en a deux dans ſa Montre; en effet, cet iſochroniſme eſt tel que ſoit que les vibrations de ſes reſſorts ſoient grandes ou petites, elles ſe font toujours dans le même temps, de manière que la force motrice augmentant ou diminuant, tout ſe réduit à rendre ſes arcs plus ou moins grands, ſans altérer leur durée, & ſon échappement, exempt de tout frottement, eſt très-bien diſpoſé pour que le régulateur jouiſſe pleinement de cette excellente propriété du reſſort, & dont nous devons la découverte à M. le Roy; car il a montré, par nombre d'expériences curieuſes, que tous les reſſorts, dès que leurs longueurs ſont dans une certaine proportion avec leurs forces ou leurs épaiſſeurs, leurs vibrations, ſont toujours iſochrones. Enfin, par la manière dont il a ſuſpendu ſon balancier; il paroît avoir évité, autant qu'il étoit poſſible, les frottemens de ce régulateur. C'eſt d'après cette théorie, dont nous regrettons de ne pouvoir donner ici qu'une idée auſſi légère, que M. le Roy a ſu exécuter avec la plus grande délicateſſe & la plus grande préciſion la Montre marine qui a donné lieu au voyage de M. Caſſini, qui a mérité d'être couronnée par l'Académie, & qui eſt actuellement, avec quelques autres, embarquée ſur un vaiſſeau du Roi, pour ſubir les épreuves les plus rigoureuſes & les plus capables d'en aſſurer la juſteſſe & la préciſion.

HYDROGRAPHIE.

CETTE année parut un Traité de Navigation de M. Bézout, servant de suite au Cours de Mathématiques du même Auteur, destiné à l'usage des Gardes du Pavillon & de la Marine.

Les méthodes les plus usitées dans la Navigation, n'exigent pas d'autres principes mathématiques que ceux que M. Bézout a donnés dans les premiers volumes de ce Cours, desquels nous avons déjà rendu compte*; elles n'en exigent même qu'une partie. C'est à faire l'application de ces principes aux règles ordinaires du pilotage, que sont destinées les trois premières sections de cet Ouvrage. Dans la première, M. Bézout enseigne les méthodes propres à résoudre les questions de Navigation, en supposant qu'on soit sûr de la quantité du sillage du navire, & de l'angle que fait sa route avec le méridien donné par le compas ou boussole, ce qui suppose qu'on connoisse avec précision la variation de l'aiguille aimantée, dans le parage où on se trouve. La Navigation, par cette méthode, n'emprunte presque d'autres secours de l'Astronomie que celui qu'exige la formation des Cartes; ce sont aussi les seules connoissances astronomiques que M. Bézout donne dans cet endroit: il donne les principes de la construction des Cartes qui doivent représenter le globe ou ses parties, & il en fait une application particulière aux Cartes réduites, qui sont presque les seules dont on se sert dans la Navigation, & dont l'invention est communément attribuée au Prince Don Henri de Portugal. Il enseigne la manière de se servir de ces Cartes, & finit par l'exposition des autres méthodes en usage pour résoudre les questions de Navigation; mais en exposant tous ces élémens, M. Bézout a soin de prévenir son lecteur sur l'incertitude du sillage & de la variation du compas, & fait voir combien il est nécessaire d'avoir des moyens de les rectifier.

* *V. les Hist. de 1764, p. 96; 1765, p. 57; 1766, p. 80; 1767, p. 178.*

Ces moyens ne se peuvent tirer que de l'Astronomie, & M. Bézout employe la seconde partie de son Ouvrage à donner les connoissances astronomiques nécessaires à cet objet; & la troisième

à en faire connoître l'application; M. Bézout y fait voir comment on détermine en mer la latitude avec précision, comment on se sert de ces observations pour corriger la route estimée; comment on peut observer la variation de l'aiguille aimantée; & enfin, les différens moyens inventés pour déterminer en mer la Longitude par l'observation des âstres.

La quatrième section est d'un genre tout différent de celui des trois premières; elle est presqu'entièrement destinée à assurer l'exactitude des opérations dont nous venons de parler; M. Bézout y discute les variations des triangles sphériques, c'est-à-dire, qu'il donne les moyens d'évaluer quelle différence peuvent produire, dans la quantité cherchée, les petites erreurs qui peuvent s'être glissées dans les données; connoissance d'autant plus précieuse, qu'elle est comme la pierre de touche des nouvelles méthodes qu'on peut proposer; il y examine les défauts qui peuvent s'être glissés dans la construction de l'instrument, & sur-tout celui qui naît du non-parallélisme des miroirs qui peut produire une erreur énorme dans les grandes hauteurs; celle qu'on peut commettre dans la recherche du moyen parallèle dans la réduction des routes; celle que produit l'aplatissement de la Terre; & enfin, M. Bézout y donne quelques additions à la méthode de trouver les Longitudes, par le moyen des distances des étoiles à la Lune & au Soleil.

L'Ouvrage est terminé par un grand nombre de Tables astronomiques, nécessaires pour calculer les différens élémens que M. Bézout emploie; & pour procurer encore plus de facilité à ceux qui sont destinés à se servir de cet Ouvrage, il y a joint des Tables de sinus & tangentes, & des logarithmes des nombres naturels jusqu'à 8000.

Cet Ouvrage a paru rassembler, dans un médiocre volume, toutes les connoissances nécessaires à son objet; elles y sont présentées avec clarté & précision, & d'une manière à mettre les Commençans à portée de suivre par eux-mêmes la carrière que M. Bézout leur ouvre, & à leur en faire naître le desir; & cette suite a paru digne des volumes qui l'avoient précédée.

MÉCANIQUE.

SUR UNE MACHINE PROPRE À MOIRER LES ÉTOFFES DE SOIE.

MOIRER une étoffe, eſt imprimer ſur la ſurface, des ondes différemment contournées; ces ondes ne ſe peuvent imprimer que ſur les étoffes dans leſquelles la groſſeur du fil de trame produit des cannelures tranſverſales, qu'on nomme *grain;* & c'eſt l'aplatiſſement de ces cannelures en ſens oppoſés, qui forme les ondes de la moire: elles doivent être grandes & bien terminées par des filets fins & déliés, produits par l'interſection des aplatiſſemens du grain en ſens contraire; comme l'aplatiſſement ne prend point ſur les plis, il en réſulteroit que les ondes de la moire ſeroient interrompues d'eſpace en eſpace par des eſpèces de lignes tranſverſales, qui feroient un effet déſagréable; on remédie à cet inconvenient, en dépliant l'étoffe & changeant les plis de place, ce qu'on appelle les *faire courir.* Alors toutes les parties de l'étoffe ſouffrent alternativement la preſſion qui écraſe le grain, & les ondes ne ſont pas interrompues. V. les Mém. p. 5.

Le moyen qu'on employe pour opérer ces ondes, eſt de faire paſſer l'étoffe, enveloppée d'une toile & roulée ſur un rouleau de bois de gayac, ſous une caiſſe, dont le fond eſt très-poli, & qui eſt chargée d'un poids énorme. Cette caiſſe eſt tirée par un cable alternativement en avant & en arrière; au moyen de cette opération, le poids énorme de cette machine écraſe le grain de l'étoffe, & l'aplatit en divers ſens, ce qui forme les ondes qu'on remarque ſur l'étoffe.

Les Anglois ont été long-temps ſeuls en poſſeſſion de la manière de bien moirer les étoffes; nous n'avions pas ici de machine aſſez parfaite; ce n'a été qu'en 1740 qu'on en a fait venir une

de Londres, & elle fut établie à Paris. Enfin, quelques années après, la ville de Lyon en fit venir une seconde, & fit un sort assez avantageux à un Moireur de Londres, pour le déterminer à venir s'établir à Lyon; & depuis ce temps on a pu fabriquer en France des moires aussi belles que celles d'Angleterre.

Les unes & les autres sont cependant souvent sujettes à quelques défauts, & quelque bien faite que soit la machine, son effet n'est pas toujours constant; M. de Vaucanson a cru devoir rechercher les causes de ces variations, & essayer d'y remédier.

La nature de la soie qui compose l'étoffe, la grosseur ou la finesse de son grain, l'espèce de teinture dont elle est colorée, introduisent nécessairement des différences dans la force nécessaire pour écraser le grain, & il faudroit que la machine pût s'y prêter, pour que l'étoffe se trouvât également moirée. La manière de rouler les étoffes sur un rouleau de bois, rend encore l'action de la machine très-inégale sur les différens tours de l'étoffe, & pour peu qu'elle quitte le rouleau en se desserrant, les plis se dérangent, & les ondes se croisent & deviennent confuses.

Il faudroit donc pour éviter ces inconvéniens, que l'étoffe ne fût pas roulée, & que la machine pût prendre promptement, & presqu'à volonté, le degré de force nécessaire pour s'accommoder à la résistance du grain.

Il est aisé de voir que l'espèce de calandre que nous venons de décrire, ne peut, en aucune manière, opérer ces effets; aussi M. de Vaucanson l'abandonne-t-il entièrement, & voici ce qu'il lui substitue.

Au lieu de faire passer l'étoffe roulée sous une calandre, il la plie en zic-zac à l'ordinaire, & après l'avoir mise entre deux toiles, il la fait passer entre deux rouleaux placés à peu près comme ceux d'un laminoir ou d'une presse d'imprimerie en taille-douce.

Il est d'abord évident que par ce moyen on évite l'inégalité d'action de la calandre sur l'étoffe roulée & le dérangement des plis, qui n'arrive que trop souvent, dans la méthode ordinaire.

Mais il subsisteroit encore dans celle-ci un inconvénient très-considérable; nous avons dit que la différence de l'espèce de soie,

celle de la teinture, celle de la préparation, celle même de la texture de l'étoffe, peuvent rendre le grain plus ou moins difficile à écraser; il peut donc arriver, & il arrive même presque nécessairement, que non-seulement différentes pièces d'étoffe, mais encore différentes parties d'une même pièce exigent différens degrés de pression de la machine; & c'est ce qui ne se peut opérer avec des rouleaux fixes & invariablement arrêtés, qui exerceroient toujours une pression constante & uniforme.

Pour remédier à cet inconvénient, M. de Vaucanson introduit une construction particulière dans sa machine; l'un de ses deux cylindres, qui est le supérieur, est formé de métal très-dur, & a ses tourillons appuyés sur des collets immobiles fixés au bâtis; le rouleau inférieur, qui est de bois de gayac, a ses tourillons roulans dans des collets fixés aux extrémités de deux leviers, à environ neuf pouces de leur point d'appui, & la queue de chacun de ces leviers est saisie par un tirant de fer qui répond à un second levier, au bout duquel est attaché un plateau de balance, qu'on peut charger de différens poids. La seule pesanteur des leviers, sans aucun poids dans les plateaux, produit sur le point de contact des deux rouleaux, un effort de six milliers, & un poids de 25 livres ajouté dans chaque plateau, augmente cet effort de 5000 livres; on peut donc, avec la plus grande facilité, augmenter ou diminuer, dans un instant, la pression de la machine, la faire prêter à toutes les différentes qualités d'étoffes qu'on peut avoir à moirer; & elle peut suppléer seule aux deux calandres angloises qu'on emploie ordinairement à cet effet, & donner un moirage bien plus parfait qu'elles ne peuvent le produire.

On juge bien qu'une pareille machine n'a pu s'exécuter qu'après un nombre presqu'infini de tentatives; aussi M. de Vaucanson ne les a-t-il pas épargnées; & ce n'est qu'après s'être instruit, par ce moyen, sur un très-grand nombre de points, qu'il a fait exécuter cette machine aux frais du Roi, pour la fabrique de Tours, où elle a eu un très-grand succès.

Cependant malgré ce succès, M. de Vaucanson croit devoir attendre qu'une plus longue expérience ait confirmé les avantages de cette machine, pour oser conseiller de l'employer, & pour

en donner une deſcription plus détaillée, & accompagnée de planches. Ceux qui ſont le plus en état de décider, ſont ordinairement les plus réſervés à prononcer ſur les objets même qui leur ſont les plus familiers.

SUR

L'ÉBOULEMENT DES MONTAGNES,

ET SUR

LES MOYENS DE LE PRÉVENIR.

V. les Mém. p. 233.

IL n'eſt que trop certain que des portions conſidérables de terrein peuvent ſe détacher, & ſe détachent quelquefois des montagnes, & cauſent, dans leur chute, les plus affreux ravages; des montagnes même toutes entières peuvent quelquefois s'écrouler, & nous en avons un exemple dans une montagne très-élevée & preſqu'adjacente à celle de Chimboraço, la plus élevée de la Cordelière des Andes.

Des évènemens qui peuvent avoir des ſuites ſi terribles, méritent bien qu'on faſſe tous ſes efforts pour les prévenir; c'eſt auſſi ce qu'a tenté M. Perronet; & c'eſt à rendre compte de ſes recherches ſur ce point, qu'eſt deſtiné le Mémoire dont nous allons eſſayer de donner une idée.

Le premier pas à faire, dans une recherche de cette nature, eſt de découvrir les cauſes de ces accidens; nous diſons les cauſes, parce que pluſieurs circonſtances, ſoit naturelles, ſoit artificielles, peuvent les occaſionner.

Dans le nombre de ces cauſes, ſe trouvent naturellement les volcans, les tremblemens de terre & les autres phénomènes de cette eſpèce; mais ils ne ſont ni ne doivent faire l'objet des recherches de M. Perronet; toute la puiſſance & toute l'induſtrie des hommes, ne peuvent en empêcher les effets; & tout ce qu'on peut raiſonnablement faire en pareil cas, c'eſt d'écarter des endroits ſuſpects d'y être ſujets, les édifices & les routes publiques. Examinons préſentement

présentement les autres causes de ces désastres, auxquels l'art peut légitimement espérer de s'opposer.

Pour pouvoir procéder avec ordre dans cette recherche, il est nécessaire d'établir quelques principes. Une masse de terrein est composée de terre plus ou moins tenace, de sable, de cailloux & de plusieurs autres matières assises communément sur un banc de glaise toujours incliné, ou sur un banc de roche qui l'est quelquefois.

Les terreins ainsi situés devroient naturellement glisser sur leur base inclinée, ou même s'ébouler lorsqu'ils ne sont pas tenaces ou soutenus par d'autres terreins; mais leur pesanteur d'une part, & le glacis qu'ils prennent au premier éboulement, leur interdit ce mouvement, & communément une masse de terre qui a une fois pris cette espèce d'équilibre, reste en repos, s'il n'y survient quelque changement. Ce changement peut venir de plusieurs causes; un bâtiment trop lourd, élevé sur un terrein de cette espèce, peut rompre son équilibre & le faire glisser sur sa base; une fouille faite au pied, & qui emporteroit une partie du glacis, seroit encore capable de produire le même effet, à moins que la liaison de la terre ne le retînt. On doit donc bien examiner la nature du terrein qu'on se propose de charger d'un grand édifice, ou au pied duquel on se propose de fouiller, pour voir si on n'a rien à craindre de ces opérations.

Puisque l'adhérence des particules de la terre les unes aux autres augmente la difficulté qu'elle a de glisser ou de s'ébouler, l'eau qui pourroit s'y insinuer ne manquera pas de la diminuer; premièrement, en diminuant l'adhésion mutuelle des parties du terrein & les rapprochant de l'état de fluidité; & en second lieu, lorsqu'en humectant le banc de glaise ou de roche incliné, sur lequel la masse de terre insiste, elle lui donne une bien plus grande facilité de couler dessus & d'y glisser; & M. Perronet rapporte plusieurs exemples de ces accidens, qui ont cessé dès qu'on a détourné les eaux qui les causoient.

Ce cas arrive quelquefois, mais il n'est pas le plus ordinaire, il en est un autre qui se présente bien plus fréquemment, & qui exige des Ingénieurs & des Architectes l'attention la plus scrupuleuse & le coup d'œil le plus exact & le plus sûr.

On a tous les jours des terrasses ou des chaussées à construire, des escarpemens à faire, & des coupures profondes à pratiquer; or, les côtés de ces sortes d'ouvrages ne peuvent se soutenir que lorsqu'ils ont pris un talus plus ou moins grand, selon la nature du terrein dans lequel on opère.

Il est donc de la plus grande importance que ceux qui sont chargés de rédiger les projets de ces sortes d'ouvrages aient des règles constantes qui puissent en assurer la solidité & la durée, sans faire cependant une dépense inutile, & sans occuper en pure perte des terreins souvent précieux.

C'est à procurer aux Ingénieurs ces connoissances si utiles que M. Perronet s'est sur-tout appliqué dans ce Mémoire, dans lequel il consigne à la postérité ce que ses recherches & sa longue expérience en ce genre, lui ont appris sur cette matière.

Pour s'assurer si la masse entière du terrein ne peut être sujette à glisser sur sa base, il a fallu reconnoître d'abord quelle étoit la pente de cette base qui pouvoit lui permettre ce mouvement.

Pour cela, M. Perronet a commencé par placer des pierres taillées de différens poids sur des pièces de bois simplement dressées à la scie; elles n'ont commencé à glisser que lorsque ces pièces ont fait, avec l'horizon, un angle de 39 à 40 degrés.

Si le corps & le plan sur lequel il glisse sont polis, une beaucoup moindre inclinaison suffit; il commencera à glisser lorsque le plan sera incliné à l'horizon de $18^d\ 26$ à $27'$; c'est ce dernier angle que les expériences de feu M. Amontons ont fait nommer l'*angle des frottemens*, & qui a été adopté par presque tous les Mécaniciens.

Mais une observation bien essentielle, est que cet angle n'est constant que lorsqu'il n'est question que de poids peu considérables, & qu'il diminue à mesure que les masses augmentent. Voici comment M. Perronet s'en est assuré.

Il a examiné avec soin l'inclinaison qu'on donne aux plans sur lesquels les Vaisseaux portent dans le chantier où on les construit pour être lancés à la mer.

Cette inclinaison n'est guère que de 10 à 13 lignes par pied; ce qui donne pour angle moyen $4^d\ 33'\frac{1}{2}$; d'où l'on peut légiti-

mement conclure que le poids d'une maſſe de terrein étant infiniment plus grand que celui d'un Vaiſſeau, & un banc de glaiſe étant communément aſſez uni, une inclinaiſon, moindre même que $4^d \frac{1}{2}$, peut permettre à cette maſſe de terrein de gliſſer, pour peu qu'elle y ſoit aidée ou ſollicitée par les circonſtances locales; on doit donc, avant tout, s'aſſurer dans ces ſortes de terreins, par des fouilles & par des ſondes multipliées de la pente du banc de glaiſe ou de roche ſur lequel ils inſiſtent; en voulant ſupprimer cette légère dépenſe, on court riſque de rendre inutile toute celle qu'exigeroit l'ouvrage projeté. Revenons au talus qu'il faut donner aux terres dans les ouvrages dont nous avons déjà parlé.

Ce talus varie ſuivant la nature des terres; il y en a quelquefois d'aſſez fortes pour ſe ſoutenir à plomb juſqu'à 30 pieds & plus de hauteur; mais ce n'eſt pas le cas le plus ordinaire, les terres légères & les ſables ſins & ſecs prennent ordinairement un talus qui fait un angle d'environ 30 degrés avec l'horizon.

Lorſque la terre dans laquelle on opère a déjà été remuée, elle n'a plus la même tenacité que la terre vierge ou qui n'a pas été fouillée, elle prend en ce cas des talus différens de ceux que prendroit la terre vierge, mais qui ſuivent toujours à peu près les mêmes rapports avec la nature du terrein. Voici ceux que l'expérience a indiqués à M. Perronet.

La terre la plus forte prend un talus de 35 à 36^d; la terre légère & le ſable environ 30 degrés, & les qualités de terre intermédiaire à proportion; le gros gravier, les pierres caſſées forment un angle d'environ 40 ou 45 degrés.

Il eſt bon d'obſerver que tous ces angles ſuppoſent que la ſuperficie du talus forme un plan, ce qui eſt ſenſiblement vrai quand il n'a qu'une médiocre hauteur, & qu'il eſt fait de ſable ou de terre légère; mais dans les cas contraires l'accélération que les corps acquièrent en roulant lui fait prendre une courbure ſenſible & plus d'empattement qu'il n'en auroit, ſuivant les angles que nous venons d'aſſigner; circonſtance à laquelle l'Ingénieur qui conduit ces ſortes de travaux, doit avoir égard, s'il ne veut pas être trompé, ſur la quantité de terrein que doit occuper l'ouvrage.

proposé, ni sur l'étendue des ponts, aquéducs, &c. qu'on peut établir dessous.

Telles sont les précautions générales que M. Perronet croit qu'on doit prendre dans tous les travaux de cette espèce ; mais il en est encore de particulières, & pour ainsi dire, locales qu'on ne doit pas négliger.

Il arrive, par exemple, assez souvent que dans les coupures ou dans les escarpemens qu'on se propose de faire, on rencontre des bancs de sable ou de glaise ; or dans l'un & l'autre de ces cas on doit pourvoir à ce que l'éboulement du sable ou le desséchement de la glaise ne puisse causer l'éboulement du talus ; si les bancs sont de sable il faudra donner au talus une pente de 30 degrés qu'on sait être propre à cette matière ; mais si c'est de la glaise pour laquelle on ne craint que le desséchement, on la masquera par une portion de mur, qui, dans ce cas n'a pas besoin de beaucoup de force, parce qu'elle n'a presque aucune poussée à retenir, & qu'il suffit que cette portion de mur suffise pour empêcher la glaise de s'éventer, de se gerser, & de tomber par morceaux, ce qui entraîneroit nécessairement l'éboulement de l'ouvrage.

On voit par tout ce que nous venons de dire, combien de précautions on doit prendre, lorsqu'on est chargé de pareils ouvrages, si on veut les mettre à l'abri des accidens dont ils seroient sans cela infailliblement menacés. Tous ceux qu'on évitera par les moyens que nous venons d'exposer, seront toujours autant de motifs de reconnoissance que ceux qui seront chargés de ces ouvrages devront aux talens & aux recherches de M. Perronet.

SUR LA COURBE

DÉCRITE PAR LES BOULETS ET LES BOMBES,

eu égard à la résistance de l'air.

V. les Mém. p. 247.

On a déterminé, dans presque tous les Traités élémentaires d'Artillerie, la courbe que décrivent les bombes & les boulets, par l'action de la poudre, combinée avec celle de leur

peſanteur, & on a très-bien démontré que cette courbe étoit une parabole; mais on a toujours ſuppoſé, dans cette recherche, que ces corps n'éprouvoient de la part de l'air aucune réſiſtance ſenſible, ou du moins on n'a eu aucun égard à cette réſiſtance.

Il eſt cependant très-certain que cette réſiſtance de l'air n'eſt nullement inſenſible, qu'elle retarde la marche du boulet, qu'elle change la nature de la courbe, la diſtance des portées, l'angle ſous lequel le mortier doit être pointé, pour avoir la plus grande portée poſſible; en un mot, il n'y a aucune règle de la baliſtique qui puiſſe ſubſiſter, en remettant dans le calcul la réſiſtance de l'air, qu'on en avoit mal-à-propos exclue.

Newton & M. Euler s'étoient aperçus de ce défaut & avoient travaillé l'un & l'autre ſur cette matière, mais ni l'un ni l'autre n'avoient appliqué leurs calculs aux effets connus de nos pièces d'Artillerie, ce qui a ôté à leurs travaux la plus grande partie de l'utilité dont ils auroient pu être.

C'eſt ce qui a engagé M. le Chevalier de Borda à examiner de nouveau une matière ſi importante, pour décider à l'aide du calcul, d'une manière certaine, les principales queſtions de la baliſtique. Nous allons eſſayer de donner une idée de ſon travail.

Le premier pas qu'il fait, eſt de déterminer quelle eſt la courbe décrite par un corps qui ſe meut dans un milieu réſiſtant, & dans cette ſolution il ne determine pas la loi ſuivant laquelle s'exerce cette réſiſtance, ce qui rend ſa ſolution la plus générale qu'il ſoit poſſible. Comme on ſait cependant que la réſiſtance des fluides eſt à très-peu près proportionnelle au quarré des vîteſſes, il introduit cette expreſſion dans l'équation.

La courbe qui en réſulte eſt très-différente de la parabole; non-ſeulement, parce qu'on introduit un élément de plus dans le calcul, mais encore parce que cet élément eſt variable; car il eſt évident que la vîteſſe du projectile allant toujours en diminuant, la réſiſtance diminue auſſi dans la raiſon du quarré de la diminution de la vîteſſe; il s'enſuit que les deux branches de la courbe ſubſtituée à la parabole, ſeront inégales: on ſent aſſez combien toutes ces variables introduites dans le calcul, rendent le Problème difficile à réſoudre; il le ſeroit peut-être encore plus, ſi

on y faisoit entrer d'autres élémens qui géométriquement devroient y avoir lieu ; mais qui ne produisent pas des effets assez sensibles pour en embarrasser le calcul. Nous en allons apercevoir quelques-uns de cette espèce, en appliquant cette courbe aux effets de l'Artillerie.

Puisque la résistance de l'air augmente dans la raison des quarrés des vitesses du boulet, il est clair que plus cette vîtesse sera grande, plus les portées diffèreront en moins de celles qu'on auroit assignées, en employant le mouvement dans le vide, & la parabole qui en résulte. M. le Chevalier de Borda a donc calculé une Table dans laquelle en supposant un canon de 24, pointé à 45 degrés, il a marqué les portées dans le vide dans une colonne, en supposant différentes vîtesses initiales depuis 100 pieds jusqu'à 3500 pieds par seconde, & les portées correspondantes, en ayant égard à la résistance de l'air.

La portée réelle d'une pièce de 24, pointée sous un angle de 45 degrés est de 2250 toises, ce qui donneroit une vîtesse initiale de 2038 pieds par seconde; mais cette même vîtesse faisant abstraction de la résistance de l'air, donneroit une portée de 22922 toises. La résistance de l'air diminue donc les portées de neuf dixièmes; on peut donc juger combien on se trompe en négligeant cet élément. Voici quelque chose de plus fort ; les angles qui répondent à différentes portées ne sont pas constans, & l'angle de 45 degrés qu'on supposoit donner la plus grande portée, ne la donne pas à beaucoup près. Il n'est pas difficile de le comprendre, si on veut faire attention que toutes les déterminations qui ont été faites jusqu'ici ont eu toujours pour fondement le calcul dans lequel on n'avoit eu aucun égard à la résistance de l'air, & qu'en introduisant cet élément dans le calcul, la courbe n'est plus une parabole, que ses deux branches même different entr'elles considérablement, parce que les vîtesses allant en diminuant, les résistances diminuent aussi, même dans une raison plus forte : il faut donc, dans le calcul des angles qui doivent répondre à une portée donnée, avoir égard aux différentes vîtesses initiales, si on ne veut pas tomber dans des erreurs énormes. M. de Borda fait voir que la même pièce de 24, qui,

avec une vîtesse initiale de 300 pieds par seconde, donne pour l'angle de la plus grande portée, 42^d 10′ ne donne plus cet angle que de 28^d 10′, si on suppose cette vîtesse initiale de 2000 pieds par seconde.

Nous venons de dire que le boulet perdoit de sa vîtesse à mesure qu'il s'éloignoit du canon; mais il étoit nécessaire de voir comment se faisoit cette diminution. M. de Borda n'a pas négligé cette partie; il l'a calculée pour les pièces de différens calibres, & a déterminé pour chacune deux distances, l'une au bout de laquelle le boulet avoit perdu un dixième de sa vîtesse, & l'autre après laquelle il en avoit perdu un cinquième; & il résulte de ce calcul que ces pertes sont dans une raison assez peu différente de celle des distances mêmes.

Un des points les plus intéressans de toute l'Artillerie, est certainement de déterminer la vraie portée des différentes pièces. M. de Borda en donne le moyen par un théorème général qui ne laisse plus que de simples analogies, & quelques interpolations, pour conclure de la première Table de son Mémoire, les portées des boulets de différens calibres; il donne même ce calcul tout fait dans une Table, en employant seulement deux vîtesses initiales, l'une de 1500 pieds & l'autre de 1800 pieds par seconde; ces portées se trouvent assez différentes de celles qu'on trouve dans les Mémoires de M. de Saint-Remy; mais cette différence ne prouve rien autre chose, sinon que les vîtesses initiales pourroient n'être pas les mêmes pour tous les calibres.

Puisque la résistance de l'air offre un si grand obstacle au mouvement du boulet, il est clair que si l'air a de son côté un mouvement contraire, cette résistance deviendra plus grande, ce qui doit arriver nécessairement quand le vent se trouve dans une direction contraire au chemin du boulet. M. le Chevalier de Borda n'a pas négligé d'apprécier cette résistance, & il fait voir qu'en supposant la vîtesse initiale d'un boulet de 24 de 1800 pieds par seconde, & que le vent fasse parcourir à l'air 40 pieds dans le même temps, la portée se trouve diminuée de 90 toises. Le calcul de M. de Borda peut de même s'appliquer aux variations causées par les différences de densité de l'atmosphère, & par les différences de pesanteur dans les boulets.

Ce que nous venons de dire des boulets s'applique de même au jet des bombes, & M. de Borda n'a pas négligé cette application; mais il n'a traité ici que deux questions qui lui ont paru plus importantes que les autres; savoir, les différentes portées des bombes de différens poids & de même diamètre, & sur les angles des différentes portées.

Pour comprendre pourquoi les bombes diffèrent en ces deux points des boulets, il est nécessaire de faire réflexion sur la différence essentielle qui se trouve entre les uns & les autres. Les boulets sont solides, & comme ils sont tous de même matière, leur pesanteur a toujours un rapport déterminé avec leur diamètre. Il n'en est pas de même des bombes, elles sont creuses pour renfermer la poudre qui les doit faire éclater; & deux bombes de même diamètre seront plus ou moins pesantes, selon que ce vide sera plus ou moins grand; il étoit donc nécessaire de voir si cette différence de poids n'en introduiroit pas une dans les portées. Voici ce qui résulte de son calcul. Il a trouvé qu'en comparant ensemble deux bombes du même diamètre de 11 pouces 8 lignes, mais dont l'une pèseroit 140 livres & l'autre 175, & leur donnant des vîtesses initiales depuis 600 pieds jusqu'à 1200 pieds par seconde, la plus pesante a toujours une plus grande portée, & que cette différence est assez constamment d'environ un dixième, & l'expérience a confirmé ce raisonnement. Il résulte donc des recherches de M. de Borda, qu'on augmenteroit sensiblement la portée des bombes si, en leur conservant le même diamètre, on diminuoit le vide qui est au centre, pour augmenter leur pesanteur; ce qui peut, dans de certaines circonstances, devenir très-important.

La recherche des angles de la plus grande portée méritoit bien d'être faite avec grand soin; le calcul de M. de Borda y étant appliqué, a fait voir que, conformément à ce que nous en avions dit ci-dessus en parlant des boulets, l'angle de la plus grande portée n'est ni constant ni dans aucun cas celui de 45 degrés dès qu'on fait entrer la résistance de l'air dans le calcul, qu'il est d'autant plus petit que les vîtesses sont plus grandes, étant de $37^d\ 15'$ pour une bombe de 140, partie du mortier avec une vîtesse de six cents

ſix cents pieds par ſeconde, & de 33^d $20'$ ſeulement pour la même bombe, partie du mortier avec une vîteſſe de 1100 pieds par ſeconde; d'où il ſuit que ſi les mortiers marins qui ſont fondus avec leurs ſemelles ſous un angle de 45 degrés, auroient une portée plus grande d'environ 100 toiſes, ſi leur angle, avec la ſemelle, n'étoit que de 33 ou 34 degrés.

Tout ce que nous venons de dire de l'Ouvrage de M. le Chevalier de Borda, nous diſpenſe d'ajouter que la Baliſtique eſt devenue, par ſes Recherches, une ſcience toute nouvelle, & qu'on ne peut trop deſirer de lui voir parcourir, juſqu'au bout, cette carrière qu'il s'eſt ouverte.

SUR L'EFFET DES ROUES MÛES PAR LE CHOC DE L'EAU.

ON trouve dans le volume de l'Académie de 1704, un Mémoire de M. Parent *, dans lequel ce célèbre Mécanicien établit, comme un principe certain, qu'en ſubſtituant à toutes les ailes d'une roue, qui éprouvent l'action d'un fluide, une ſurface plane dont la ſurface ſoit égale à l'étendue frappée de ces ailes, & expoſée perpendiculairement au choc du fluide; le centre d'impreſſion de cette ſurface doit prendre le tiers de la vîteſſe du courant, pour que l'effet de la machine ſoit un *maximum*.

V. les Mém. p. 477.

* *Voy. Hiſt. année 1704, p. 116.*

Cette théorie a été adoptée par preſque tous les Mécaniciens, ſans qu'aucun ait vraiſemblablement pris la peine de l'examiner; car s'ils l'euſſent fait, ils n'auroient pas tardé à reconnoître qu'elle étoit défectueuſe.

En effet, la force communiquée aux ailes d'une roue ne dépend pas ſeulement de la grandeur de la ſurface choquée, mais de l'inclinaiſon avec laquelle l'aile eſt frappée par le fluide; & comme chaque aile a une inclinaiſon différente à l'égard de la direction du fluide, & que cette inclinaiſon change à chaque inſtant, il eſt aiſé de voir que le calcul eſt bien autrement compoſé que ne

l'avoit cru M. Parent, & que le Problème devient infiniment plus difficile à résoudre.

C'est la solution de ce Problème, pris dans toute sa généralité, qu'a entrepris M. l'Abbé Bossut, en examinant séparément l'impulsion du fluide contre chaque aile, & prenant ensuite la somme de toutes ces impulsions.

On doit avoir égard, dans cette recherche, à l'eau qui s'écoule latéralement après avoir rencontré l'aile de la roue, & qui diminue par-là la vîtesse du fluide, & par conséquent son impulsion; mais il faut en ce cas faire grande attention que cet inconvénient est beaucoup moindre pour les roues enfermées dans des coursiers où l'eau est retenue, que pour les roues qui sont sur les grandes rivières où elle est libre. On doit encore considérer que dans les roues qui sont dans les grandes vîtesses, l'eau qui a imprimé son mouvement à la roue, & qui par-là même a perdu une partie de son mouvement, devient un obstacle à l'aile, qui pour lors tend à sortir de l'eau, inconvénient qui n'a presque pas lieu dans les coursiers, où même on ménage communément une chute à l'eau pour le prévenir.

On voit par cet exposé, combien d'élémens entrent dans ce calcul, & combien il a été difficile de les combiner ensemble & de pouvoir faire varier dans le résultat ceux qui sont sujets à variation; c'est cependant ce qu'a fait M. l'Abbé Bossut, & en employant tous ces élémens, il parvient à une équation générale qui peut, en faisant varier ou même en supprimant certains termes, s'appliquer à tous les cas possibles.

Il résulte de cette équation, que le moment de l'impulsion de l'eau, varie selon le nombre des ailes; M. l'Abbé Bossut a eu la curiosité de chercher quel étoit le nombre d'ailes nécessaires pour que ce moment fût un *maximum*, dans le cas où la roue est supposée en repos, & recevant par conséquent toute l'impulsion du fluide, & cette recherche l'a mené à une conclusion bien singulière; c'est qu'alors le nombre des ailes devroit être infini ou, ce qui revient au même, la roue ronde mais toujours dentée; conclusion géométriquement vraie dans la supposition qui sert de base au calcul, mais qui ne se peut absolument appliquer à la pratique: en effet,

les molécules physiques de l'eau ayant une certaine grosseur qui les gène dans leurs mouvemens, les ailes doivent toujours laisser entr'elles un certain espace qui leur permette de les exercer. Le nombre des ailes d'une roue doit donc être fini & limité; mais on doit observer qu'il doit être toujours beaucoup moins grand dans les roues mûes par le courant des grandes rivières, que dans les roues à coursier où l'eau s'échappe aussitôt qu'elle a cessé de pousser les ailes.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que des roues verticales, & ce sont effectivement les seules qu'on emploie dans cette partie du royaume; mais dans les provinces méridionales on y en emploie très-fréquemment d'horizontales, garnies d'aubes inclinées, sur lesquelles l'eau tombe par une espèce de gouttière, placée dans une certaine direction inclinée, qui fait un angle avec le plan de la roue. Le calcul dont nous venons de parler peut de même s'appliquer à ces roues; mais pour abréger ce calcul, M. l'Abbé Bossut a cru devoir traiter le Problème d'une façon moins générale & plus appropriée à ce cas particulier.

Le calcul appliqué à ce genre de roues, M. l'Abbé Bossut parvient à une équation dans laquelle le poids qui peut faire équilibre à la force de l'eau, se trouve déterminé; & il n'est plus question que de faire varier ce terme pour le rendre un *maximum;* car alors la roue produira tout l'effet dont elle est susceptible; & il trouve, par ce moyen, que cet effet ne sera tel que lorsque le fluide frappera perpendiculairement l'aile, & que pour lors la vîtesse de la roue sera égale à celle du fluide, divisé par le triple du cosinus de l'angle que fait l'aile avec la verticale, d'où il suit que la machine en cet état pourroit enlever un poids avec une vîtesse qui feroit les $\frac{8}{27}$ de celle du courant.

Dans ce que nous venons de dire, nous avons toujours supposé que les ailes de la roue étoient exactement planes; il est cependant certain qu'elles ne le sont pas; on leur donne une petite courbure concave vers le fluide, afin que l'eau puisse agir non-seulement par son choc, mais encore par une partie de son poids. Il est clair que cette différence en introduit une dans le calcul; mais

cette courbure étant une fois connue, rien n'est si facile que d'évaluer l'excès de vîtesse qu'elle doit produire.

Telles sont les recherches que M. l'Abbé Bossut a cru devoir faire sur cet important objet; il est aisé de voir combien elles jettent de jour sur cette partie de la Mécanique.

V. les Mém. p. 278.

NOUS renvoyons entièrement aux Mémoires : L'Écrit de M. d'Alembert, sur les Principes de la Mécanique.

LES Arts qui ont été publiés pendant le cours de l'année 1769, sont au nombre de trois.

Le premier est l'*art du Menuisier*, par le sieur Roubo fils, compagnon Menuisier, première partie. Cet art est un des plus étendus, soit qu'on le considère dans le rapport qu'il a avec les bâtimens, soit relativement aux meubles & aux équipages. La première partie contient des élémens de Géométrie très-abrégés, mais suffisans pour mettre les ouvriers intelligens en état d'exécuter toutes sortes de traits, & de faire tous les toisés de leur art : il donne ensuite les principes généraux qui doivent diriger dans le choix du bois, & la manière de le débiter & de le préparer pour les différens ouvrages que l'on entreprend : il détaille les diverses espèces d'assemblages & la manière de les faire; de-là il passe aux différentes espèces d'outils, dont il donne la description détaillée. Enfin il termine cette première partie par la construction des portes & des croisées de toute espèce. Celle de la menuiserie dormante, c'est-à-dire des lambris, revêtemens, chaires à prêcher, est réservée pour la seconde partie, à la fin de laquelle l'Auteur promet de joindre un Traité complet de trait, proprement dit. Et la troisième doit comprendre tout ce qui concerne la menuiserie en meubles & en équipages, & les ouvrages d'ébénisterie.

Le second est l'*art du Tailleur*, par M. de Garsault. Cette description contient celle de l'art du Tailleur, proprement dit;

de celui du faiſeur de culottes de peau; de celui du Tailleur de corps; de celui de la Couturière; & enfin de celui de la Marchande de modes. M. de Garſault y donne toutes les connoiſſances néceſſaires ſur la nature des étoffes, ſur les différentes manières de coudre, ſur la coupe des différens vêtemens, & ſur la manière d'en aſſembler les pièces. Il ajoute une deſcription ornée de figures des différentes formes d'habillemens uſités en France depuis le commencement de la Monarchie: il détermine la quantité d'étoffe néceſſaire à chaque vêtement; en un mot, il ne néglige rien de ce qui peut contribuer à mettre ſon lecteur au fait de l'art de faire des habits, & à le garantir de ce qu'on pourroit nommer en quelques occaſions l'*art du Tailleur.*

Le troiſième & dernier eſt l'*art du Pêcheur.* Cet art eſt devenu, entre les mains de M. du Hamel, un Ouvrage complet, qu'il publie ſous le titre de *Traité général des Pêches, & Hiſtoire des Poiſſons qu'elles fourniſſent, tant pour la nourriture de l'homme, que pour pluſieurs autres uſages utiles aux arts & au commerce.*

Cet Ouvrage eſt diviſé en deux parties. La première traite de l'art du Pêcheur, proprement dit; c'eſt-à-dire, de prendre les poiſſons; & la ſeconde comprendra l'hiſtoire générale des poiſſons.

L'art de pêcher eſt diviſé en trois ſections; la première traite de la pêche qui ſe fait avec des *hameçons*, ou comme les Pêcheurs les nomment, des *hains;* la ſeconde comprendra la fabrique des différens filets, & la manière de s'en ſervir; & la troiſième contiendra la pêche au harpon, à la fouine, au trident, &c. & toutes les autres manières de pêcher qui n'ont pu ſe rapporter ni aux hameçons ni aux filets.

La première ſection ou la pêche à l'hameçon, eſt la ſeule que M. du Hamel ait publiée cette année 1769, & de laquelle par conſéquent nous ayons à préſenter une idée.

Les poiſſons ſont extrêmement voraces, & avalent avec avidité ce qu'ils regardent comme leur proie; cette propriété a fourni un moyen de s'emparer d'eux en employant un crochet de fer ou d'acier très-pointu, & dont la pointe eſt armée d'une barbe; ce crochet, qu'on nomme *hain* ou *hameçon*, eſt recouvert d'un inſecte,

d'une pâte, en un mot, de quelqu'objet qui puiſſe attirer le poiſſon, & attaché à une corde qu'on nomme *ligne ;* dès que le poiſſon a avalé l'appât, la pointe de l'hameçon ſe pique dans ſon palais ou dans ſa gorge, & on l'amène à bord en tirant doucement la ligne.

Pour peu qu'on y réfléchiſſe, on verra aiſément que ſuivant les différentes groſſeurs du poiſſon, il faut des hains ou hameçons de groſſeurs différentes ; ceux qui peuvent ſervir à prendre des éperlans ou des goujons, ne prendroient certainement ni des raies ni des requins ; il faut donc enſeigner à les conſtruire de toutes les grandeurs ; & c'eſt ce que M. du Hamel enſeigne dans les *articles 6, 7 & 8.* Les lignes doivent auſſi être proportionnées aux hameçons, & elles ſont l'objet des *articles 3 & 4.*

En vain préſenteroit-on des hameçons au poiſſon s'ils n'étoient appâtés ou couverts de quelque choſe qui puiſſe exciter ſon avidité ; & pour rendre ces appâts plus utiles, on doit conſulter le goût des différens poiſſons qu'on veut attraper : ces appâts ſont la matière de l'*article 9*, dans lequel M. du Hamel diſcute la nature, la rareté des différens appâts, & les inconvéniens qui peuvent réſulter de leur recherche.

Les lignes, une fois appâtées, s'emploient de différentes manières ; quelquefois on les met au bout d'une perche légère ou d'une canne qu'on tient à la main ; & c'eſt ce que nous appelons ici *pêcher à la ligne ;* quelquefois ces lignes ſont attachées à des cordes qu'on enfonce plus ou moins dans l'eau ; quelquefois elles tiennent à des bois ou à des paniers chargés de pierres ; ces aſſemblages de lignes ſont ou dormantes ou mobiles & entraînées par le mouvement des bâtimens. Toutes ces différentes manières ſont exactement détaillées dans l'Ouvrage de M. du Hamel.

Plus il y a de poiſſons aſſemblés dans un même lieu, plus on peut eſpérer de faire une bonne pêche, ſur-tout ſi ce ſont des poiſſons qui ſe tiennent ordinairement près du fond ; pour les engager à ſe raſſembler, on compoſe des appâts qui vont au fond de l'eau, & que pour les y attirer, on sème dans les endroits où l'on ſe propoſe de pêcher ; ces appâts ſe nomment *appâts de fond.*

La différence des poiſſons & du ſond de la mer qui ſe trouve dans les différens parages, & au voiſinage des différentes côtes fréquentées par les pêcheurs, introduiſent néceſſairement des variétés dans leurs procédés; & M. du Hamel n'a pas oublié de détailler tous ces procédés, & ce n'eſt pas la partie la moins curieuſe de ſon Ouvrage.

Toutes les opérations dont nous venons de parler, ne peuvent s'exécuter ſans un grand nombre d'inſtrumens qui ſe trouvent de même ſoigneuſement décrits dans cet Ouvrage, avec la manière de les employer aux différens uſages auxquels ils ſont deſtinés.

On voit bien de même que la plupart des pêches dont nous venons de parler, exigent que les pêcheurs s'éloignent des côtes plus ou moins, & que par conſéquent ils emploient différentes eſpèces de bâtimens, ſuivant les différentes côtes où ſe doivent faire les pêches. On ne peut imaginer combien de bâtimens différens de forme & de grandeur ſont employés à cet uſage; M. du Hamel n'a pas négligé cet article important, & non-ſeulement il décrit tous ces différens bâtimens, mais il les repréſente dans des planches ſoigneuſement gravées, de même que tous les hameçons, les outils néceſſaires à leur conſtruction, les appâts; en un mot, il n'a rien négligé pour rendre cet Ouvrage intéreſſant, & pour mettre ſon lecteur au fait de tous les objets qu'il y a traités; & la manière dont cette première ſection a été exécutée eſt bien propre à faire deſirer de voir bientôt paroître la ſeconde, qui doit comprendre la pêche au filet.



MACHINES OU INVENTIONS APPROUVÉES PAR L'ACADÉMIE EN M. DCCLXIX.

I.

UN *Tour*, préſenté par le ſieur Paſquier, Suiſſe de M. le Marquis de Voyer: le mécaniſme de ce Tour, qui tourne toujours du même ſens, par un moyen équivalent à une petite roue au pied, a paru ingénieux, & pouvoir plaire aux amateurs de l'art de tourner.

II.

Une *Méthode*, propoſée & exécutée par le ſieur Montulay, à l'uſage des Graveurs en blaſon, & qui conſiſte à compoſer une grande planche de cuivre, de pluſieurs planches plus petites dont on peut changer à volonté les diſpoſitions, & qu'il ſait aſſujettir d'une manière ſolide, ſimple & ingénieuſe. Quoique l'objet dont le ſieur Montulay s'eſt occupé ne ſoit pas d'une utilité fort étendue, cependant comme il intéreſſe l'art de la Gravure, & qu'elle peut en faire des applications heureuſes; il a paru aſſez intéreſſant pour mériter d'être publié.

III.

Une *Montre à trois parties*, préſentée par le ſieur Toſembach, Horloger: on ſait que les Montres de cette eſpèce ont la double propriété de ſonner l'heure & de la répéter à volonté; les premiers Inventeurs n'avoient preſque fait que combiner enſemble les pièces qui appartenoient ſéparément à la répétition & à la ſonnerie; mais cette grande complication étant vicieuſe, pluſieurs habiles Horlogers ont cherché à rendre la machine plus ſimple & les effets plus ſûrs. Le ſieur Toſembach a renchéri ſur ce qui a été fait, & la Montre qu'il a préſentée n'a en tout que vingt-ſix pièces au lieu de quarante-quatre qu'ont les Montres à trois parties ordinaires,

ordinaires, & de trente-ſix qu'ont les ſimples Montres à répétition. Cette Montre a paru exécutée d'une manière ſimple & facile, & la conſtruction en a été trouvée ingénieuſe.

IV.

Un *Microſcope*, inventé par le ſieur Selva, Opticien établi à Veniſe: ce Microſcope eſt purement catoptrique; l'objet eſt abſolument caché à l'œil, qui ne voit que ſon image renvoyée & groſſie par un petit miroir de métal d'environ ſix lignes de rayon, enchâſſé dans une groſſe lentille de criſtal, dont l'unique uſage eſt d'éclairer l'objet qui ſe trouve à ſon foyer. On a cru que ce Microſcope avoit ſur les Microſcopes dioptriques ordinaires, l'avantage d'être plus facile à conſtruire, plus clair & plus ſimple; & que cette invention du ſieur Selva pouvoit être regardée comme ingénieuſe & utile.

V.

Une *manière de faire changer d'air à chaque heure le carillon des groſſes Horloges par l'horloge même:* les cylindres de ces horloges n'avoient aucun mouvement dans le ſens de leur longueur, & on n'avoit d'autres moyens de faire varier les airs que de changer les chevilles qui prennent les levées des marteaux, à la faveur d'un grand nombre de trous qui ſont percés dans le cylindre; mais cette opération exigeoit la main d'un Muſicien ſtilé à cette opération. M. Courtois, Horloger, a propoſé d'opérer le même effet par le mouvement de l'horloge même; pour cela, il rend l'arbre du cylindre quarré, & le cylindre qui y eſt enarbré peut par ce moyen gliſſer le long de cet axe; à une des extrémités, eſt une étoile dont il ſaute une dent à chaque heure, & qui porte, ſur la face tournée vers le cylindre, un plan incliné qui rencontrant une pièce attachée au cylindre, le pouſſe plus ou moins, ſuivant que la dent de l'étoile qui paſſe, préſente une partie plus ou moins élevée du plan incliné; & comme cette étoile avance d'une dent à chaque heure, le cylindre fait ſonner un air différent. Ce moyen a paru ingénieux, & on a cru qu'étant exécuté avec

toute la précision nécessaire, il pourroit être utile dans les grosses horloges auxquelles on voudroit adapter des carillons.

VI.

Une *Pompe*, présentée par le sieur Quentin, maître Pompier à Rouen : cette Pompe a deux tuyaux d'aspiration qui s'ouvrent dans le corps de pompe, l'un au-dessus, l'autre au-dessous de la course du piston ; il en résulte que le piston aspire & foule en même temps, soit en montant, soit en descendant, & que le jet est continu, cette continuité même est favorisée par un réservoir d'air qui se comprime & agit par son ressort. Cette pompe est essentiellement semblable à celle que feu M. de la Hire fils avoit donné en 1716, & que l'Académie a publiée dans son volume de la même année *, à l'addition près du réservoir d'air qui en assure l'effet; mais cette addition, une construction plus simple, plusieurs choses de détail, & la perfection que le sieur Quentin a mise dans l'exécution, ont paru mériter l'approbation de l'Académie.

* *V. Mém. de 1716, p. 322.*

VII.

Un *Télescope grégorien, destiné aux Observations astronomiques*, présenté par le sieur Navarre: ce Télescope a 32 pouces de long, & est monté comme les télescopes ordinaires de cette espèce; mais la monture, au lieu de n'avoir que trois pieds sur lesquels elle s'appuie, en a quatre, & porte de plus un fil aplomb, pour mettre de niveau le plan sur lequel cet instrument se meut. Le sieur Navarre a adapté au demi-cercle vertical qui se trouve toujours dans ces montures, une division de *Nonius*, pour mesurer exactement l'angle que le télescope fait avec l'horizon: on peut placer les filets, dans le télescope, avec facilité & précision, de même que les oculaires qui doivent avoir ces mêmes fils à leur foyer, & le micromère est construit de façon qu'il n'y a aucune perte de temps dans son mouvement. Cette construction a paru marquer beaucoup d'adresse & d'intelligence dans l'Auteur, & devoir être très-commode dans l'usage qu'on en peut faire pour les observations.

VIII.

Une *manière de donner à l'Acier un poli aussi vif & aussi beau que celui d'Angleterre*, présentée par le sieur Perret, maître Coutelier de Paris, avec un *miroir d'acier*, fait par cette méthode, & dont le poli ne laisse rien à desirer : la potée qu'il emploie & qu'il a donnée au public, dans un Ouvrage qu'il a fait imprimer, est un composé d'acier & de soufre calciné lentement, pulvérisé & ensuite passé à l'eau pour en avoir tous les différens degrés de finesse. Il a paru, par les Ouvrages que le sieur Perret a présentés, & par les essais qu'il a faits devant les Commissaires de l'Académie, qu'il ne laissoit rien à desirer sur cet article, & que son poli pouvoit aller de pair avec celui d'Angleterre.

IX.

Une *nouvelle méthode pour corriger l'action du chaud & du froid sur le pendule des grosses Horloges*, présentée par le sieur le Roy l'aîné : ce moyen est extrêmement simple ; il fait passer les ressorts de suspension du pendule dans une forte fourchette de cuivre, du dessous de laquelle se comptent ses oscillations, & la longueur du pendule; cette fourchette est placée sur l'extrémité d'un levier de la première espèce, dont l'autre extrémité est conduite par une branche de cuivre, fixée à la cage du mouvement; dès que cette branche s'alonge par la chaleur, elle élève l'extrémité du levier à laquelle elle tient, & fait par conséquent baisser l'autre, à laquelle tient la fourchette, ce qui diminue la longueur du pendule que la chaleur avoit augmentée, & cette diminution peut être amenée à sa juste valeur, en faisant varier le point d'appui du levier. Cette méthode a paru simple, commode & utile, & même la seule qui puisse réussir dans de grosses horloges & avec de longs pendules, où il est cependant nécessaire de corriger les effets de la dilatation des métaux & de la grandeur des arcs qui varient suivant le temps.

X.

Une *nouvelle Division du manche des Instrumens à cordes*, proposée par M. Gosset, facteur d'Instrumens, à Reims; on fait

que plusieurs instrumens, tels que la viole & toutes ses parties, le quinton, la guitare, la mendole, la mendoline & souvent la contre-basse de violon, ont leur manche entouré de cordes qu'on nomme *touches*, & qui servoient, à ce que l'on croyoit, à partager les cordes en demi-tons lorsqu'on appuyoit le doigt sur elles; mais on n'avoit pas pensé que ces touches faisoient tous les demi-tons égaux sur toutes les cordes, tandis qu'il y en a de majeurs & de mineurs, & que cet inconvénient introduisoit nécessairement du faux dans l'instrument; le sieur Gosset s'en aperçut en remontant une guitare, & ayant consulté M. Turpin, organiste de Reims, celui-ci lui en eût bientôt fait voir la raison & ils y remédièrent en substituant aux touches des espèces de fillets bas, collés sur le manche, plus haut ou plus bas sous chaque corde, selon que le demi-ton sera majeur ou mineur, ce que ne peuvent faire les touches qui coupent toutes les cordes à la même hauteur; cette manière de diviser les manches des instrumens à cordes, a paru préférable à celle qui étoit en usage, & digne de l'attention du public musicien.

X I.

Une *Manière*, proposée par M. le Brun, *de donner par une préparation particulière, plus de blancheur au Papier, de le rendre plus lisse & plus uni, & de procurer au Papier commun une grande partie des propriétés du Papier connu sous le nom de* Papier d'Hollande; les échantillons qu'il a présentés & les épreuves auxquelles l'Académie l'a soumise, sur-tout celle de blanchir & préparer la moitié d'une vieille feuille d'impression commune, sans toucher à l'autre moitié, ont fait voir évidemment que cette préparation réussit sur le papier imprimé & même sur les estampes sans altérer ni l'impression ni la gravûre, qu'elles acquièrent même plus d'éclat par la blancheur que cette préparation donne au papier, celui qui l'a éprouvé n'est pas plus pénétrable à l'encre qu'il ne l'étoit auparavant, peut-être seulement s'y étend-t-elle un peu davantage que sur le vrai papier d'Hollande, ce qui rend les traits un peu moins bien terminés: cette préparation a paru mériter d'être approuvée, moins comme une découverte nouvelle,

puiſqu'on la pratique depuis long temps en Hollande, que comme un objet utile à la Société & au Commerce national.

LE Parlement ayant fait l'honneur à l'Académie de lui demander ſon avis ſur les Lettres patentes obtenues par le ſieur Vincent Huguet, Marchand Orfévre de Paris, par leſquelles Sa Majeſté lui permet de faire fabriquer & vendre une Vaiſſelle plate de cuivre, doublée d'argent; l'Académie après avoir ſoumis à de nouvelles épreuves cette vaiſſelle, qu'elle avoit déjà précédemment examinée, a cru devoir perſiſter dans ſon premier avis & aſſurer que la vaiſſelle doublée d'argent du ſieur Huguet, eſt fabriquée avec tout le ſoin & toute l'exactitude qu'on peut deſirer, & qu'il y avoit lieu d'eſpérer qu'elle ſeroit agréable & avantageuſe au Public.

DANS le nombre des Pièces qui ont été préſentées cette année à l'Académie, elle a jugé les douze ſuivantes dignes d'avoir place dans le Recueil de ces Ouvrages qu'elle fait imprimer.

Sur quelques Expériences faites avec des Fuſils de munition: Par M. Fourcroy de Ramecourt, Brigadier des armées du Roi, Ingénieur en chef à Calais, Correſpondant de l'Académie.

Sur quelques particularités du Cerveau & de ſes enveloppes: Par M. Sabattier, Chirurgien de Paris.

Sur les Nerfs de la dixième paire: Par le même.

Sur l'Inégalité de la capacité des Ventricules du Cœur & des Vaiſſeaux pulmonaires: Par le même.

Analyſe des Eaux de Barège, Cotteretz & Bagnières: Par M. de Montault.

Sur les Diſſolvans de la Pierre: Par M. Camus, Docteur en Médecine.

Mémoire où l'on essaie de prouver que l'alkali du Tartre y est tout formé par la végétation: Par M. Rouelle le cadet.

Relation d'un Voyage au Volcan de l'île de Bourbon: Par M. de Crémont.

Extrait des Tables & des Observations Botanico-météorologiques, faites à Montmorenci pendant l'année 1769: Par le Père Cotte, Prêtre de l'Oratoire, Correspondant de l'Académie.

Sur la fabrique de l'Indigo: Par M. de Beauvais Rasault.

Observations faites, avec le Mégamètre, à la mer; & sur quelques changemens faits à l'Instrument: Par M. de Charnières.

De orbitis Planetarum determinandis: Par le P. Boscowich, Correspondant de l'Académie.

L'ACADÉMIE avoit proposé pour le sujet du Prix de 1767, *de déterminer la meilleure manière de mesurer le temps à la mer.*

Quoiqu'une des Montres présentées au Concours eût parfaitement réussi dans les épreuves qu'on avoit pu lui faire subir à terre; cependant la nécessité de faire les épreuves à la mer l'a engagé à proposer de nouveau ce même sujet pour 1769, avec un Prix double; c'est-à-dire, de 4000 livres, & sous la condition expresse que toutes les Pièces qu'on présenteroit au Concours auroient été éprouvées à la mer.

Elle a adjugé ce Prix à la Pièce N.° 2 de 1769, qui a pour devise, *Labor omnia vincit improbus;* & à la Montre qui y étoit jointe. L'Auteur de l'une & de l'autre est M. le Roy l'aîné, Horloger du Roi, de l'Académie Royale des Sciences d'Angers.



ÉLOGE DE M. TRUDAINE*.

DANIEL-CHARLES TRUDAINE, Conſeiller d'État, & aux Conſeils royaux de finance & de commerce, Intendant des finances, & Honoraire de l'Académie des Sciences, naquit à Paris le 3 janvier 1703. Il étoit fils de Charles Trudaine, Conſeiller d'État, & de Renée-Magdeleine de Rambouillet de la Sablière. M. Trudaine ſon père avoit été ſucceſſivement Intendant de Lyon & de Dijon, & Prevôt des Marchands de Paris. Il joignoit aux principes de la probité la plus exacte, un cœur ſenſible & droit; toujours vrai, toujours humain, toujours ferme dans ce qu'il croyoit juſte. Sa probité rigide n'avoit pu ſe plier aux différentes circonſtances. Le feu Roi l'honoroit de ſa confiance. M. le Chancelier Voiſins, qui avoit épouſé ſa ſœur, l'avoit mis ſouvent dans le cas de faire valoir ſes ſervices. Il étoit encore Prevôt des Marchands dans le temps des Billets de banque: M. Law étoit alors Contrôleur général des finances; il propoſa une opération ſur les Rentes dûes par le domaine de la ville de Paris: M. Trudaine crut ne devoir pas s'y prêter. Son inflexibilité ſur ce point étant extrême, M.gr le duc d'Orléans engagea le Roi à nommer à la place de Prevôt des Marchands; mais il ne lui retira ni ſon eſtime, ni ſes bontés: il lui dit un jour, *Nous vous avons ôté votre place parce que vous êtes trop honnête homme.* Ce mot ſeul de la part d'un Prince qui a toujours paſſé pour un des plus équitables appréciateurs de ceux qu'il employoit, ſuffiroit pour illuſtrer une diſgrâce.

M. Trudaine, rendu à ſa tranquillité & aux fonctions de ſa place de Conſeiller d'État, mourut peu de temps après, eſtimé du

* L'Éloge ſuivant eſt dans un cas ſi nouveau, qu'il exige de l'Hiſtorien de l'Académie une déclaration publique; chargé, par la place qu'il a l'honneur d'occuper, de faire l'éloge des Académiciens que la mort enlève à l'Académie, il s'étoit adreſſé à M. Trudaine de Montigny, pour en obtenir les mémoires néceſſaires à l'éloge de M. ſon Père; ceux qu'il lui a remis lui ont paru ſi bien faits, & le portrait qu'on y fait de ce digne Magiſtrat ſi bien frappé, qu'il a cru les devoir donner preſque ſans aucun changement, & il déclare qu'il n'y a eu d'autre part que de les avoir approuvés.

public & regretté de ses amis. Il s'étoit marié en 1700, avec M.lle de la Sablière, petite-fille de M. & de M.me de la Sablière, connus tous deux dans la République des Lettres, l'un par quelques ouvrages de poësie qui ont été donnés au public, l'autre par son goût pour la société des Gens de Lettres, & sur-tout du célèbre la Fontaine. M. de la Sablière leur fils, qui avoit le malheur d'être attaché aux erreurs de la Religion prétendue réformée, fut obligé d'abandonner la France, & de se retirer en Angleterre, avec sa femme & quelques-uns de ses enfans. Sa fille cadette, héritière de grands biens, mise en couvent, & élevée dans les principes de la religion Catholique, y persévéra jusqu'à la mort, avec des sentimens d'une piété vraiment exemplaire. Ils eurent cinq enfans, deux fils & trois filles. L'aîné est M. Trudaine, dont on se propose ici de peindre la vie & le caractère. Le cadet servoit dans la Gendarmerie, & y mourut âgé de vingt-quatre ans. L'aînée des filles avoit épousé M. le marquis de la Tour-Maubourg, depuis Maréchal de France, dont elle eut une fille, mariée à M. le prince de Tingry, & morte sans enfans. La cadette épousa M. Pâris de la Brosse, président de la Chambre des Comptes, & mourut sans enfans. Et la dernière fut religieuse dans le couvent de Sainte-Élisabeth, où elle est morte. M.me Trudaine a survécu long-temps à son mari; elle est morte en 1740, fort regrettée de ceux qui vivoient avec elle: sa vertu, sa piété, sa douceur, le choix de ses amis, l'agrément de son esprit, la faisoient rechercher dans la société, & respecter dans le public.

M. Trudaine fut élevé au collége des Jésuites, où il fit de bonnes études: il y prit un goût particulier pour la lecture des Anciens, qu'il a conservé jusqu'à la fin de sa vie. Lorsqu'il fut sorti du collége, il fit son Droit, & fut Conseiller au Parlement en 1721. Il perdit son père à peu près dans le même temps. M. le Chancelier Voisins, son oncle, étoit mort en 1717. Sa fortune alors se trouvoit fort bornée; sa mère, qui avoit apporté la plus grande partie des biens dans la famille, étoit encore jeune, & le bien de son père étoit partagé. Dans cette position, âgé à peine de dix-sept ans, ayant à délibérer presque seul sur le parti qu'il avoit à prendre, il se détermina à faire toute sa vie les fonctions de Conseiller au Parlement, pour

pour lesquelles il se sentoit de l'attrait. Il se plaisoit souvent à dire que ce n'étoit pas sans regret qu'il s'étoit vu entraîné, par les circonstances, dans une carrière différente. Il s'étoit fait l'idée la plus grande & la plus touchante de l'état d'un Magistrat également recommandable par ses lumières & par son intégrité. Dans ces vues, il s'étoit livré tout entier à l'étude de la Jurisprudence; & c'est alors, dans sa première jeunesse, qu'il acquit les principes de cette connoissance profonde des loix & des formes du royaume, qui depuis l'ont rendu si utile dans les différens Conseils où il a été appelé. L'esprit de M. Trudaine le portoit toujours à approfondir les choses, & à ranger ses connoissances de manière à en former un ensemble dont toutes les parties se liassent entre elles, & au plan général. Cette habitude d'ordonner ses connoissances & ses projets, est ce qui forma le caractère distinctif de son esprit. Il en tira deux grands avantages, l'un, de rendre ses études faciles; l'autre, d'être lumineux, lorsque les circonstances l'exposèrent à montrer le fruit de ses veilles & de ses réflexions. Il opinoit toujours avec clarté, netteté & assurance. Il étoit loin de dédaigner cette éloquence qui vient de la chaleur de l'imagination, de l'abondance des images & de la richesse de la diction; il l'admiroit souvent dans les autres, mais il l'employoit rarement lui-même. Son éloquence étoit mâle & solide; elle consistoit à répandre du jour sur tous les objets qu'il parcouroit, & à parler purement sa langue dont il avoit une connoissance parfaite. Il ne se servoit jamais que du mot propre à l'idée qu'il vouloit exprimer. Ces qualités, qu'il a portées dans la suite à un degré plus éminent, commencèrent de très-bonne heure à le faire connoître. Il exerçoit depuis sept ans ses fonctions avec distinction, lorsque les circonstances lui firent changer de plan de vie, & tournèrent du côté de l'administration des talens qu'il avoit consacrés à la jurisprudence. M. de Gaumont, Conseiller d'État & Intendant des finances, avoit une nièce, fille de M. Chauvin, Conseiller au Parlement; il desiroit la marier à un homme qui pût un jour lui succéder: il jeta les yeux sur M. Trudaine, comme sur un des Magistrats le plus capable de remplir ses vues.

M. le cardinal de Fleury parut approuver ce choix; il avoit particulièrement connu M. Trudaine le père, dans le temps qu'ils

étoient l'un Évêque de Fréjus, l'autre Intendant de Lyon: il croyoit même lui avoir quelques obligations. Il ne voulut pas proposer au Roi, pour ce mariage, la survivance qu'on demandoit, de la charge d'Intendant des finances; ce Ministre étoit très-opposé à ces sortes de grâces prématurées; mais il fit espérer qu'il en obtiendroit l'agrément pour M. Trudaine, après la mort ou la retraite de M. de Gaumont. Le mariage fait, M. Trudaine acheta une charge de Maître des Requêtes: il ne tarda pas à s'y distinguer. M. le Chancelier d'Aguesseau conçut pour lui une véritable amitié; il lui trouvoit des connoissances analogues à celles qu'il possédoit lui-même dans le degré le plus éminent. Il l'employa souvent dans différentes affaires de législation très-délicates, & qu'il avoit particulièrement à cœur: il aimoit à les traiter avec lui, & il a dit souvent que le travail qu'il faisoit avec M. Trudaine le délassoit de celui qu'il avoit fait dans le reste de la journée. Il a continué, jusqu'à sa mort, de lui marquer la même confiance. Il lui trouvoit des talens si décidés pour la législation, qu'il lui reprocha plusieurs fois de songer à la place d'Intendant des finances, qu'il regardoit comme plus liée à l'administration qu'à la jurisprudence. L'amitié & le suffrage de ce grand homme garantissent suffisamment les talens rares de M. Trudaine, pour cette partie si essentielle d'un homme d'État.

M. le cardinal de Fleury continuoit de lui marquer de l'estime & de l'amitié; il l'admettoit souvent dans son intimité, & cherchoit à le bien connoître, avant de le proposer au Roi pour une place d'administration.

Peu de temps après, M. Orry, qui avoit été nommé à l'Intendance de Valenciennes, fut fait Contrôleur général. M. de la Granville, Intendant d'Auvergne, fut nommé à sa place, & cette dernière Intendance fut donnée à M. Trudaine, deux ans après qu'il eut été fait Maître des Requêtes.

La nomination à une place d'Intendant fait ordinairement, pour tous ceux qui suivent cette carrière, une époque remarquable dans leur vie. Appliqués jusque-là à l'administration de la justice distributive, il en est peu qui aient trouvé l'occasion de porter leurs vues sur l'administration d'une province, & ce n'est que par des

études particulières qu'ils peuvent en avoir acquis quelques principes. Quoiqu'entre les fonctions dont ils sont chargés, plusieurs exigent la science des loix la plus pure, ils n'y trouvent pas des ressources suffisantes pour la connoissance des hommes & des choses, qui leur est nécessaire. C'est un usage précieux à bien des égards, de ne confier des fonctions aussi étendues & aussi délicates, qu'à des hommes accoutumés à connoître & à respecter les loix, par l'étude particulière qu'ils en ont faite dans le commencement de leur vie. Mais cette étude doit nécessairement être suivie, dans les premiers momens de ce nouvel état, d'un apprentissage des fonctions de pure administration, dont quelques-unes paroissent avoir plus d'analogie aux détails tumultueux du militaire, qu'à la jurisprudence.

Ce fut dans cette nouvelle carrière que les talens de M. Trudaine commencèrent à se développer. Ses vues, ses projets, ses lumières parurent toujours prendre de l'accroissement, à mesure que ses occupations devenoient plus importantes. Il embrassa à la fois toutes les parties qui lui étoient confiées; il s'occupa avec ardeur à saisir les principes de chacune; il sut se les rendre si familières, qu'il en conserva toute sa vie la connoissance la plus solide & la plus sûre. Son caractère de fermeté & d'intégrité, dans la répartition des impositions, commença par lui acquérir cette considération qui est encore quelque chose de plus que l'estime, & qui est si nécessaire pour faire des choses vraiment utiles. Il se livra particulièrement à la construction des chemins, qui étoient dans le plus mauvais état: il sembloit qu'il prévît dès-lors qu'il seroit un jour chargé de cette administration importante dans tout le royaume.

La province d'Auvergne est séparée en deux parties, dont l'une comprend les campagnes fertiles de la Limagne & des environs de Clermont, l'autre des montagnes presque inaccessibles en tout temps. Les moissons de la plaine & les dépouilles des troupeaux de la montagne, ne procuroient pas aux habitans toutes les richesses qu'elles paroissoient leur promettre. M. Trudaine sentit & fit sentir aux Ministres, qu'il ne manquoit que des communications pour établir un heureux échange entre ces productions utiles. Il travailla avec succès à procurer à cette province cet avantage précieux,

qui a été depuis perfectionné, & qui y a attiré les richesses des provinces voisines. Toujours prêt à voir par ses yeux, il portoit par-tout l'œil vigilant d'un administrateur infatigable, & la conduite sage d'un Magistrat éclairé. Dans la persuasion que les formes sont le plus sûr garant de la pureté de l'administration, il s'y tint toujours étroitement attaché. Il les conserva avec soin dans toutes les parties où elles étoient établies; il les ramena dans celles où on avoit pu s'en écarter, & les introduisit dans celles qui en avoient jusqu'alors paru le plus éloignées. Il porta même si loin cet attachement aux formes judiciaires, que quelques personnes en prirent occasion de le croire moins propre aux affaires d'administration: mais il ne tarda pas à prouver que cette qualité chez lui ne faisoit aucun tort à l'expédition; & son travail, sans rien perdre du côté de l'activité, en acquit une bien plus grande solidité. Il étoit attentif à écarter les abus de tout ce qui l'entouroit, & à ne s'attacher que les hommes les plus sûrs pour le caractère, & le plus en état par leurs talens & leurs lumières, de remplir les fonctions dont il les chargeoit. Il fut Intendant d'Auvergne pendant cinq ans. M. de Gaumont lui offrit en 1734 de lui remettre sa place; & M. le Cardinal de Fleury ayant proposé au Roi de lui en donner l'agrément, il vint alors exercer la charge d'Intendant des Finances. Il eut le département du Domaine qu'avoit eu M. de Gaumont avant lui. Il y porta des connoissances acquises depuis long-temps dans la Jurisprudence, qui fait la base principale des affaires de ce département. Il eut occasion de faire connoître dans cette place, & la fermeté de son caractère & l'étendue de ses lumières. M. Orry, alors Contrôleur général, lui confia, peu d'années après, la direction des ponts & chaussées, qui lui a valu l'estime de la nation, par l'étendue de ses projets, la suite qu'il mettoit dans les détails, & l'économie avec laquelle il en a dirigé tous les travaux.

Le département des ponts & chaussées que M. Trudaine a conduit pendant trente ans, est d'une étendue considérable & comprend beaucoup de détails. Il n'en négligea aucun, & s'appliqua avec ardeur à y introduire l'ordre & l'économie qu'il avoit naturellement dans l'esprit. Il s'occupa principalement des deux parties

qui lui parurent les plus essentielles, & sans lesquelles il sentit bien que tout l'édifice qu'il méditoit, ne pourroit subsister : la première est la distribution & la comptabilité des fonds; la seconde, le choix des Artistes destinés à exécuter sous ses ordres les travaux nécessaires. Il a eu le bonheur de conduire ces deux parties avec un succès égal.

Dans la première, il sut si bien distribuer les sommes destinées par le Roi à cet objet, & mesurer avec tant d'exactitude les époques de la rentrée des fonds, pour y proportionner l'étendue & l'activité des travaux dont il étoit chargé, qu'il étoit sûr de pouvoir ordonner à point nommé les payemens des ouvrages à mesure qu'ils avançoient. Cette exactitude lui concilioit la confiance des entrepreneurs & des ouvriers, & lui donnoit la facilité de conduire ses travaux avec une économie qui a souvent fait l'étonnement des artistes les plus expérimentés. Il n'avoit pas donné moins d'attention à la régularité de la comptabilité, pour empêcher que la plus petite partie de ces fonds ne pût être détournée à des objets étrangers. Il s'en faisoit rendre compte, & employoit un temps considérable à en suivre tous les détails avec la plus scrupuleuse attention. Aussi on pouvoit toujours être sûr que les sommes destinées à cet objet étoient bien employées.

Quant au choix des Artistes, il ne négligea aucun des moyens qui peuvent servir à former les hommes, & à leur inspirer le zèle & la confiance nécessaires pour entreprendre & exécuter de grandes choses. Il eut le bonheur de s'entourer, dans le premier ordre, d'hommes recommandables par leur probité & leurs talens. Il leur témoigna une amitié & une confiance par laquelle il gagna entièrement la leur; & il s'étoit formé entre eux & lui, des liaisons d'estime & d'attachement qu'il a conservées chèrement jusqu'à la fin de sa vie. Il les admettoit à son intimité; il les consultoit dans tous les projets qu'il méditoit, & il étoit parvenu à leur inspirer des sentimens d'un zèle & d'un désintéressement rares. Il comprit que pour avoir des hommes tels qu'il les desiroit, il falloit les former & les diriger de bonne heure aux vertus & aux talens qu'on exigeoit d'eux. C'est dans cet esprit qu'il forma une École où tous les concurrens étoient également admis à venir essayer leur

bonne volonté & leurs diſpoſitions. Il plaça à la tête M. Perronet, aujourd'hui premier Ingénieur des ponts & chauſſées, Membre de cette Académie & de celle d'Architecture, qu'il crut propre à cet emploi de confiance, par la pureté de ſes mœurs, la ſûreté de ſes connoiſſances & la ſageſſe de ſon eſprit. Le ſuccès répondit pleinement à ſes vues. Il avoit une ſatisfaction pure lorſqu'il entendoit dire du bien de ceux qu'il employoit. Il les connoiſſoit particulièrement preſque tous. Il aimoit à s'entretenir avec eux de ce qui les touchoit, pour les connoître plus intimement. Il avoit eu ſoin d'exciter entre eux une émulation honnête, qui étoit accompagnée d'une union fondée ſur l'eſtime réciproque; & pour la cimenter, il avoit ſoin de les aſſembler ſouvent chez lui, & de les conſulter en commun, de manière que tout ce Corps paroiſſoit animé du même eſprit. Lorſqu'il y avoit quelque place à donner, il étoit preſque ſans exemple que le choix ne tombât pas ſur celui qui auroit été nommé par tous ſes confrères. Cette juſtice exacte & ſoutenue éloignoit de ce Corps juſqu'à l'ombre de cette baſſe jalouſie qui a quelquefois déshonoré les plus grands talens. Il étoit parvenu par-là à écarter toute eſpèce de ſollicitation étrangère; on en reconnoiſſoit l'inutilité: chacun ſe contentoit de faire parler pour lui ſes travaux & ſes talens, ſans chercher un protecteur étranger, ſouvent plus occupé de ſon protégé que du bien de la choſe.

Par ces moyens réunis, M. Trudaine réuſſit à entreprendre & à achever pluſieurs grands ouvrages qui ſeront des monumens durables de ſon zèle & de ſon attachement à ſes devoirs, & de la capacité de ceux qui les ont conduits.

Le pont d'Orléans, entrepris par M. Hupeau, mort depuis premier Ingénieur des ponts & chauſſées; le pont de Moulins, conſtruit avec la plus grande ſolidité par M. de Regemorte, premier Ingénieur des turcies & levées, & de l'Académie d'Architecture, ſur un fond de ſable, & ſur l'Allier, rivière orageuſe, qui avoit déjà détruit pluſieurs fois des ouvrages pareils, entrepris dans le même lieu; celui de Tours, conduit par M. Bayeux, Inſpecteur général, commencé depuis quelques années; celui de Saumur, conduit par M. de Voglie, Ingénieur de Touraine; enfin

les projets & les premiers fondemens du pont de Neuilly ſur la Seine, par M. Perronet, ſont les fruits de l'affection particulière qu'il avoit miſe à cet objet important. On ne parle pas ici d'une multitude d'autres ouvrages moins conſidérables, qui ſe préſentent de toutes parts à ceux qui voyagent dans le royaume. Des routes eſſentielles au commerce, entrepriſes & achevées, des montagnes adoucies, des abords & des traverſées de villes embellis, atteſtent & atteſteront pendant des ſiècles, aux patriotes & aux Étrangers, l'attention particulière que le Roi a cru devoir donner à la facilité du commerce de ſes ſujets.

M. Trudaine ne garda pas long-temps le département du Domaine dont il avoit été chargé par la démiſſion de M. de Gaumont; il eut celui des Fermes générales après M. de Fulvy, & fut chargé de la principale adminiſtration du Commerce, lorſque M. Rouillé, qui avoit ce détail, fut nommé à la place de Secrétaire d'État de la Marine. Il apporta dans ces deux parties le même eſprit qu'il avoit montré dans toutes celles dont il avoit été ſucceſſivement chargé. Son attachement aux intérêts du Roi, ne le fit jamais écarter des principes de la juſtice la plus exacte. Il traitoit les affaires de finances avec cette franchiſe noble qui lui gagna toujours les cœurs. L'amour de la patrie & celui de l'humanité en général, le portoient à chercher les moyens de ſoulager le peuple, ſans nuire aux intérêts du Roi. Il gémiſſoit & s'attendriſſoit ſouvent ſur cette multiplication d'impôts que les circonſtances ont rendu néceſſaires. Il mettoit tout en uſage pour en adoucir la charge, par la facilité de la perception. Dans les diſcuſſions qu'il avoit quelquefois avec les Fermiers généraux, ou ſur le prix de leur bail, ou ſur quelque perception qu'il trouvoit trop onéreuſe, il écoutoit leurs raiſons; il tâchoit de les pénétrer de ſa façon de penſer, & y réuſſiſſoit ſouvent; auſſi en étoit-il fort aimé & en a-t-il été ſincèrement regretté.

Le département du Commerce paroît comporter des vues beaucoup plus étendues & des opérations plus utiles. M. Trudaine en fut chargé dans un temps où toute la nation éveillée par nos rivaux & par les écrits même de pluſieurs de nos compatriotes, paroiſſoit entrer dans une eſpèce de fermentation. On n'étoit plus

dans ces temps où la ſcience du gouvernement ſur cet objet; étoit un myſtère impénétrable à ceux qui n'y étoient pas initiés; tout le monde, au contraire, réfléchiſſoit, parloit & écrivoit ſur le commerce, regardé par toutes les nations comme l'appui le plus ſûr de la proſpérité des États. Les opinions ſe partageoient: quelques hommes inſtruits critiquoient les principes adoptés juſqu'alors; d'autres, attachés à des connoiſſances qu'ils avoient toute leur vie cultivées, croyoient que tout ce qui n'avoit pas été prévu par les Anciens, étoit vicieux, & rejettoient avec indignation tout ce qui leur paroiſſoit nouveau. M. Trudaine déjà formé aux affaires & à la connoiſſance des hommes, par une expérience longue & éclairée, écoutoit tout, profitoit de ce qui lui paroiſſoit utile, & ſavoit encourager les différens partis, en les conciliant. Mais le poids de ſa conſidération ſervoit à entretenir l'équilibre; par-là il laiſſoit au temps & à la diſcuſſion à préparer les voies. La matière s'éclairciſſoit, & les nouvelles déciſions étoient adoptées ſans peine. Plus ſa marche avoit été lente, plus ſes progrès étoient ſûrs. Également attaché à la règle, & porté par ſon caractère à favoriſer la liberté, il ſavoit concilier l'une avec l'autre. Il ſuivoit avec zèle & exactitude, toutes les branches de manufactures, & ne manquoit aucune occaſion de relâcher inſenſiblement les gênes, & de donner de l'eſſor à l'induſtrie. Pendant que ces opinions générales ſe diſcutoient, M. Trudaine ne perdoit pas les détails de vue. Les fonds deſtinés depuis long-temps à encourager l'induſtrie dans le royaume, ſouvent mal diſtribués, & alors preſque entièrement épuiſés, revenoient de toutes parts, en ſilence, à leur deſtination naturelle. Après quelques années entièrement conſacrées au rétabliſſement de l'ordre, il ſe trouva par ce moyen en état d'appeler dans le royaume, les branches d'induſtrie les plus floriſſantes chez l'étranger. Souvent quelques avances faites à propos, quelques ſecours donnés à des Artiſtes laborieux & intelligens, excitèrent le travail & l'émulation dans des provinces prêtes à tomber dans la langueur. Ces ſecours ménagés avec une économie attentive, paroiſſoient ſe multiplier. Il eut ſoin de ne confier ſous lui cette adminiſtration qu'à des hommes honnêtes, actifs & intelligens. Il y ramena, comme dans les autres parties qui avoient été remiſes

à ſes ſoins, l'obſervation exacte des formes & des loix dans le détail. Il s'attacha les Négocians, cette claſſe précieuſe & eſtimable des citoyens, par la conſidération qu'il leur marqua & qu'il chercha à leur attirer de toutes parts. Il aimoit à converſer avec eux, à les voir former leurs ſpéculations, & à puiſer chez eux les fruits de l'expérience & du génie. Son ame vertueuſe & honnête, paroiſſoit être à ſon aiſe avec les hommes de cet état, chez qui ces qualités ſont recommandables, & dont les principes y ſont ſi analogues. Il entretenoit particulièrement une correſpondance plus intime avec ceux qui ſont attachés au Conſeil en qualité de Députés des places commerçantes; & ſon nom étoit chéri, dans ce Corps reſpectable des repréſentans du Commerce du Royaume.

Indépendamment des différens départemens de M. Trudaine, il étoit quelquefois appelé dans les Conſeils, pour y délibérer des affaires générales, & pluſieurs Miniſtres le conſultoient avec la confiance la plus entière. M. Orry, pendant le miniſtère duquel il avoit commencé à ſe mêler des affaires générales, avoit conçu pour lui une eſtime qui s'eſt ſoutenue juſqu'à la fin de ſa vie. M. de Machault, qui ſuccéda à M. Orry, étoit ſon ami dès l'enfance. Enfin, tous ceux qui l'ont conſulté en ont reçu des ſecours utiles & des lumières ſatisfaiſantes.

M. Trudaine avoit porté ſes vues ſur toutes les parties de l'Adminiſtration ; ſon imagination s'étoit promenée ſur tous les projets qui pouvoient contribuer à la perfection du Gouvernement, à la proſpérité de l'État, & ſur-tout au bonheur du peuple: il n'étoit point de moyens tendans à ces buts utiles, ſur leſquels il n'eût formé des plans très-vaſtes & très-étendus; il en entretenoit ſouvent ceux qui étoient le plus dans ſon intimité, & qu'un amour du bien analogue à ſon caractère lui avoit plus particulièrement attachés ; & ces converſations, dans leſquelles il inſtruiſoit toujours, en paroiſſant douter & diſcuter, étoient de tous les délaſſemens qu'il ſe permettoit après ſes longs travaux, ceux qui lui plaiſoient le plus.

Il avoit reçu de la part du Roi les récompenſes qu'il ambitionnoit; Sa Majeſté le traitoit toujours avec cette bonté qui la fait chérir de ceux qui l'approchent. Elle l'avoit comblé de grâces

dans sa personne & dans celle de son Fils; & chacune de ses grâces avoit été accompagnée d'une marque d'estime infiniment supérieure au bienfait. Il avoit été fait successivement Conseiller d'État, Conseiller au Conseil royal de Commerce & au Conseil royal des Finances.

Les grandes occupations, jointes à une disposition naturelle aux catarres, affoiblissoient depuis long-temps la santé de M. Trudaine; une surdité qui lui étoit survenue long-temps avant sa mort, l'empêchoit souvent d'assister au Conseil: il eut, en 1759, une maladie considérable, dont il guérit; mais il sentit dès-lors qu'il avoit plus besoin de repos; il commença à laisser à son fils, qu'on lui avoit donné pour Adjoint, la plupart des détails les plus fatigans, jusqu'à ce qu'enfin sa santé devenant de jour en jour plus mauvaise, il le chargea presque de la totalité de ses départemens, ne se réservant que celui des ponts & chaussées, que la longue habitude lui avoit rendu plus familier, & auquel il s'étoit attaché par le bien qu'il y avoit fait. Les rhumes dont il étoit tourmenté presque tous les hivers, lui avoient laissé une toux qui devint presque continuelle dès les commencemens de l'année dernière. Les Médecins jugèrent dès-lors que son état étoit dangereux, & essayèrent inutilement plusieurs remèdes. Il sentit lui-même, par la diminution de ses forces, que sa fin approchoit; il le vit avec le calme de l'homme juste. Il alla cependant, comme à son ordinaire, passer la plus grande partie de l'année à sa terre de Montigny: il y demeura environné d'un très-petit nombre d'amis intimes, dont il faisoit le bonheur, & que l'état actuel de sa santé mettoit au désespoir; il les consoloit, les soutenoit, par le courage & la tranquillité de son ame. Vers la fin du mois de Novembre, la fièvre continue se joignit à l'état de dépérissement dans lequel il étoit depuis plus de huit mois. Ce nouvel accident le ramena à Paris; il s'y réduisit, dès les premiers jours, à la société de son fils & de sa belle-fille, & de deux seuls amis qui lui étoient attachés depuis bien des années, & dont les soins ont fait la consolation de ses derniers momens. Au milieu des pleurs & des sanglots de ceux qui l'entouroient, & de l'appareil funeste qui frappoit continuellement ses regards

tourmenté de douleurs aiguës & insupportables, son ame, loin de s'altérer, se déploya dans toute sa force & dans toute sa beauté. Il se livra à sa tendresse pour les seuls objets qui lui restoient, mais la fermeté de son ame n'en souffrit pas un moment. Il envisagea sa mort comme la fin d'un voyage long & honorable. Un jour son fils, dans l'excès de l'affliction, recevant quelques derniers ordres, qu'il lui donnoit, avec le plus grand sang-froid, crut devoir l'informer de l'intérêt universel qu'on lui avoit marqué sur son état, de l'estime & de la considération dont il jouissoit, & qui ne sont jamais plus vraies que dans ces funestes instans; son père l'écouta avec une douce satisfaction peinte dans les yeux; ensuite le regardant avec attendrissement: *Eh bien, mon ami*, lui dit-il, *je te lègue tout cela.* Il remplit, avec le même sang-froid, les devoirs que lui imposoit la religion. Le 19 Janvier, il reçut, le matin, le Viatique, entouré de ses principaux domestiques; & bientôt après il sentit qu'il ne lui restoit que peu d'instans à vivre. Son fils en larmes, s'étant approché de son lit; le moribond rassembla ses forces, prit un visage serein, & lui dit, en lui tendant la main, *adieu, mon ami;* ce furent presque ses dernières paroles.

Nous n'avons jusqu'ici vu dans M. Trudaine que le Magistrat & l'Homme public; sa vie privée & son caractère avec ses amis, ne méritent pas moins d'être connus. Il avoit naturellement l'ame ferme & sensible: il savoit allier ces deux qualités souvent inconciliables. Personne ne porta jamais à un plus haut degré, l'amour de l'humanité; rigide & scrupuleux pour lui-même, il étoit, par caractère, par raison, indulgent pour les autres. Sa vertu peut-être la plus dominante, étoit l'amour de la vérité & de la simplicité: il l'avoit poussé si loin, qu'il évitoit, avec un scrupule étonnant, je ne dis pas tout ce qui pouvoit avoir l'air de fausseté, mais de la plus légère exagération. Cette vertu, née avec lui, avoit pris tant de force, par l'habitude persévérante qu'il en avoit, qu'il la communiquoit à tous ceux qui étoient avec lui en commerce d'affaires ou de familiarités, & plusieurs personnes ont avoué qu'il leur étoit impossible de déguiser la vérité à M. Trudaine, tant il inspiroit de confiance & de franchise. Il aimoit les Sciences; quoique ses occupations ne lui eussent permis d'en suivre aucune

en particulier, il étoit aiſé de voir qu'il avoit l'eſprit de toutes; il entendoit ceux qui les poſſédoient, & il en étoit écouté. Il ſe plaiſoit particulièrement dans la ſociété des Gens de Lettres & des Savans: il les cultivoit ſans prétention: il vivoit avec eux, parce qu'il aimoit à les entendre; & ils ſe plaiſoient avec lui, parce qu'ils étoient ſûrs de trouver, dans ſa converſation, de la ſatisfaction, & ſouvent des lumières. Ses liaiſons particulières avec pluſieurs des Membres les plus diſtingués de cette Académie, lui firent deſirer d'y être admis: il y fut élu en 1743.

Il prenoit un intérêt très-vif à tout ce qui fait l'objet des occupations de cette illuſtre Compagnie, dans laquelle il avoit preſque autant d'amis que de confrères. Il étoit toujours empreſſé à contribuer, de tout ſon pouvoir, à tout ce qui pouvoit tendre à l'avancement des Sciences. Il ſuivit, pendant quelque temps, les ſéances; mais ſes occupations, & le mauvais état de ſa ſanté, ne lui ayant pas permis d'être auſſi exact à y aſſiſter, qu'il l'auroit deſiré; il donna en 1764 la démiſſion de ſa place. Son fils y fut élu, & le Roi, du conſentement de l'Académie, lui permit d'y conſerver ſa ſéance & ſa voix délibérative.

M. Trudaine, malgré ſes occupations, avoit beaucoup lû ſur toutes ſortes de matières; mais il s'étoit particulièrement appliqué à l'Hiſtoire, comme plus analogue à ſes autres connoiſſances, & plus propre à exercer ſon eſprit, naturellement méditatif. Il parvint à en acquérir une connoiſſance profonde, & ſur-tout de l'hiſtoire de ſon pays. Il la ſavoit en homme d'État, en Magiſtrat & en homme d'eſprit. Il s'étoit auſſi beaucoup occupé des ouvrages de Philoſophie, & avoit été en liaiſon avec les hommes les plus célèbres de ce ſiècle, & intime ami de pluſieurs d'entr'eux. Il aimoit à diſcuter, mais la diſcuſſion de ſa part étoit ſi douce, qu'il ne propoſoit preſque jamais ſes opinions que comme des doutes. Souvent il lui eſt arrivé de donner lui-même du corps & de la ſolidité à une objection qu'on lui faiſoit, pour l'attaquer enſuite avec tous les ménagemens qu'il croyoit devoir aux autres. Lorſqu'il vouloit appuyer ſes opinions par des faits, il racontoit avec la grâce que donnent la vérité & la clarté. Sa politeſſe étoit moins le fruit de l'habitude & de l'uſage du monde, que d'une bien-

veillance naturelle qu'il avoit pour ceux qu'il aimoit à voir; & ſes égards étoient d'autant plus flatteurs, qu'il n'étoit pas difficile de pénétrer qu'ils étoient fondés ſur l'eſtime. Incapable de diſſimulation, ſon abord froid pour ceux qu'il ne connoiſſoit pas aſſez, ou qu'il croyoit avoir quelque raiſon de ne pas deſirer de voir, a ſouvent prévenu quelques perſonnes contre lui; mais ceux qui ont eu occaſion de le connoître plus particulièrement, conviendront, avec plaiſir, qu'il étoit de la ſociété la plus douce & la plus facile.

M. Trudaine étoit naturellement modeſte, & cette modeſtie n'étoit pas chez lui une vertu dictée par la raiſon ou par la réflexion; elle étoit née avec lui, & faiſoit une partie eſſentielle de ſon caractère. Son amour pour la ſimplicité & pour la juſtice, le portoit à craindre de s'aſſigner une place qui ne fût pas la ſienne. Il penſoit qu'il n'étoit pas permis à un homme de croire qu'il méritoit de la gloire. Ce ſentiment qui porte à vouloir s'élever au-deſſus de ſes ſemblables, lui paroiſſoit injuſte. Il diſoit ſouvent que les hommes ne devoient deſirer que la paix; employer tous ſes efforts pour faire du bien aux autres, mériter par-là d'en être aimé & bien voulu, étoit ſelon lui le moyen de ſe procurer cette tranquillité intérieure & extérieure, qu'il regardoit comme la ſeule récompenſe qu'il fût permis d'ambitionner. Avec cette façon de penſer, qui étoit devenue un ſentiment chez lui, il n'eſt pas difficile de s'imaginer qu'il fût loin de toute ambition. Content des circonſtances dans leſquelles il ſe trouvoit, il ne deſiroit jamais aucune place; il avoit obtenu celles qu'il avoit ſans les avoir ſollicitées; & comme il auroit ſu ne les pas regretter, il n'en deſiroit pas de ſupérieures; il les auroit plutôt craint que ſouhaité; & le public, qui l'y avoit quelquefois déſigné, le récompenſa de ſa modération, en lui accordant la conſidération qui y eſt ordinairement attachée.

M. Trudaine avoit raſſemblé pendant le cours de ſa vie, tous les biens de ſa famille. Il joignoit à ce patrimoine des bienfaits conſidérables du Roi. Il ſut ménager & arranger ſa fortune, avec le même ordre qui l'avoit dirigé dans les affaires publiques. Également éloigné de l'avarice & de la prodigalité, il deſtina ſes

revenus à tenir un état honorable & ſimple; il affectionnoit ſurtout ſa terre de Montigny, qu'il a paſſé beaucoup de temps à améliorer & à embellir; mais ce dont il s'occupoit particulièrement, étoit le bien-être des habitans de cette terre; il leur a procuré, par ſes ſoins, des moyens de faire valoir leur induſtrie. Tout ce qu'il a fait reſpire ſon eſprit; tout y porte le caractère de la ſolidité, de l'ordre & de la ſimplicité.

M. Trudaine n'eut de ſon mariage que trois enfans, deux fils & une fille; ſa fille eſt morte en bas âge, & ſon fils cadet, dans le temps où il s'occupoit de lui procurer un état. Il lui reſte un fils unique, à qui le Roi avoit accordé de ſon vivant la ſurvivance & l'adjonction à toutes ſes places.



ÉLOGE DE M. FERREIN.

ANTOINE FERREIN, Docteur en Médecine des Facultés de Paris & de Montpellier, ancien Médecin des armées du Roi, Lecteur & Professeur en Médecine au Collége Royal, Professeur d'Anatomie & de Chirurgie au Jardin du Roi, de l'Académie des Curieux de la Nature, & de celle d'Erford, naquit à Frespech en Agénois, le 25 Octobre 1693, d'Antoine Ferrein & de Françoise d'Elprat, tous deux d'ancienne famille & vivant noblement.

Il fit ses premières études au Collége des Jésuites d'Agen, & les fit avec distinction, & son cours de Philosophie étant fini, il alla en 1713 à Cahors pour y faire celles qui pouvoient lui ouvrir l'entrée aux hautes Sciences.

M. Ferrein étoit alors très-indécis sur le choix d'un état; ce choix devoit cependant beaucoup influer sur le genre d'étude qu'il alloit entreprendre; son père desiroit qu'il se livrât à celle de la Jurisprudence, mais il ne s'y sentoit aucun attrait. Dans cette perplexité, il imagina un excellent moyen de se tirer d'embarras, il suivit, par déférence pour son père, les leçons des Professeurs en Droit, mais il y joignit celles des Professeurs en Médecine & en Théologie, sans cesser pour cela l'étude des Mathématiques, dont il s'étoit occupé tout le temps qui s'étoit écoulé depuis la fin de son cours de Philosophie, jusqu'à son départ pour Cahors; & ce fut cette dernière étude qui le tira de son indécision. Le Livre de Borelli, *de Motu Animalium*, lui tomba entre les mains: on sait que cet excellent Ouvrage placé, s'il m'est permis d'employer cette expression, sur les limites de la Mécanique & de l'Anatomie, ne peut être bien entendu que par un Mécanicien-Anatomiste, qui sache parler à la fois la langue des deux Sciences; l'envie de l'entendre engagea M. Ferrein à étudier l'Anatomie, dans laquelle ses talens devoient le faire primer un jour, & bientôt il prit tant de goût pour cette Science,

qu'elle le détermina entièrement à se livrer à la Médecine.

Dès qu'il eut pris cette résolution, il partit pour se rendre à Montpellier: M.[rs] Vieussens & Deidier y professoient alors la Médecine; ils connurent bientôt le mérite de leur Disciple, & s'appliquèrent à le diriger dans ses études; non content de leurs leçons, il y joignoit une lecture assidue des meilleurs Livres en ce genre, que ses Professeurs se faisoient un plaisir de lui prêter: avec ces secours & celui d'une heureuse mémoire, il fit les progrès les plus rapides dans l'étude de la Médecine, & sur-tout dans l'Économie Animale, à laquelle il s'étoit particulièrement attaché. Il joignit à cette étude celle de la connoissance des maladies & des remèdes propres à chacune, & pour se perfectionner dans cette dernière partie, il suivoit assidument les Médecins dans les hôpitaux, & examinoit avec soin le traitement des différentes maladies. Il ne cultivoit pas avec moins de soin l'Anatomie; il assistoit à presque toutes les ouvertures de cadavres, & faisoit dans ces occasions sur le champ des discours sur les causes & les effets des maladies, dont les plus habiles Maîtres se seroient fait honneur.

Après avoir passé deux années à Montpellier dans de pareilles occupations, il y prit en 1716, le grade de Bachelier; mais des affaires domestiques qui l'appeloient en Provence, l'obligèrent d'interrompre son Cours, & il s'y rendit sans retardement.

Si le voyage de M. Ferrein interrompit le cours de sa licence, il n'interrompit certainement pas celui de ses études; à peine eut-il séjourné quelques jours à Marseille, où sa réputation naissante l'avoit devancée, que les Médecins & les Chirurgiens les plus fameux de cette ville vinrent le solliciter de faire, pour leur propre utilité, un Cours suivi d'Anatomie, l'assurant qu'il auroit pour ce sujet autant de cadavres qu'il jugeroit à propos: la même prière lui fut faite par M. le Bailli de Langeron, Commandant des Galères, & par les principaux Officiers de ce corps, dans la vue d'instruire & d'éclairer, par ce moyen, les Chirurgiens de l'hôpital des forçats: on peut bien juger que M. Ferrein déféra sans peine à leurs prières; c'étoit lui procurer de nouveaux plaisirs.

Il fit donc à Marseille plusieurs Cours d'Anatomie & d'opérations chirurgicales;

chirurgicales, auxquels il joignit des leçons ſur l'économie animale & ſur les maladies relatives aux opérations, & il eut l'avantage d'y voir aſſiſter les Médecins & les Chirurgiens les plus habiles, & tout ce qu'il y avoit de plus diſtingué dans la Nobleſſe & dans le Service; ce fut à de ſi utiles & de ſi brillantes occupations qu'il conſacra le temps que les affaires qui l'avoient appelé en Provence pouvoient lui laiſſer; & ce ne fut qu'après avoir ſatisfait abondamment à tout ce qu'on avoit exigé de lui qu'il retourna à Montpellier reprendre le cours de ſa licence, & recevoir le grade de Docteur.

Ce grade, dans l'Univerſité de Montpellier, ſe confère avec beaucoup d'éclat; le Profeſſeur qui donne le bonnet, prononce ordinairement un diſcours ſur quelque partie de la Médecine; M. Chicoyneau, alors Chancelier de l'Univerſité, & qui fut chargé de cette fonction, crut pouvoir changer l'uſage en cette occaſion, & au lieu de traiter dans ſon diſcours un ſujet de Médecine, il prit pour ſujet l'éloge même de M. Ferrein: cette circonſtance penſa tout gâter; la modeſtie du Récipiendaire, auquel on avoit ſoigneuſement caché cette obligeante ſupercherie, ſouffrit de telle manière, qu'il ſe troubla & eut quelque peine à ſe remettre & à prononcer le diſcours qu'il devoit faire; nous n'avons eu garde de ſupprimer cette circonſtance, les fautes que ſa modeſtie lui arracha en cette occaſion ſont une partie trop eſſentielle de ſon éloge: quelque temps après, il fut nommé pour faire, à la place de M. Aſtruc, alors abſent, les leçons que ce dernier devoit en qualité de Profeſſeur, miniſtère qu'on n'eût ſûrement pas oſé confier à un homme médiocre.

Juſque-là M. Ferrein n'avoit éprouvé que des ſuccès, mais le mérite même le plus diſtingué n'eſt pas à l'abri des revers, & il en éprouva.

En 1731 & 1732, il vaqua une chaire de Médecine & une de Chimie dans l'Univerſité de Montpellier; ſept Concurrens ſe préſentèrent, & M. Ferrein fut du nombre; il fut le premier des trois que les Juges du Concours préſentèrent au Roi, & cependant il ne fut pas choiſi; il arrive ſouvent qu'en pareille

circonſtance, des raiſons particulières ſont pencher la balance, ſur-tout quand il s'agit de décider entre le plus ou le moins de mérite, & les noms de M.rs Fizes & Marco, qui obtinrent les places, ne laiſſent aucun lieu de douter que le Miniſtère ne fût dans ce cas.

M. Ferrein fut extrêmement ſenſible à cette préférence, & il quitta ſur le champ Montpellier pour ſe rendre à Paris, où ſes talens lui avoient préparé d'illuſtres protecteurs; feu M. le Cardinal de Fleury voulut le voir, ce Miniſtre lui témoigna combien il étoit fâché de ce qu'il n'avoit pas obtenu l'une des deux chaires; & pour le conſoler plus efficacement, il lui promit de le recommander à M. Chicoyneau, alors premier Médecin, qui connoiſſoit certainement mieux que perſonne le mérite de M. Ferrein; il lui fit même offrir par M. le Garde des Sceaux (Chauvelin) d'engager le Roi à créer pour lui une nouvelle chaire à Montpellier, s'il vouloit retourner: des offres ſi flatteuſes étoient peut-être plus glorieuſes à M. Ferrein qu'il ne lui eût été d'obtenir une des deux chaires, mais il ne crut pas devoir les accepter; il avoit conçu le deſſein d'augmenter ſes connoiſſances, & ce fut dans cette vue qu'il ſollicita en 1733 la place de Médecin en chef de l'armée que le Roi envoyoit en Italie: ſa préſence n'y fut pas inutile, & ſes nombreuſes obſervations lui eurent bientôt fait reconnoître qu'il étoit facile d'établir dans les Hôpitaux militaires un ordre qui diminueroit le nombre des morts des deux tiers, la durée des maladies de moitié, & par conſéquent très-conſidérablement la dépenſe; le Miniſtre n'eut ſûrement pas lieu de ſe repentir de lui avoir confié cette place qu'il occupa juſqu'en 1735.

A peine étoit-il de retour à Paris qu'il ſe préſenta une nouvelle occaſion d'exercer ſes talens & ſon humanité; une eſpèce de fièvre peſtilentielle, connue ſous le nom de *ſuette*, déſoloit alors le Vexin, & emportoit au moins les deux tiers de ceux qu'elle attaquoit, & cela malgré tous les ſecours qu'on pouvoit leur donner; M. Ferrein y fut envoyé, bientôt ſon extrême ſagacité lui eut fait reconnoître les cauſes du mal, & la méthode qu'il donna pour y remédier fut ſi efficace, que non-ſeulement il ne perdit pas un ſeul de ceux qu'il traita, mais que la même

méthode envoyée dans plusieurs autres provinces où le même fléau se fit sentir, eut par-tout le même succès.

M. Ferrein avoit enfin pris le parti de se fixer dans la Capitale, & pour se procurer le droit d'y exercer la Médecine, il se présenta à la Faculté de Médecine; il y fut reçu Bachelier en 1736, & Licencié en 1738, ayant obtenu le premier rang dans la licence, distinction d'autant plus flatteuse qu'on la doit en partie aux suffrages de ceux qui ont droit de la disputer.

La réputation que M. Ferrein s'étoit si justement acquise, tant comme Médecin que comme Anatomiste, avoit porté son nom à l'Académie, & l'y avoit fait desirer; il fut nommé le 12 Février 1741 à la place d'Adjoint-Anatomiste, vacante par la promotion de M. Senac à celle d'Associé, & l'année suivante à celle d'Associé, qu'avoit eue feu M. Maloët; un avancement si rapide est une preuve certaine de la façon de penser de l'Académie à son égard.

Il n'avoit pas attendu jusque-là à justifier la bonne opinion que l'Académie avoit conçue de lui, il s'y étoit fait connoître par un Mémoire sur la structure & sur les vaisseaux du foie; il distingue dans chaque lobule de ce viscère deux substances, l'une corticale & l'autre médullaire, qui est recouverte par la première; il y démontre plusieurs particularités dans les vaisseaux sanguins & lymphatiques & dans les conduits biliaires; des insertions de ces vaisseaux & même des canaux biliaires dans les vaisseaux sanguins, des expansions des canaux biliaires sur le diaphragme, toutes découvertes nouvelles qui jettent un grand jour sur le cours de la bile & sur le mouvement de la lymphe dans ses vaisseaux; il joint à ses autres découvertes celle du réseau lymphatique qui enveloppe le poumon; il finit par prouver que les vaisseaux lymphatiques du foie ont une origine en partie commune avec les tuyaux biliaires, & indique à cette occasion un moyen facile de faire paroître ceux du rein, en poussant de l'air par l'uretère dans le bassinet du rein.

Deux ans après il avoit donné de nouvelles recherches sur les vaisseaux de l'œil, nommés par Vieussens, *névro-lymphatiques*. Le sang qu'on y voit dans quelques inflammations avoit fait imaginer que ces vaisseaux communiquoient avec les vaisseaux

ſanguins, recevoient d'eux la partie ſéreuſe du ſang, & ſervoient à la faire circuler dans l'organe. Ce ſyſtème étoit très-vraiſemblable; mais il n'étoit pas prouvé par le fait; M. Ferrein parvint, à force de recherches, à voir ces vaiſſeaux de l'œil dans leur état naturel, & il les démontra à l'Académie: cette recherche étoit cependant ſi difficile, que la plupart des Anatomiſtes regardoient comme impoſſible de démontrer anatomiquement ces vaiſſeaux.

Il revint encore ſur cette matière en 1741, & il conſtata l'exiſtence des artères lymphatiques. On n'avoit juſque-là connu que les veines de cette eſpèce; il aperçut dans l'œil d'un chien des tuyaux lymphatiques, qui lui parurent différens des veines; & qu'il reconnut pour les artères qu'on ſoupçonnoit. Cette découverte lui rappela celle qu'il avoit précédemment faite de vaiſſeaux ſemblables dans la matrice; il reprit ſes obſervations ſur l'un & ſur l'autre organe, & parvint à ſuivre les ramifications de ces vaiſſeaux, & à les reconnoître bien certainement pour ce qu'ils étoient réellement.

Cette même année fut marquée par un travail anatomique d'un autre genre, & qui fit le plus grand bruit dans tout le monde Phyſicien, ce fut ſon Ouvrage ſur l'organe immédiat de la voix & ſur ſes différens tons.

Tous ceux qui avoient travaillé ſur cette matière, avoient toujours regardé l'organe de la voix comme un inſtrument à vent ſeulement, quelques-uns regardoient l'ouverture de la glotte comme la bouche d'un tuyau de flûte, tandis que d'autres la comparoient à l'anche d'un hautbois; M. Ferrein fit voir que ni l'une ni l'autre de ces aſſertions n'étoit exactement vraie, & que l'organe en queſtion étoit un inſtrument d'une eſpèce mixte & toute différente de celle que nous connoiſſons.

Les deux lèvres de la glotte ſont, ſelon lui, deux véritables cordes qui, comme celles d'un violon, rendent un ſon d'autant plus grave, qu'elles ſont plus lâches, & d'autant plus aigu, qu'elles ſont plus tendues; le vent, chaſſé par le poumon, eſt l'archet qui met ces cordes en jeu; & c'eſt par leurs vibrations plus ou moins promptes, qu'elles rendent les différens tons. Les organes deſtinés à tendre ces cordes, les muſcles qui les font agir; rien,

en un mot, de ce qui peut constater cette hypothèse, n'est échappé aux recherches de M. Ferrein.

Il parvint même à faire voir le jeu de toutes ces parties sur des larynx détachés, aux lèvres de la glotte desquels il pouvoit, au moyen de fils & de chevilles, donner la tension qu'il vouloit. De ces expériences plusieurs fois répétées, il résulte que, malgré la différence d'un larynx vivant à celui qui est détaché de l'animal, la voix ou le cri des différens animaux est très-reconnoissable; que les lèvres tendineuses de la glotte également tendues, ne forment qu'un son; mais que si on les tend inégalement, ou qu'avec une pince on altère la longueur de l'une des deux, alors chaque corde vocale produit un son différent & proportionné à sa longueur ou à sa tension: en un mot, que ces cordes ont toutes les propriétés de celles des instrumens à archet. Il terminoit ce Mémoire en annonçant un autre organe qui produit certaines différences de la voix, mais il n'a jamais donné la description de ce dernier.

Les ouvrages dont nous venons de parler, étoient des preuves certaines du savoir & de la capacité de M. Ferrein en Anatomie; & la place qu'il occupoit à l'Académie, le mettoit à portée de rendre ce talent utile au Public; mais indépendamment de celui-là, il en avoit encore un autre aussi précieux, c'étoit celui d'enseigner avec netteté. Pour mettre celui-ci à profit, il fut nommé, en 1742, à la place de Professeur en Médecine & en Chirurgie au Collége Royal, vacante par la mort de M. Andry; &, non content de s'acquitter, avec le plus grand succès, de ce ministère, il faisoit encore des Cours particuliers, d'où sont sortis un grand nombre d'excellens sujets qui, devenus eux-mêmes de grands hommes, ont porté sa réputation dans toute l'Europe.

M. Ferrein méritoit d'autant mieux cette célébrité, que ses leçons n'étoient pas bornées à la seule Anatomie; mais, accompagnées de tout ce qui pouvoit instruire ses auditeurs dans la bonne pratique de la Médecine. Combien de gens doivent, sans le savoir, la santé & peut-être la vie à un Professeur de cette espèce!

Ces occupations multipliées, & la pratique de la Médecine à laquelle se livroit M. Ferrein, ne l'empêchoient pas de satisfaire

au devoir d'Académicien & de payer, en quelque ſorte, au Public, le tribut que nous nous faiſons tous honneur de lui devoir. Il donna, en 1744, deux Mémoires ſur le mouvement des mâchoires; dans le premier, il fait voir que le mouvement de la mâchoire inférieure ne ſe fait pas toujours autour des condyles ou pivots de cette mâchoire, mais que ſouvent ces condyles ſortent de la cavité où ils ſont articulés; d'où il ſuit que pluſieurs mouvemens de la mâchoire inférieure ne s'exécutent qu'au moyen d'une eſpèce de luxation naturelle qui ſe rétablit d'elle-même; & dans le ſecond, il établit, contre le ſentiment de pluſieurs célèbres Anatomiſtes, que, par la diſpoſition des muſcles, la mâchoire inférieure ne contribue pas ſeule à l'ouverture de la bouche, mais que la tête, dont la mâchoire ſupérieure fait partie, s'incline & s'élève pour coopérer à cette ouverture.

En 1749, il donna un Mémoire très-étendu ſur la ſtructure des viſcères glanduleux; il avoit déja entamé, en 1733, cette matière, comme nous l'avons dit en parlant de ſon travail ſur les vaiſſeaux du foie; il reprend ces mêmes idées, en les appliquant, non-ſeulement au foie, mais encore aux autres viſcères de même nature, & ſur-tout aux reins: il s'écarte beaucoup des idées adoptées même par les plus célèbres Anatomiſtes; il prétend que ces viſcères ne ſont compoſés ni de grains glanduleux, ni de vaiſſeaux ſanguins, mais, pour la plus grande partie, de tuyaux blancs, qu'il a diſtinctement reconnus dans les reins & qu'il croit avoir auſſi retrouvés dans le foie & dans les capſules atrabilaires; ces vaiſſeaux gardent conſtamment leur blancheur dans le temps même où les vaiſſeaux ſanguins ſont le plus gorgés de ſang, & une injection colorée très-pénétrante, que M. Ferrein a pouſſée dans ces derniers, n'a jamais pu l'altérer; preuve évidente que ces vaiſſeaux ne ſont point partie du ſyſtème des vaiſſeaux ſanguins: des grains rouges qui ſe trouvent dans le foie, paroiſſoient ſe refuſer à l'idée de M. Ferrein; un heureux haſard vint la confirmer; en diſſéquant un foie obſtrué, ces grains gonflés décélèrent leur véritable ſtructure, & il reconnut qu'ils n'étoient compoſés que de filets blancs extrêmement déliés & que leur fineſſe déroboit aux yeux dans leur état naturel. La ſtructure du

rein offrit à M. Ferrein la même composition; il y reconnut une substance corticale & une substance médullaire, mais bien plus mêlées qu'on ne pensoit. M. Ferrein trouva qu'un seul rein est composé d'environ vingt-huit parties, toutes enveloppées de leur substance corticale qui pénètre par conséquent dans l'intérieur du rein, en donnant cependant passage aux vaisseaux qui y apportent ou en remportent le sang: la même structure se retrouve dans les reins des oiseaux où elle se présente même plus facilement; enfin il résulte des observations de M. Ferrein, que la plupart des organes glanduleux du corps animal, sont composés d'un amas de vaisseaux d'une espèce particulière, & qu'on s'étoit beaucoup trompé en les regardant comme presqu'entièrement composés de vaisseaux sanguins.

Depuis 1749 jusqu'en 1766, on ne trouve plus aucun Mémoire de M. Ferrein dans les Recueils de l'Académie; ce n'étoit certainement pas qu'il se fût rallenti sur son travail ni sur l'assiduité aux assemblées, il faisoit part à l'Académie très-soigneusement des observations qu'il faisoit ou qui lui étoient communiquées; il en avoit entr'autres donné une bien singulière d'un homme qui avoit vécu & fait un voyage de plus de quatre-vingts lieues, ayant le bout d'une lame d'épée qui perçoit une des vertèbres & traversoit toute la moëlle dorsale.

La raison de l'inaction apparente de M. Ferrein, étoit le surcroît d'occupation qui lui étoit survenu en 1751 : feu M. Winslow, accablé du poids de ses années, avoit, comme nous l'avons dit dans son éloge, demandé un Coadjuteur à sa place de Professeur au Jardin du Roi, & M. Ferrein avoit été chargé de ce ministère : cette nouvelle place acheva d'occuper le temps que les fonctions de Professeur au Collége Royal, sa pratique de Médecine & les Cours particuliers qu'il faisoit, lui laissoient libre.

Il travailloit cependant, quoique plus lentement, malgré ses occupations, & il donna, en 1766, le commencement d'un grand travail sur les inflammations du foie: il en résulte que cette maladie, que la plupart des Auteurs de Médecine mettent au rang des plus rares, est très-commune, qu'elle peut exister sans tension, sans douleur & sans fièvre, qu'elle a cependant des

ſignes certains auxquels on la peut reconnoître, & que M. Ferrein indique: que le foie, contre l'opinion de très-habiles Médecins, a une grande ſenſibilité; que cette maladie eſt ſouvent produite par l'amas de mauvaiſes humeurs dans les premières voies, & que l'inégalité de force ou de vîteſſe des battemens du pouls, inégalité qui peut aller quelquefois juſqu'à l'intermittence, eſt une marque certaine de la préſence de ces humeurs & du beſoin de la purgation. M. Ferrein donne, dans le plus grand détail, tous les accidens qui peuvent procéder, accompagner ou ſuivre cette maladie, & le traitement néceſſaire pour la guérir & pour en prévenir les retours. Ce Mémoire eſt imprimé dans le volume de 1766 qui va paroître *; celui de 1767, qui le ſuivra de près, contient encore un Mémoire de M. Ferrein, dans lequel il fait voir qu'il eſt très-douteux qu'il y ait eu de véritables hermaphrodites, c'eſt-à-dire des individus qui aient réuni les deux ſexes; & que tous ceux de cette eſpèce qui ont été examinés, n'avoient que le ſexe féminin, joint à une apparence trompeuſe des parties qui caractériſent le ſexe maſculin. Le volume même de 1768, contiendra encore une obſervation importante de M. Ferrein ſur une difficulté d'avaler, dont il trouva la cauſe dans de mauvaiſes matières contenues dans l'eſtomac, & dont la préſence occaſionnoit une affection ſpaſmodique dans les nerfs des parties qui ſervent à la déglutition, & qu'il guérit, ſelon ce principe, avec la plus grande facilité.

Cette obſervation a été le dernier ouvrage que M. Ferrein ait donné à l'Académie; il commençoit dès-lors à ſe reſſentir de ſon âge & de ſes longs travaux; il avoit même été obligé de ſe déſigner un ſucceſſeur à la chaire de Médecine du Collége Royal, & l'Académie a confirmé, pour ainſi dire, le choix qu'il avoit fait en admettant, au nombre de ſes Membres, M. Portal qu'il avoit préſenté au Roi pour lui ſuccéder.

La ſanté de M. Ferrein ne paroiſſoit cependant pas ſe démentir, & il ne s'étoit, en aucune façon, ralenti ſur l'aſſiduité

* Ceci étoit vrai le 15 Novembre 1769, jour de la prononciation de cet Éloge, le Volume de 1766 n'ayant paru qu'au commencement de Décembre, & celui de 1767 en 1770.

aux

aux Aſſemblées de l'Académie, lorſqu'il fut frappé d'une attaque d'apoplexie, étant actuellement en conſultation près d'un malade pour lequel il avoit été appelé: on tenta vainement toutes les reſſources que l'art peut offrir en pareil cas; le coup étoit porté, & il mourut le 28 Février de cette année *, âgé de ſoixante-quinze ans & un peu plus de quatre mois. * 1769.

M. Ferrein paroiſſoit ſérieux & concentré dans ſes études; cependant lorſqu'il étoit avec ſes amis, il s'égayoit, racontoit plaiſamment, & ſe livroit à une raillerie aſſez fine. On lui a reproché de l'avoir quelquefois rendue amère & de n'avoir pas toujours eu aſſez d'égards pour ceux qui couroient la même carrière que lui, ou dont il croyoit avoir quelque lieu de ſe plaindre; ſa vivacité, ſon amour pour l'Anatomie, & l'eſpèce d'impatience que lui cauſoient les fautes qu'il remarquoit en ce genre, peuvent lui ſervir d'excuſe.

Dans les cours publics & particuliers qu'il a faits ſur toutes les parties de la Médecine, il ne s'eſt jamais une ſeule fois démenti, ni ſur la netteté, ni ſur la préciſion; il mettoit un ordre admirable dans ſes leçons, ne perdoit jamais ſon objet de vue, & épargnoit à ſes Auditeurs toute digreſſion qui auroit pu les écarter du ſujet principal: auſſi a-t-il compté parmi ſes Diſciples, preſque tous ceux qui occupent les principales chaires & les poſtes les plus brillans de l'Europe en ce genre, & mérité d'être mis, par un conſentement unanime, au rang des premiers Anatomiſtes de notre ſiècle; il étoit très-aſſidu auprès de ſes malades, les obſervations continuelles qu'il faiſoit ſur leurs maladies, lui avoient acquis le talent précieux de les reconnoître, quelque compliquées qu'elles puſſent être, & ſa réputation en ce genre lui attiroit une infinité de conſultations qui lui emportoient une partie conſidérable de ſon temps. On ne doit donc pas être étonné qu'il ne nous reſte que très-peu d'écrits de lui; on a cependant, indépendamment de ſes Mémoires Académiques, quelques Thèſes de Médecine, qu'on peut regarder comme des diſſertations achevées; & un petit Écrit, contenant les queſtions qu'il avoit traitées dans le temps qu'il concourut à la chaire vacante à Montpellier, &

qu'il avoit fait imprimer dans le temps: mais si la postérité ne jouit pas de beaucoup d'écrits de M. Ferrein, elle jouira des Anatomistes qu'il a formés; & la gloire qu'ils acquerront, par leurs Ouvrages, rejaillira toujours sur celui qui les a mis en état de les produire.

La place de Pensionnaire-Anatomiste de M. Ferrein a été remplie par M. Hérissant, associé dans la même classe.



ÉLOGE DE M. L'ABBÉ CHAPPE.

JEAN CHAPPE D'AUTEROCHE naquit à Mauriac, dans la haute Auvergne, le 2 Mars 1728, de Jean Chappe, Baron d'Auteroche, & de Magdeleine de la Farge, fille de Pierre de la Farge, Seigneur de la Pierre, Major du Régiment Royal des Carabiniers.

Il commença ſes études au collége des Jéſuites établi à Mauriac, & vint enſuite à Paris les continuer au collége de Louis-le-Grand, tenu alors par la même Compagnie, où il ſoutint, à la fin de ſa phyſique, une thèſe générale, avec le plus grand éclat.

On avoit remarqué en lui, dès ſa plus tendre enfance, un goût ſingulier pour le deſſin & pour les Mathématiques. Tout le temps dont on lui laiſſoit la diſpoſition étoit employé à eſſayer de lever des plans ou de faire des calculs; les amuſemens de ſon enfance étoient déjà des ouvrages ſérieux, même pour les hommes faits.

Il eut occaſion, pendant ſon cours de Philoſophie, de lier connoiſſance avec Dom Germain, Chartreux; ce ſavant Religieux reconnut bientôt le génie du jeune homme, & ſe fit un plaiſir de lui enſeigner les élémens des Mathématiques & de l'Aſtronomie; il s'y livra, & ſur-tout à cette dernière avec tant d'ardeur, que bientôt il n'y eut plus pour lui de nuits conſacrées au ſommeil, que celles où il ne pouvoit pas étudier le Ciel.

Il étoit impoſſible que des diſpoſitions ſi bien marquées échappaſſent aux regards du P. de la Tour, alors Principal de ce Collége; il crut devoir faire part à feu M. Caſſini de cette eſpèce de phénomène; celui-ci deſira voir des ouvrages du jeune homme: il en fut frappé, & conçut dès ce moment le deſſein de cultiver des talens ſi précieux: il lui fit lever les plans de pluſieurs Maiſons royales; il le fit travailler à la Carte de France; & pour mettre à profit ſon talent pour l'Aſtronomie, il lui fit traduire les Tables aſtronomiques de M. Halley, que M. l'Abbé Chappe publia en

1752, avec des additions considérables: il étoit déjà en état, non-seulement d'entendre les ouvrages de ce célèbre Astronome, mais encore de les commenter & de les étendre.

Dès l'année suivante, ses talens furent mis à une autre épreuve; le Roi ordonna la levée de plusieurs plans dans le comté de Bitche en Lorraine, & il fut chargé de la direction de ces plans & des arpentages qu'il y avoit à faire dans la forêt qui entoure cette ville.

On auroit peut-être peine à trouver un Ciel moins favorable aux Observations astronomiques que celui de la ville de Bitche, & M. l'Abbé Chappe n'avoit point d'instrumens. Son amour pour l'Astronomie fit disparoître à ces yeux ces inconvéniens; il sut se procurer un quart-de-cercle qui se trouvoit chez M. le Prince des Deux-Ponts; il vérifia cet instrument; il trouva moyen d'avoir une lunette & une pendule; & grâces à l'assiduité avec laquelle il fut pour ainsi dire à l'affût des momens favorables aux observations, il en fit assez pour déterminer la position de cette ville; espèce de conquête pour la Géographie, & fruit surnuméraire de son voyage.

Ce fut au retour de cette espèce d'expédition que M. l'Abbé Chappe se présenta à l'Académie, & qu'il y obtint, le 17 Janvier 1759, la place d'Adjoint, vacante par la promotion de M. de la Lande à celle d'Associé.

Dès l'année suivante, il se présenta une occasion de signaler ses talens & d'exercer son activité. Cette année fut remarquable, par l'apparition de deux Comètes; M. l'Abbé Chappe les observa toutes deux, avec la plus grande assiduité, & donna à l'Académie le détail de ses observations, & les élémens de la théorie de ces Comètes qu'il en avoit conclus; il y joignit des Observations suivies de la Lumière zodiacale, qu'il avoit faites en même temps, & celle d'une assez belle Aurore boréale, qui s'étoit trouvée pour ainsi dire sous sa main dans le temps de ses recherches.

Presqu'aussi-tôt après la lecture de ce Mémoire, M. l'Abbé Chappe entreprit une expédition d'une bien plus grande importance. Le passage de Vénus sur le Soleil, qui devoit arriver le 6 Juin 1761, occupoit alors tous les Astronomes. Pour tirer le

plus grand parti possible de l'Observation de ce phénomène, il falloit qu'elle fût faite en des endroits très-éloignés les uns des autres, & dont la position étoit déterminée par le calcul. L'un de ces endroits étoit Tobolsk, capitale de la Sibérie, située dans le climat le plus froid de tout l'univers connu; l'autre étoit l'île Rodrigue, espèce d'écueil presque désert, situé dans la mer des Indes. M. Pingré offrit de se rendre à ce dernier poste, & M. l'Abbé Chappe entreprit d'aller faire l'Observation à Tobolsk: l'un alloit braver l'ardeur de la zone torride, & l'autre affronter les glaces d'une région plus véritablement hyperborée que celle que les Anciens qualifioient de ce nom.

La difficulté de ce voyage étoit extrême, il falloit traverser une partie de l'Europe dans la saison la plus incommode, parce qu'une fois arrivé à Pétersbourg il falloit encore faire huit cents lieues en traîneau, espèce de voiture qui ne va que sur la neige durcie, en sorte que M. l'Abbé Chappe n'avoit rien de plus à craindre que de voir l'horrible froid qu'il alloit éprouver, se relâcher.

Ces désagrémens ne rebutèrent pas M. l'Abbé Chappe, il partit de Paris à la fin de Novembre 1760, & arriva un mois après à Vienne où il ne séjourna que huit jours; Leurs Majestés Impériales auxquelles il fut présenté par M. le Comte de Choiseul, Ambassadeur de France, l'honorèrent du plus favorable accueil & lui firent les plus vives instances pour l'engager à repasser par Vienne à son retour; il n'en reçut pas un moins favorable du Roi de Pologne auquel M. le Marquis de Paulmy, alors notre Ambassadeur en cette Cour le présenta.

Il arriva enfin à Pétersbourg le 13 Février & eut l'honneur d'être présenté à l'Impératrice par M. le Baron de Breteuil; les Astronomes Russes qui devoient aller faire l'observation en différens endroits étoient déjà partis il y avoit près d'un mois, & il n'y avoit pas un moment à perdre s'il vouloit arriver à Tobolsk avant le dégel; cependant malgré toute la vivacité qu'y mit M. l'Abbé Chappe & tous les soins que M. le Baron de Breteuil & M. le Comte de Voronzof, Grand Chancelier de Russie, se donnèrent pour hâter son départ, il ne put partir que le 10

Mars 1761, riſquant d'être ſurpris par le dégel au milieu des vaſtes forêts de la Sibérie ou d'être accablé dans les défilés des montagnes par des maſſes énormes de neige qui s'en détachent alors; la vue de tous ces dangers & les incommodités d'un voyage fait en traîneau dans ces déſerts & par le froid le plus rude, n'effrayèrent point l'intrépide Académicien & il oſa les affronter.

Le ſuccès répondit à ſon courage, & malgré tous les accidens qu'il éprouva, il arriva à Tobolsk le 10 Avril, ayant fait environ huit cents lieues depuis ſon départ de Péterſbourg & plus de quinze cents depuis qu'il étoit parti de Paris.

Il étoit temps que ſon voyage finît, le dégel étoit ſi proche que ſix jours après ſon arrivée la débacle ſe fit avec une inondation conſidérable; la rivière d'Irtiz ſur laquelle Tobolsk eſt bâtie, couvrit une grande partie de la baſſe ville; on peut juger du riſque qu'il auroit couru ſi cette fonte de neiges & de glaces l'eût ſurpris quelques jours auparavant dans les déſerts ou dans les montagnes qu'il venoit de traverſer.

Auſſitôt après ſon arrivée il alla préſenter les ordres de l'Impératrice à M. Iſmaëlof, Gouverneur de cette ville, auquel le public doit une très-bonne Carte de la mer Caſpienne; cet Officier fut charmé de donner en cette occaſion des marques de ſon zèle pour les Sciences dont il connoiſſoit d'autant mieux l'utilité qu'il les cultivoit lui-même; il donna auſſitôt ſes ordres pour la conſtruction d'un Obſervatoire, qui ne put cependant, malgré toute l'activité qu'on y mit, être fini que le 11 Mai; M. l'Abbé Chappe y fit auſſitôt porter ſes inſtrumens & il y obſerva une éclipſe de Lune & une de Soleil; cette dernière étoit d'autant plus importante qu'elle devoit donner la longitude de Tobolsk qu'on ne pouvoit obtenir de l'obſervation des ſatellites de Jupiter dans un climat où dans cette ſaiſon le Soleil éclaire preſque continuellement.

Le 5 Juin, tout fut diſpoſé pour l'obſervation, mais le Ciel ſe couvrit pendant la nuit; on peut juger de la ſituation de M. l'Abbé Chappe qui ſe voyoit arracher, pour ainſi dire des mains, le fruit d'un ſi terrible voyage, entrepris uniquement pour cet objet.

Il en fut cependant quitte pour la peur, le Ciel ſe découvrit

au moment de l'observation, & elle fut faite avec toute la précision possible, l'Académie en a publié le détail dans ses Mémoires, & cette observation a été un des plus solides fondemens de la détermination de la parallaxe du Soleil.

M. l'Abbé Chappe resta environ trois mois à Tobolsk après son observation, pour déterminer exactement la latitude de cette ville & pour s'assurer de l'état de ses instrumens, précaution nécessaire pour ne rien laisser en arrière qui pût altérer la certitude de ses opérations.

Jusque-là la force du tempérament de M. l'Abbé Chappe avoit résisté aux fatigues & à la rigueur du climat, mais à peine eut-il fini ses travaux qu'un vomissement de sang accompagné d'une foiblesse accablante, vinrent l'avertir qu'il devoit se hâter de partir.

Il partit en effet & prit sa route par Katerinburg, plus au sud que le chemin qui l'avoit amené à Tobolsk, & y arriva après avoir traversé une plaine de cent lieues, si marécageuse qu'il étoit obligé de se faire précéder par un Soldat, qui sondoit le terrein & le rendoit praticable en y jetant des fascines, c'étoit à la lettre faire son chemin & non pas seulement le parcourir; il eut besoin dans cette route d'une escorte qui pût le mettre à couvert du brigandage qu'y exerçoient alors des déserteurs Russes; ce n'étoit pas assez d'être exposé aux dangers de cet affreux climat, il falloit encore qu'il le fût à ceux dont le menaçoit la méchanceté des hommes.

C'est à Katerinburg ou dans son voisinage que s'exploitent presque toutes les mines que les Russes ont mises en valeur, M. l'Abbé Chappe n'oublia pas de les visiter, après quoi il partit de cette ville & arriva à Casan le 1.er Octobre, ayant employé pendant toute cette route quarante-deux chevaux distribués sur deux voitures & cinq chariots, preuve assez complette de la difficulté des chemins.

Casan est la capitale du royaume du même nom, dépendant de l'empire de Russie; elle est placée vers les 55 ou 56 degrés de latitude septentrionale, cependant quoique l'hiver y commençât alors, M. l'Abbé Chappe se crut en y arrivant, transporté dans le climat

le plus tempéré; on peut juger par-là de celui qu'il venoit de quitter: il fit à Casan quelques observations astronomiques qui en déterminèrent exactement la longitude & la latitude, mais l'hiver qui s'approchoit ne lui permit pas d'y faire un long séjour & l'obligea de hâter son départ.

Nous ne pouvons cependant passer sous silence un phénomène d'un autre genre qu'il y observa; le Prélat combla de politesse M. l'Abbé Chappe, qui trouva en lui un homme instruit dans les Sciences, l'Histoire & la Littérature, aussi étoit-il respecté dans toute la Russie, c'étoit le seul Prêtre Russe qui n'eût pas été étonné qu'on fût venu de Paris observer Vénus à Tobolsk; le reste de la route de M. l'Abbé Chappe n'offre plus rien de particulier, il arriva à Péterſbourg sans accident fâcheux & y passa l'hiver.

Ce fut pendant son séjour dans cette capitale que l'Impératrice de Russie fit tous ses efforts pour l'attacher à son service, elle lui fit offrir la même place que feu M. de l'Isle avoit autrefois occupée, mais quelque avantageuses que fussent les offres de cette Princesse, l'amour de M. l'Abbé Chappe pour sa patrie & son attachement pour son Roi ne lui permirent pas de les accepter; il ne resta à Péterſbourg que jusqu'au moment où le printemps eut rendu la mer libre & s'embarqua pour revenir en France, où il arriva au mois d'Août 1762, ayant employé près de deux ans à son voyage.

On ne s'imagineroit pas aisément que la difficulté des routes & l'espèce de précipitation avec laquelle il étoit presque toujours obligé de voyager lui eussent pu permettre de faire des observations en chemin: il en faisoit cependant, & de toute espèce; celles du baromètre lui ont, par exemple, fourni un moyen de former une espèce de nivellement de toute sa route, dont il a donné une coupe; il en résulteroit que le terrein de la Sibérie, du moins dans l'endroit où il l'a parcourue, est beaucoup moins élevé qu'on ne l'avoit cru jusque-là; nous disons il en résulteroit, car le peu de temps & le peu de commodité qu'avoit eu M. l'Abbé Chappe, pour faire ces Observations, qui exigent beaucoup plus d'attention qu'on ne pense, ne permet pas d'accorder à ce résultat la même confiance

confiance qu'à ses autres Observations. Il examinoit par-tout la nature du terrein & ses productions, les rivières, les fontaines; les montagnes, les volcans, les mœurs & les coutumes des habitans, les animaux, les minéraux; en un mot, tout ce qui pourroit servir à donner une entière connoissance du vaste empire de Russie; il rassembloit même des Mémoires sur les régions qu'il n'avoit pu parcourir, & ne négligeoit rien pour être bien instruit de tout ce qui pouvoit avoir rapport à cet objet.

Aussitôt après son retour en France, il s'occupa à rassembler tous ces matériaux, & en forma une relation de son voyage, ornée de Cartes, de plans, de profils, de vues & de toutes les autres planches nécessaires à l'intelligence de cet Ouvrage, qui parut en trois volumes *in-quarto*, en l'année 1768. A voir l'immense quantité d'Observations de tout genre, contenue dans cet Ouvrage, on seroit tenté de le regarder moins comme celui d'un Académicien, que comme celui d'une Académie; encore faudroit-il la supposer aussi Académie de Belles-Lettres, du moins si l'on fait attention à la quantité de morceaux intéressans sur l'Histoire & l'origine des différens peuples de ce vaste Empire, qui y sont contenus.

Ce travail occupa M. l'Abbé Chappe depuis son retour de Sibérie, presque jusqu'au temps de son départ pour la Californie; il ne négligeoit cependant aucune des fonctions d'Astronome, & n'en étoit pas Observateur moins assidu. Les volumes de l'Académie, & plus encore les registres de l'Observatoire, peuvent faire voir qu'il y avoit peu de phénomènes célestes qui lui échappassent. On peut entr'autres citer quatre années entières d'observations des éclipses de satellites qu'il avoit fait: il y avoit joint des observations de Mercure, & entr'autres une qu'il avoit faite au méridien, en obscurcissant le cabinet d'observation, & alongeant le tuyau de la lunette avec un bout de tuyau de deux pieds, qui avoit à son extrémité un diaphragme de six lignes d'ouverture; observation qui mérite d'autant plus d'attention que cette ingénieuse méthode pourra peut-être multiplier les observations de cette planète au méridien, & contribuer à la perfection de sa théorie.

Il donna à l'Académie, en 1767, une Obſervation d'un genre différent. On eſt aujourd'hui convaincu que le tonnerre & l'électricité ne ſont qu'une ſeule & même choſe; quelques Phyſiciens avoient avancé que dans certaines circonſtances une partie du trait de feu partoit du corps frappé de la foudre & l'autre de la nuée; mais on leur avoit conteſté ce fait. M. l'Abbé Chappe avoit obſervé ce phénomène à Tobolsk, mais il voulut s'en aſſurer plus poſitivement, & il profita pour cela d'un orage qui arriva à Paris le 6 Août 1767: il fut ſervi à ſouhait; il vit diſtinctement s'élever un trait de feu du pied d'un mât, placé à environ trente-deux toiſes de l'Obſervatoire, où il étoit avec M.rs Caſſini fils & de Prunelay; ce trait de feu en joignit un venant de la nuée; & ce fut au moment de cette jonction que ſe fit l'exploſion; nouvelle preuve que le tonnerre ne diffère que par la force, de l'électricité des globes de verre, & qu'il agit préciſément comme elle. Nous avons rendu compte de cette ſingulière Obſervation dans l'Hiſtoire de l'Académie *.

* *Voy. Hiſt. 1767, p. 31.*

Ce Mémoire eſt le dernier que M. l'Abbé Chappe ait donné à l'Académie, ſi on en excepte cependant ſon obſervation de l'Éclipſe de Lune du 4 Janvier 1768, il étoit dès-lors occupé des préparatifs du nouveau voyage qu'il méditoit.

Vénus qui avoit paſſé ſur le Soleil le 6 Juin 1761, devoit y paſſer encore le 3 Juin 1769, on étoit ſûr d'avoir d'excellentes obſervations faites dans le nord-eſt de l'Europe, mais il falloit en avoir qui fuſſent faites au ſud oueſt ſur la côte la plus occidentale de l'Amérique, & le calcul indiquoit pour un des endroits les plus favorables, le cap San-Lucar à la pointe de la Californie, c'en fut aſſez pour déterminer M. l'Abbé Chappe à s'offrir pour y aller faire l'obſervation; ſon offre fut acceptée, & après s'être pourvu de tous les inſtrumens néceſſaires, il partit de Paris pendant les vacances de 1768 pour ſe rendre à Cadiz où il devoit s'embarquer ſur un vaiſſeau de la flotte Eſpagnole qui alloit à la *Vera-crux*; mais l'armement de ce navire n'allant pas aſſez vîte au gré de ſon impatience, il oſa riſquer de traverſer l'océan ſur un petit bâtiment qui n'avoit que huit hommes d'équipage, ſa hardieſſe

lui réussit, il arriva heureusement à la *Vera-crux* & passa de-là à Mexique, où les ordres de M. le Marquis de Croix, Vice-roi de cet empire, secondèrent si bien son activité, qu'il fut rendu à San-Lucar de Californie dix-neuf jours avant l'observation; il profita de cet intervalle pour s'y disposer & la fit effectivement avec le temps le plus favorable; c'est-là tout ce que nous en savons jusqu'à présent, n'ayant pas encore reçu les papiers de M. l'Abbé Chappe que M. Pauli, Ingénieur françois, le seul de sa suite qui lui ait survécu, s'est chargé de remettre à l'Académie *.

Il régnoit alors dans ce canton de la Californie une maladie épidémique dangereuse; trois jours après l'observation, M. l'Abbé Chappe en fut attaqué & aucun des siens n'en fut exempt; il auroit pu cependant en échapper si son zèle ne lui eut pas fait commettre une imprudence qui lui coûta la vie; il étoit mieux & dans une espèce de convalescence, il voulut absolument passer la nuit à observer une Éclipse de Lune qui arrivoit le 18 Juin; cette fatigue lui occasionna une rechute de laquelle il mourut le 1.er Août 1769, âgé de quarante-un ans & quelques mois; trois jours avant sa mort il disoit, *je sens bien qu'il faut finir & que je n'ai que peu de temps à vivre, mais j'ai rempli mon objet & je meurs content;* ces mots peignent bien vivement son amour pour l'Astronomie & son attachement à son devoir.

Il étoit au reste parfaitement déterminé avant son départ à courir tous les risques de ce voyage; la veille du jour qu'il partit de Paris, étant à souper chez M. le Comte de Mercy, Ambassadeur de l'Empereur, quelqu'un de la compagnie essaya de le détourner de son dessein en lui représentant les risques qu'il auroit à courir, il répondit avec fermeté que la certitude de mourir le lendemain de l'observation ne seroit pas un motif suffisant pour l'empêcher de partir.

M. l'Abbé Chappe étoit de taille médiocre, assez replet, d'un tempérament robuste & très-vif; il avoit une ame simple,

* Ceci étoit vrai le 14 Novembre 1770, que cet Éloge fut prononcé; mais l'Académie a reçu depuis ces papiers, dans lesquels elle a trouvé le détail le plus complet & le plus satisfaisant de l'observation.

libre & franche & un cœur noble, droit & plein de candeur; il étoit naturellement gai, ſocial & porté à l'amitié; il étoit lié avec ce qu'il y avoit de plus grand, le Roi même daignoit ſouvent s'entretenir avec lui & a honoré ſa mort de ſes regrets; jamais perſonne n'a été plus déſintéreſſé que lui, il aimoit la gloire, mais il ne vouloit l'obtenir qu'à bon titre; il vouloit mériter ſes faveurs & non pas les dérober; ſon courage & ſa fermeté étoient ſans bornes, ce que nous avons dit de lui en fournit plus d'une preuve; il eût été ſeulement bien à deſirer que la dernière qu'il en a donnée & qui mérite tant d'éloges, lui eût été moins funeſte.

La place d'Adjoint-Aſtronome de M. l'Abbé Chappe, a été remplie par M. Meſſier, Aſtronome de la Marine, & de la Société Royale de Londres.



ÉLOGE DE M. JARS.

GABRIEL JARS, de l'Académie des Arts, établie à Londres, & de celle des Sciences, Belles-Lettres & Arts de Lyon, naquit à Lyon le 26 Janvier 1732, de Gabriel Jars, intéreſſé dans les mines de Saint-Bel & de Cheiſſey, & de Jeanne-Marie Valioud, tous deux d'ancienne & honnête famille. Il étoit le cadet de ſix enfans, trois garçons & trois filles; ſes deux aînés ont ſuivi comme lui le travail des mines, & ſe ſont diſtingués dans cette laborieuſe carrière.

M. Jars, dont nous faiſons l'éloge, fit ſes premières études au grand Collége de Lyon, & il s'y étoit déjà diſtingué lorſque M. ſon Père commença l'exploitation des mines de Saint-Bel & de Cheiſſey, & il crut y devoir appeler ſon fils pour eſſayer ſes talens.

Cet eſſai fut ſuivi du plus grand ſuccès, les diſpoſitions que M. Jars avoit reçues de la Nature n'attendoient qu'une occaſion pour ſe développer; la vue des mines, des travaux & des établiſſemens néceſſaires à leur exploitation le rendirent Métallurgiſte, & bientôt il fallut modérer cette ardeur & l'empêcher de paſſer la plus grande partie de ſon temps dans les ſouterreins: l'envie de s'inſtruire lui faiſoit oublier le danger auquel il expoſoit ſa vie & ſa ſanté. Cette eſpèce de phénomène parvint juſqu'aux oreilles de feu M. de Vallière; à ſon paſſage à Lyon, il voulut voir le jeune homme, & en fut ſi content qu'il jugea néceſſaire de l'envoyer à la Capitale, pour y cultiver des talens ſi marqués & ſi précieux, & dès ce moment il devint en quelque ſorte l'Élève de l'État.

M. Trudaine, auquel M. de Vallière avoit fait connoître les talens & la bonne volonté de M. Jars, ſeule bonne recommandation auprès de lui, & qui protégeoit ouvertement l'établiſſement des mines du Lyonnois, le fit entrer à l'école des Ponts & Chauſſées, pour y prendre les connoiſſances qui lui étoient

néceſſaires, & il y apprit le Deſſin & les Mathématiques, en même temps qu'on lui faiſoit faire un cours de Chimie qui pût le mettre au fait des véritables principes de la Métallurgie, à laquelle il ſe deſtinoit. Au bout de deux années employées à ce travail il fut envoyé par le Gouvernement aux mines de plomb de Poulawen en Bretagne; il y donna des preuves ſi marquées de ſa capacité, par les plans & les Mémoires qu'il envoya, qu'on n'héſita point à le renvoyer l'année ſuivante viſiter dans la même province les mines de Pontpean: & en Anjou celles de charbon de terre, qui ſont aux environs d'Ingrande; très-peu de temps après il fut chargé d'aller en Alſace viſiter les mines de Sainte-Marie-aux-mines & de Giromagny, deſquelles il envoya des plans accompagnés de Mémoires détaillés; de-là il retourna aux mines de Saint-Bel & de Cheiſſey: ſa préſence y valut un grand fourneau à raffiner le cuivre, qui procura aux entrepreneurs une économie conſidérable; il a depuis communiqué la deſcription de ce fourneau à l'Académie, qui l'a deſtinée à paroître dans ſes Mémoires de 1769 *; il ajouta à la conſtruction de ce fourneau celle de pluſieurs autres, dont l'utilité qu'on éprouve tous les jours eſt un nouveau motif de regretter ſa perte.

* V. les Mém. p. 589.

M. Jars avoit à peine demeuré un an à Paris, lorſqu'il reçut ordre d'aller en Allemagne viſiter les mines de Saxe, d'Autriche, de Bohème, de Hongrie, du Tirol, de la Carinthie & de la Styrie: ce voyage dura trois ans, & le fruit en fut une grande quantité de bons Mémoires ſur tous les objets qu'il avoit obſervés.

Ce fut au retour de ce voyage que M. Jars ſe préſenta pour la première fois à l'Académie, & qu'il y lut pluſieurs Mémoires qui le firent connoître & lui valurent le titre de Correſpondant, qu'il obtint le 10 Janvier 1761; ce fut auſſi à peu près en ce même temps qu'il fut reçu Aſſocié de l'Académie Royale des Sciences, Belles-Lettres & Arts de Lyon; il alla enſuite faire un tour aux mines de Saint-Bel & de Cheiſſey, où il fit conſtruire un martinet pour battre le cuivre; il ſe ſut bon gré dans cette occaſion d'avoir employé quelque temps à l'étude des Mathématiques.

Pendant qu'il étoit à Cheiſſey, il reçut ordre de ſe rendre en

Franche-Comté, pour y travailler à la recherche des mines de charbon, & il employa une année entière à cette recherche.

A peine étoit-il de retour de ce voyage, qu'on l'envoya en Angleterre pour y acquérir de nouvelles connoissances; car on ne le laissoit pas long-temps oisif: il en rapporta plusieurs observations importantes, entr'autres le procédé par lequel on obtient le *minium* qui étoit presque inconnu parmi nous, ou au moins entre les mains d'un petit nombre d'Artistes qui en faisoient un secret. Pendant son séjour en Angleterre il fut admis comme Associé-étranger à l'Académie des Arts établie à Londres.

Nous n'avons pas parlé jusqu'ici d'une autre occupation de M. Jars pendant ses voyages, c'étoit l'étude de la Langue des différens pays où il se trouvoit, connoissance d'autant plus nécessaire qu'il avoit principalement à traiter avec des gens qui n'entendoient que la leur, ou plutôt leur espèce de jargon, plus difficile à entendre que la Langue même; c'étoit à ce travail qu'il employoit les momens que ses observations lui laissoient libres.

Jusque-là M. Jars n'avoit encore pour ainsi dire que préludé à ses voyages; le Ministère lui en fit entreprendre un en 1766 d'une bien plus grande étendue; il fut envoyé pour visiter la plus grande partie des mines du Nord; il demanda pour adjoint dans ce voyage le second de ses frères, qui avoit étudié comme lui la Métallurgie. On pourroit croire, & même sans lui faire tort, que la tendre amitié qu'il avoit pour ce frère avoit dicté cette démarche; mais du caractère dont étoit M. Jars, nous pouvons presqu'assurer qu'il auroit préféré un autre à son frère, s'il l'avoit cru plus capable de contribuer au succès de son voyage.

Les deux Voyageurs partirent bien munis de recommandations, & sachant que leur arrivée étoit annoncée aux Ministres du Roi, par-tout où ils devoient aller: ils visitèrent d'abord la Hollande & ses manufactures; de-là ils passèrent au pays d'Hanovre & dans les montagnes du Hartz, où ils séjournèrent quatre mois; ils parcoururent une partie de la Saxe & du comté de Mansfeld, d'où ils passèrent à Hambourg, & de-là à Copenhague aux mines d'argent de Koenisberg en Norwège, & enfin en Suède. Nous

ne pouvons paſſer ici ſous ſilence l'accueil qu'ils reçurent du Prince Royal de Suède; ce Prince avoit eu l'attention de faire prévenir les Profeſſeurs d'Upſal de leur arrivée, & lui & Leurs Majeſtés Suédoiſes leur firent l'honneur de s'entretenir long-temps avec eux ſur les objets de leur voyage; la gloire du Prince Royal * eſt trop chère à l'Académie, pour qu'elle puiſſe négliger de faire part au public de ce nouveau témoignage de ſon amour pour les Sciences, & de lui en marquer ici ſa reconnoiſſance.

On peut aiſément juger des riſques, des périls & des peines qu'entraînoit un pareil voyage. La difficulté des chemins, les horreurs des hivers du Nord; les fréquentes occaſions de deſcendre au fond des mines les plus profondes, & d'aller arracher, pour ainſi dire, le ſecret de la Nature au fond des entrailles de la terre; rien ne put rebuter les courageux Obſervateurs, & le deſir de s'inſtruire & de ſervir leur Roi & leur patrie aplanirent toutes ces difficultés. Le fruit de cette ſavante caravane fut conſigné au Conſeil dans ſeize Mémoires; après quoi les deux frères ſe ſéparèrent; le Cadet retourna à Saint-Bel, & celui dont nous faiſons l'éloge revint à Paris; il eut pour récompenſe de ce voyage un Département, que M. Trudaine engagea M. le Contrôleur général à lui donner.

Nous voici enfin arrivés à l'endroit de la vie de M. Jars qui intéreſſe le plus l'Académie. Peu de temps après ſon retour, la mort de M. Baron y fit vaquer une place de Chimiſte; malgré les Concurrens redoutables qu'avoit M. Jars, il oſa entrer en lice; les voix furent balancées entre M. Lavoiſier & lui; & l'Académie eut la ſatisfaction de les voir tous deux agréés par le Roi le 19 Mai 1768.

M. Jars ne fut pas plutôt admis parmi nous, qu'il voulut juſtifier le choix de l'Académie, par pluſieurs Mémoires qu'il lut dans ſes aſſemblées; ſon élection avoit été précédée par deux autres qu'il avoit lûs, l'un ſur le procédé des Anglois pour faire l'huile de vitriol, fruit de ſon voyage en Angleterre; & l'autre ſur la ſéparation des métaux.

* Aujourd'hui Roi de Suède.

Auſſitôt

Auſſitôt après ſa réception il lut un Mémoire ſur la circulation de l'air dans les mines. Une obſervation ſingulière faite dans les mines de Cheiſſey fut l'occaſion de ce travail; il y remarqua que le courant d'air qui s'établiſſoit dans les galeries, par leur ouverture & par les puits de reſpiration, avoit en hiver une direction abſolument contraire à celle qu'il prenoit en été, & il trouva la cauſe de ce ſingulier phénomène: l'air contenu dans les galeries & les puits, conſerve toujours à peu près le même état & la même température; tandis que celui de dehors varie extrêmement de l'hiver à l'été: en hiver, où l'air extérieur eſt plus peſant, la colonne qui entre par l'ouverture des galeries, & qui eſt la plus longue, chaſſe l'air contenu dans le puits de reſpiration & le fait ſortir par ſon ouverture, au lieu qu'en été l'air extérieur étant plus léger, celui du puits qui ſe trouve le plus peſant, chaſſe l'air de la mine par l'ouverture de la galerie.

De ce principe, il tire la raiſon du ſingulier phénomène qu'on obſerve dans quelques mines où les ouvriers ne peuvent travailler dans le printemps ni dans l'automne, parce qu'ils y manquent d'air, quoiqu'ils y en trouvent ſuffiſamment pendant l'hiver & pendant l'été; & ce qui eſt bien plus important, les moyens de procurer de l'air dans les mines, & d'en écarter les vapeurs pernicieuſes & meurtrières qui ne s'y trouvent que trop ſouvent. Ce Mémoire paroîtra dans le Volume de 1768, actuellement ſous preſſe *. Il lut encore au mois de Juin dernier, la deſcription du fourneau d'affinage, duquel nous avons déjà parlé. Il ignoroit alors, & nous l'ignorions nous-mêmes, que ce Mémoire ſeroit le dernier qu'il liroit à l'Académie. Il fut chargé au mois de Juillet d'aller viſiter différentes manufactures du Royaume; il parcourut celles du Berry & du Bourbonnois, & paſſa en Auvergne dans le même deſſein; c'étoit-là que la fin de ſa vie étoit marquée. Dans une des courſes qu'il étoit obligé de faire à cheval pendant les ardeurs de la canicule, il fut frappé d'un coup de ſoleil; M. de Monthion, Intendant de la Province, s'empreſſa de lui faire procurer tous les

* Ceci étoit vrai le 25 Avril 1770, jour de la prononciation de cet Éloge, le Volume de 1768 étant alors prêt à paroître.

ſecours de l'art, mais ces ſecours furent inutiles, & il mourut le 20 Août, troiſième jour de ſa maladie, muni des Sacremens de l'Égliſe, & avec une réſignation & une tranquillité dignes d'un Philoſophe Chrétien.

Les deux Mémoires dont nous venons de parler n'étoient pas les ſeuls Ouvrages qu'il deſtinât à l'Académie; il s'en eſt trouvé pluſieurs dans ſes papiers, deſquels il avoit déjà communiqué quelques-uns à l'Académie avant que d'en être Membre, & d'autres abſolument neufs; du nombre de ces derniers eſt un Mémoire ſur la manière de préparer le charbon de terre, pour le rendre propre à la fonte des mines; cet Ouvrage n'avoit pas été achevé par M. Jars, il n'a été fini que depuis ſa mort par M. ſon Frère, qui l'a envoyé à l'Académie; les autres étoient en état d'être lûs, & l'ont effectivement été depuis ſa mort: la ſéance qui précéda la ſemaine ſainte, fut en grande partie remplie par un de ces Mémoires; c'eſt ainſi que M. Jars a été Académicien long-temps même après ſa mort.

Le peu de temps qu'il a vécu ne lui a pas permis de publier d'autres Ouvrages que ceux dont nous venons de parler, & qui trouveront place dans les recueils de l'Académie. On a cependant de lui la deſcription d'une machine, exécutée aux mines de Schemnitz, imprimée dans le cinquième Volume des Savans étrangers *, & la manière de fabriquer la brique & la tuile uſitée en Hollande, imprimée dans les deſcriptions des Arts & Métiers, publiées par l'Académie. Le reſte de ſes Mémoires n'avoit pas encore été rédigé, & ce ſera par l'organe d'un frère digne de lui qu'ils parviendront à l'Académie & au public.

* *Page 67.*

Il s'étoit procuré une collection précieuſe des pièces qu'il avoit recueillies dans ſes voyages, & nous ne pouvons trop tôt informer le Public qu'elle ſera dépoſée à la réſidence de M. ſon Père, pour ſervir à l'inſtruction & à la curioſité des Voyageurs qui viendront aux mines.

Le caractère de M. Jars étoit doux & ſimple; il vivoit très-retiré & très-ſobrement, il ne prenoit part que par complaiſance à ce qu'on nomme amuſement dans le monde: ſa converſation

étoit gaie, ſur-tout lorſqu'il parloit de ſes occupations; hors de-là il étoit abſolument concentré dans ſon cabinet. Cette conſtante application avoit été une puiſſante barrière contre la corruption des mœurs; auſſi les ſiennes n'avoient-elles jamais été même le plus légèrement effleurées par le vice. Son ame étoit extrêmement ſenſible & toujours prête à s'attendrir ſur les malheureux qu'il ſoulageoit ſouvent aux dépens même de ſon néceſſaire; en un mot, ſon caractère, ſes talens & ſes ouvrages ſont également regretter qu'il ait été enlevé par une mort ſi précipitée, & pour ainſi dire au milieu de ſa carrière.



ÉLOGE
DE M. LE DUC DE CHAULNES.

MICHEL-FERDINAND D'ALBERT D'ALLY, Duc de Chaulnes, Pair de France, Chevalier des Ordres du Roi, Lieutenant général des ses armées, Gouverneur & Lieutenant général pour Sa Majesté en la province de Picardie, & pays reconquis d'Artois, Gouverneur particulier des villes & citadelles d'Amiens & de Corbie, & Capitaine-lieutenant des Chevaux-légers de la garde du Roi, naquit à Paris le 30 décembre 1714, de Louis-Auguste d'Albert d'Ally, Pair & Maréchal de France, Chevalier des Ordres du Roi, Capitaine-lieutenant des Chevaux-légers de sa garde, & de Marie-Anne-Romaine de Beaumanoir, fille du marquis de Lavardin, Chevalier des Ordres du Roi, Lieutenant général de ses armées, & au gouvernement de Bretagne, & son Ambassadeur extraordinaire à Rome.

Il marqua dès sa plus tendre jeunesse beaucoup de facilité pour apprendre, & une grande justesse d'esprit; fondement, & si l'on veut, présage certain du goût qu'il devoit avoir un jour pour les hautes Sciences.

Le jeune comte de Chaulnes, car ce fut le premier titre qu'il porta, étoit cadet de trois frères & de trois sœurs, tous morts long-temps avant lui. Il fut destiné dès l'enfance à l'état ecclésiastique, & pourvu à l'âge de sept ans d'un canonicat de Strasbourg, mais la mort de M. le duc de Picquigny son frère, arrivée dix ans après, fit changer sa destination; il remit son canonicat, & entra en 1732 dans les Mousquetaires, d'où il ne sortit que pour passer à la Cornette des Chevaux-légers de la garde, dont il reçut le brevet en 1733, avec la commission de Mestre-de-camp de Cavalerie; il est qualifié dans ce brevet de Vidame d'Amiens, l'un des titres de sa maison.

Dès la fin de la même année il servit au siége de Kell, comme Aide-de-camp du Maréchal de Berwick, & se trouva, un an après,

à celui de Philiſbourg. L'année ſuivante fut marquée par une continuation de ſervices, & par une augmentation de dignité militaire: il fit la campagne de cette année, & fut pourvu de la place de Capitaine-lieutenant des Chevaux-légers, de laquelle M. le Maréchal ſon père ſe démit en ſa faveur; il eſt nommé dans le brevet duc de Picquigny, titre qu'il avoit pris depuis la mort de ſon frère aîné; la paix qui termina cette guerre, ſuſpendit pour quelques années les effets de ſon zèle & ſes ſervices: pendant le cours de cette paix il fut fait Brigadier de Cavalerie des armées du Roi.

La guerre s'étant rallumée, il fit en 1742 la campagne de Bohème, & ſe trouva comme volontaire au ſiége de Prague, car il ſe faiſoit un devoir de ſaiſir avec empreſſement toutes les occaſions de ſervir; l'année ſuivante il ſe trouva à l'affaire de Dettinguen, où il reçut deux coups de feu dans ſes armes; il eut part aux ſiéges de Menin, Ypres, Furnes & Fribourg; il fut honoré pendant cette campagne de la Croix de Saint-Louis, du titre de Gouverneur des villes & citadelles d'Amiens & de Corbie, & du grade de Maréchal-de-camp. Après tout ce que nous venons de dire, le public eſt en état de juger s'il avoit bien mérité toutes ces diſtinctions.

Juſque-là M. le Duc de Chaulnes n'avoit ſervi que comme Meſtre-de-camp ou comme Officier général, il ſervit en 1745 comme Aide-de-camp du Roi; ce Monarque le chargea au commencement de la bataille de Fontenoy de faire établir ſur la rive gauche de l'Eſcaut une batterie de gros canons qu'il avoit propoſée la veille, & qui fit en effet une terrible exécution ſur l'aile gauche de l'armée ennemie, & dans la même bataille il fit avancer à la tête de la Maiſon du Roi, quatre pièces de campagne pour rompre la colonne angloiſe, ce qui fut ſuivi du plus grand ſuccès, après cette victoire il accompagna le Roi aux ſiéges de la ville & de la citadelle de Tournai dont la priſe termina la campagne.

L'année ſuivante M. le Duc de Chaulnes ſe trouva au ſiége d'Anvers & à celui de Namur, pendant ce dernier, étant de tranchée il prit en plein jour le fort Ballard & y fit priſonniers un Capitaine, un Lieutenant & trente-deux hommes qui le défen-

doient; il se trouva à la bataille de Raucoux, & en 1747 à celle de Lawfeld, ce fut la dernière opération de cette guerre à laquelle il eut part, la paix d'Aix-la-chapelle y ayant mis fin en 1748.

Pendant tout le cours de cette guerre & de la précédente il avoit été plusieurs fois nommé Commissaire du Roi pour les échanges des prisonniers & avoit été chargé de plusieurs autres négociations délicates qui étoient une preuve sans replique de la confiance qu'il s'étoit acquise, ce fut aussi pendant ce même temps qu'il fut reçu au Parlement en qualité de Duc & Pair par la démission de M. le Maréchal de Chaulnes en sa faveur: à la fin de sa dernière campagne il fut fait Lieutenant général des Armées du Roi, avec une pension de six mille livres que le Roi lui accorda pour récompenser les services qu'il lui avoit rendus comme Aide-de-camp, & peu de temps après il fut nommé pour assister comme Commissaire du Roi aux États de Bretagne.

La guerre s'étant encore rallumée, il servit dans l'armée de Westphalie, & se trouva à la bataille d'Hastembeck le 26 Juillet 1757. Le Roi lui avoit accordé, dès 1751, une place de Chevalier de ses Ordres, & en 1752 le Gouvernement de Picardie & d'Artois, vacant par la mort du Prince Charle de Lorraine; c'est ainsi que la vie militaire de M. le Duc de Chaulnes offre une longue suite de services rendus par un sujet fidèle & zélé, & de récompenses honorables dispensées par un Monarque équitable & bienfaisant.

Jusqu'ici nous n'avons considéré M. le Duc de Chaulnes que sous ce seul point de vue, encore n'en avons-nous présenté le tableau intéressant que dans un raccourci qui lui fait tort, pour venir plus promptement à un autre genre de mérite qui nous intéresse plus particulièrement, & pour le peindre comme Académicien.

Nous disons comme Académicien, car il l'étoit en effet & dans toute l'étendue qu'on peut donner à ce mot, il avoit obtenu parmi nous en 1743 la place d'Honoraire, vacante par la mort de feu M. le Cardinal de Fleury; cette place n'exigeoit de lui ni travail ni assiduité, mais son amour pour les Sciences & son attachement pour l'Académie ne lui permettoient pas de s'absenter

de ses Assemblées dès qu'il étoit en son pouvoir d'y assister, ni de demeurer oisif; tout le temps que ses fonctions lui laissoient libre, étoit employé à des recherches utiles; il s'étoit procuré une nombreuse bibliothèque de livres de Sciences, il avoit formé un cabinet très-curieux de Physique, de Mécanique & d'Histoire Naturelle & avoit établi un laboratoire destiné à l'augmenter d'un grand nombre de pièces qu'il imaginoit tous les jours; il s'étoit sur-tout extrêmement appliqué à la Dioptrique & à l'art de perfectionner les Instrumens de Mathématique, & sur-tout ceux qui servent à l'Astronomie; c'étoit par ces moyens & par son assiduité à nos assemblées qu'il travailloit à se mettre en état de produire les excellens ouvrages qu'il nous a donnés & d'ajouter en temps de paix la gloire que procurent les Sciences à celle que ses services lui avoient méritée en temps de guerre.

Le premier Mémoire de M. le Duc de Chaulnes fut lû à l'Académie en 1755, & est imprimé dans le volume de cette année, il contient des expériences relatives à un article qui fait le commencement du IV.e livre de l'Optique de Newton; cet illustre Physicien avoit remarqué que si dans une chambre obscure on reçoit un rayon du Soleil dans l'axe d'un verre concave d'un côté & convexe de l'autre, étamé par le côté convexe, ce rayon étoit nécessairement réfléchi sur lui-même, mais que si on opposoit au rayon réfléchi un carton blanc, percé dans son milieu pour laisser passer le rayon direct, l'ouverture du carton se trouvoit entourée de quatre ou cinq anneaux colorés; M. de Chaulnes répétant cette expérience, un heureux hasard lui fit remarquer que lorsqu'on ternissoit la surface antérieure du verre en soufflant dessus, les anneaux, bien loin de perdre leur éclat, en devenoient plus vifs & plus distincts.

Il n'en fallut pas davantage pour piquer sa curiosité; il imagina d'abord de rendre cet effet permanent, en substituant au souffle, de l'eau mêlée d'un peu de lait pour ternir le verre, & il fut varier l'expérience en tant de manières, qu'il découvrit à la fin la raison de ce singulier phénomène: il tient à la diffraction; c'est-à-dire, à la propriété qu'ont les rayons de lumière de se plier à l'approche des corps solides. Il trouva que le souffle & l'eau

chargée de lait, formoient une eſpèce de réſeau à mailles rondes, qui produiſoit l'apparence d'anneaux colorés; qu'en ſubſtituant à cette eſpèce d'enduit une mouſſeline claire, on obtenoit au lieu d'anneaux des carreaux colorés; que des fils parallèles ne donnoient que des bandes; en un mot, il ſut ſi bien tirer parti de ce préſent du haſard, que l'expérience de Newton devint entre ſes mains un objet tout nouveau, & bien plus intéreſſant qu'il n'avoit été juſque-là.

Le fameux paſſage de Vénus ſur le Soleil, arrivé en 1761, étoit un phénomène trop important pour ne pas intéreſſer la curioſité de M. le Duc de Chaulnes; il fut du nombre des Académiciens qui l'obſervèrent, & il contribua, par cette Obſervation, aux déterminations précieuſes qui devoient en réſulter.

Pendant que M. le Duc de Chaulnes travailloit à ſes ouvrages de Dioptrique, il s'occupoit encore d'un autre objet également important, c'étoit la perfection des Inſtrumens d'Aſtronomie; & pour propoſer le Problème dans toute ſon étendue, l'art de procurer aux Inſtrumens d'un très-petit rayon une préciſion au moins égale à celle dont jouiſſent ceux d'un rayon conſidérable, tels qu'on les a employés juſqu'ici. Ce Problème pourroit, par ſa difficulté, être mis preſque au rang de ceux de la triſection de l'angle & de la quadrature du cercle, ſi l'expérience n'avoit fait voir qu'il l'avoit parfaitement réſolu.

M. le Duc de Chaulnes donna, en 1755, à l'Académie, un Mémoire qui contenoit les principes de ce travail. Il avoit d'abord imaginé d'employer le mouvement d'une vis ſans fin, pour obtenir ces diviſions. La vis, faite d'acier, auroit elle-même marqué ſes pas ſur l'épaiſſeur de l'arc de cercle à diviſer, & ces pas qui devoient être parfaitement égaux, & dont on pouvoit avoir, au moyen d'un index, les plus petites parties, devenoient, à ce qu'il croyoit, un moyen aſſuré d'obtenir des diviſions très-fines & très-égales.

Qui n'auroit cru, comme lui, qu'une diviſion faite de cette manière ſeroit exacte? & pouvoit-on ſoupçonner de l'inégalité dans un petit nombre de pas d'une vis faite avec ſoin, & dans ceux de cette eſpèce d'écrou, tous marqués avec la même vis? L'expérience fit

cependant

cependant voir à M. le Duc de Chaulnes qu'on ne pouvoit, en aucune manière, compter ſur l'exactitude de cette méthode; l'inégale dureté des parties de l'acier, de la vis & de celles du cuivre de l'inſtrument, rend les pas de l'une & de l'autre très-inégaux; d'où il ſuit que non-ſeulement on ne doit pas employer cette manière de diviſer les inſtrumens, mais qu'on doit déterminer, par obſervation, la valeur de chaque partie d'un micromètre, & ne pas ſe contenter de meſurer la totalité, ou une grande partie de ſa courſe, en comptant, pour les diviſions intermédiaires, ſur l'égalité des pas de la vis, comme on le faiſoit ordinairement; nouvelle ſource d'erreur, dont la découverte eſt dûe à M. le Duc de Chaulnes, & qui pouvoit altérer les Obſervations les plus importantes & les mieux faites.

Il fallut donc employer un autre moyen; M. le Duc de Chaulnes s'étoit aperçu depuis long-temps qu'en appliquant le micromètre au microſcope, on pouvoit exactement meſurer juſqu'à la quatre millième partie d'une ligne: ce fut par ce moyen qu'il entreprit de donner à la diviſion des inſtrumens une préciſion juſqu'alors inconnue. Nous ne pouvons le ſuivre ici dans l'ingénieuſe application qu'il en fit; tout ce que nous en pouvons dire, eſt que jamais principe n'a été manié avec plus d'adreſſe; & qu'on eſt étonné, en liſant cet Ouvrage, des reſſources que ſon génie lui a fournies, & de la ſagacité avec laquelle il met à profit une infinité de circonſtances qui auroient probablement échappé à tout autre. Le fruit de tant de travaux fut un Inſtrument de onze pouces de rayon, garni de lunettes achromatiques, & dont l'exactitude étoit ſi grande, qu'ayant été employé concurremment avec deux excellens quarts-de-cercle de ſix pieds de rayon, à meſurer les hauteurs méridiennes ſolſticiales du Soleil & celles d'*Arcturus;* il les a données avec la même préciſion qu'eux; épreuve certainement la plus forte, à laquelle on pût le ſoumettre.

Non-ſeulement il étoit parvenu à donner à ſon inſtrument le degré d'exactitude dont nous venons de parler; mais il avoit encore imaginé la manière de les communiquer à tous ceux qu'on voudroit faire dans la ſuite, au moyen d'une très-grande plate-forme qu'il avoit propoſé de conſtruire ſur ce principe, & qui tiendroit

lieu, pour ainſi dire, d'un Artiſte habile & immortel. Nous laiſſons au public à juger ſi M. le Duc de Chaulnes avoit bien rempli toutes les conditions du Problème, & à apprécier le degré de reconnoiſſance qui lui eſt dû pour le préſent qu'il a fait à tout le monde Mathématicien. Cet Art abſolument nouveau, dont il avoit donné, comme nous venons de le dire, les principes en 1765, fut depuis donné dans un bien plus grand détail en 1768, dans la deſcription des Arts, publiée par l'Académie.

Tout le travail qu'avoit fait M. le Duc de Chaulnes ſur la conſtruction des Inſtrumens de Mathématique lui avoit fait ſentir le degré d'utilité dont pouvoient être ſuſceptibles en cette partie les lunettes achromatiques; c'en fut aſſez pour l'engager à travailler à leur perfection, & il communiqua ſes vues ſur ce ſujet en 1767, dans un Mémoire imprimé dans le volume de cette année & qui eſt prêt à paroître.

On ſera étonné en liſant cet ouvrage, des reſſources qu'il a ſu ſe procurer pour déterminer avec exactitude des quantités qui ſembloient ne donner aucune priſe à l'obſervateur; les mêmes microſcopes dont il s'étoit déjà ſervi pour la diviſion des inſtrumens, ſe retrouvent encore ici, mais employés d'une manière abſolument différente & montés ſur des eſpèces de micromètres, qui meſurent juſqu'à un 400.e de ligne la courſe de l'inſtrument ou du porte-objet; c'eſt à l'aide de ces microſcopes & de pluſieurs autres inſtrumens ingénieux inventés pour cet objet, qu'il parvint à meſurer exactement le degré de réfringence des différentes ſortes de verres; les courbures convexes & concaves de toutes les pièces d'un objectif composé, ſans les ſéparer les unes des autres, problème ſingulier & qui ſembleroit au premier coup d'œil impoſſible à réſoudre & à déterminer enfin avec préciſion, ſi la courbure du verre de criſtal d'Angleterre qui doit corriger l'aberration de réfrangibilité & détruire les couleurs, eſt telle qu'elle doit être, ce qu'on n'avoit pas pu parvenir à connoître juſqu'ici.

Toutes ces recherches ſont ſuivies de l'invention d'une nouvelle machine parallactique, plus ſolide & plus commode que celles qui ſont en uſage, de pluſieurs réflexions ſur la manière d'appliquer le micromètre à ces lunettes & de meſurer exactement la

valeur des parties de cet inſtrument; il emploie pour cela une mire qui pour être vue de loin, a la ſingulière propriété d'offrir à l'obſervateur, des traits très-gros, au moyen deſquels il peut meſurer des intervalles très-petits; ce Mémoire brille par-tout du génie de l'invention, & on ne peut le lire ſans admirer les reſſources qu'il a ſu ſe procurer pour éviter des difficultés qui au premier coup d'œil paroiſſoient inſurmontables; ce ſera le dernier ouvrage qu'on aura de lui, & il eſt bien propre à faire regretter ceux qu'il ſe propoſoit encore ſur ce ſujet & que la mort l'a empêché d'exécuter.

M. le Duc de Chaulnes étoit du caractère le plus aimable, la douceur qui en faiſoit la baſe, étoit ornée de la politeſſe du grand monde & de la Cour, auſſi ne comptoit-il preſque que des amis dans tous ceux avec leſquels il vivoit; le Roi même qui connoiſſoit ſon zèle & ſon mérite, lui donnoit ſouvent de ces marques de bonté qui font la ſatisfaction du bon ſujet & la félicité de l'homme de Cour. Dans la ſituation où il ſe trouvoit, il ſembloit être à l'abri des revers & des chagrins, il en eſſuya cependant de vifs & de longs, il y oppoſa la conſtance que preſcrit la Philoſophie & la patience qu'inſpire la Religion, mais on ne lutte pas impunément contre de tels ennemis, & ſon tempérament quoique fort, y ſuccomba; il tomba malade au commencement de l'été dernier & le mal alla en augmentant juſqu'à la mi-Septembre; il y eut alors une apparence de mieux, il ſe leva même & ſortit en carroſſe pour ſe promener, il devoit partir inceſſamment pour aller paſſer le reſte de la belle ſaiſon dans une campagne près de Paris; le jour étoit pris pour ce départ & ſes amis invités à aller lui tenir compagnie: vains projets! la veille du jour auquel il devoit partir, il ſe trouva plus mal au moment où l'on s'y attendoit le moins & mourut le 23 Septembre 1769, en moins de cinq heures, d'une mort qu'on pourroit peut-être nommer ſubite, mais qui n'étoit certainement pas imprévue, ayant mis ordre quelques jours auparavant à ſes affaires temporelles & reçu les derniers Sacremens avec les ſentimens les plus marqués de la piété & de la religion qui avoient toujours été la règle de ſa conduite; ſon corps fut porté à la ſépulture de ſa maiſon, accom-

pagné d'un nombreux cortège de ses amis, qui s'empressèrent de lui rendre ce dernier devoir. Il étoit grand, bien fait, d'une physionomie agréable & d'un embonpoint qui lui alloit assez bien & ne l'empêchoit point de se mouvoir avec une légèreté & une agilité singulières; ses mœurs avoient toujours été très-pures, il étoit bon ami, doux, tendre, compatissant aux misères des pauvres, bon pour ses domestiques qui de leur côté l'aimoient & le chérissoient; il étoit fort instruit de l'histoire & des affaires du royaume, & avoit l'esprit très-orné sur une infinité de matières; sa conversation étoit gaie & amusante, lors même qu'il parloit de l'objet de ses recherches; il écrivoit avec netteté & pureté, les Mémoires qu'il a publiés ont mis le public en état d'en juger, & nous l'avons vu plus d'une fois parler dans nos Assemblées, sur le champ & s'y exprimer avec noblesse & précision; toutes ces qualités étoient couronnées par le plus grand éloignement du faste & de l'ostentation, ses devoirs seuls & la façon dont il les remplissoit, ont trahi sa modestie & fait connoître ses vertus.

M. le Duc de Chaulnes étoit marié, il avoit épousé en 1734, Demoiselle Anne-Josephine Bonnier, fille de Joseph Bonnier, Baron de la Mosson, Trésorier général des États de Languedoc, & d'Anne Malon; il n'en a laissé qu'un fils, M. le Duc de Picquigny, déjà connu de l'Académie par son goût pour la Physique & l'Histoire naturelle.

La place d'Honoraire qu'occupoit parmi nous M. le Duc de Chaulnes, a été remplie par M. le Duc de Praslin, Ministre & Secrétaire d'État au département de la Marine.



MÉMOIRES



MÉMOIRES DE MATHÉMATIQUE ET DE PHYSIQUE,

TIRÉS DES REGISTRES de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCCLXIX.

MÉMOIRE SUR LE MOUVEMENT DES ÉTOILES EN LONGITUDE ET EN LATITUDE.

Par M. CASSINI DE THURY.



M. LE MONNIER ayant publié des Observations, par lesquelles il détermine le mouvement d'*Arcturus* en longitude, j'ai cru devoir remettre sous les yeux de l'Académie ce qui a été publié par mon père sur le mouvement des 2 Septembre 1769.

Étoiles fixes en longitude & en latitude *(Mém. 1738, p. 331)*.

Tycho s'étoit aperçu le premier de quelque mouvement dans la latitude des Étoiles fixes, M. Halley avoit aussi reconnu des différences dans la latitude des Étoiles; mon père, en comparant les observations faites à Cayenne avec les nôtres faites à la méridienne & au mural de l'Observatoire, avoit trouvé une variation dans la latitude d'*Arcturus* de 2 minutes dans soixante-six années, & il remarque, en même temps, que si l'on employoit nos propres observations, on trouveroit le *mouvement d'Arcturus en latitude, encore plus grand.*

Les observations de Tycho, en 1584, comparées à celles de 1672, faites par M. Picard, donnent une variation dans la latitude d'*Arcturus* de 3 minutes & de 4′ 57″ pour l'année 1739, ce qui seroit à raison de 3′ 13″ pour cent années.

Pour prouver incontestablement ce mouvement d'*Arcturus* en latitude, mon père fait remarquer qu'une étoile η dans la jambe du Bouvier, déterminée par Tycho & par nos observations, n'a point varié en latitude, dans l'espace de cent cinquante-deux années, tandis que la variation d'*Arcturus* a été de 5 minutes dans le même intervalle de temps; cependant les deux étoiles ont été observées par Tycho avec le même instrument, ce qui ôte toute l'incertitude que l'on pourroit avoir sur le résultat des observations.

Mon père examine ensuite si les observations des autres étoiles, ne donnent point de semblables variations dans leur latitude, il n'a trouvé qu'une différence d'une minute dans la latitude de *Sirius;* mais les Étoiles où cette variation est plus sensible, qui n'excède cependant pas deux minutes, sont *Rigel*, la *Luisante dans l'épaule d'Orion*, le *cœur du Lion* & la *Chèvre.*

Les variations dans la latitude des Étoiles fixes, n'ont pas été le seul objet des recherches de mon père, il a essayé de reconnoître le mouvement en longitude, & il a trouvé qu'il n'y en avoit aucune où ce mouvement parût avec plus d'évidence que dans la *luisante de l'Aigle* & les deux Étoiles voisines; en comparant nos observations avec celles de Flamstéed dans l'espace de quarante-huit années, il a trouvé une variation très-sensible en longitude dans le mouvement des trois Étoiles en longitude, ce

qui est encore confirmé par les observations de Tycho, comparées aux nôtres dans un intervalle de cent trente-sept années.

Je passe ensuite à la conclusion du Mémoire de mon père; *il peut demeurer pour constant, que, quoique la plupart des Étoiles fixes conservent entr'elles la même situation, il y en a quelques-unes qui s'approchent ou s'éloignent les unes des autres, tant en longitude qu'en latitude, ce qu'il est très-important de reconnoître pour le progrès de l'Astronomie;* j'ajouterai seulement que comme la détermination de la position des Étoiles, suppose un grand nombre d'observations du passage de l'Étoile & du Soleil par des fils, il faut que la différence que l'on remarque dans la position de l'Étoile soit sensible pour qu'elle ne puisse être attribuée à l'erreur des observations.

ADDITION au Mémoire précédent.

JE dois répondre à une objection qui m'a été faite à la lecture de mon Mémoire; il paroît étonnant que mon père ayant reconnu comme constant le mouvement des Étoiles fixes en longitude & en latitude, il ait précisément employé les deux Étoiles où ce mouvement étoit plus sensible pour fixer le mouvement apparent des Étoiles en longitude. 6 Septembre 1769.

Je répondrai 1.° que le Mémoire sur les variations des Étoiles en longitude, est postérieur à celui sur le mouvement apparent des Étoiles en longitude.

2.° Que ce qui a déterminé mon père à se servir des étoiles d'*Arcturus* & de l'*Aigle,* pour déterminer le mouvement apparent des Étoiles en longitude, a été (comme il le fait remarquer) le dessein de faire usage des observations de mon grand-père, faites en 1672, selon la méthode la plus exacte pour déterminer la position des Étoiles, en choisissant les instans où le Soleil & les Étoiles avoient la même déclinaison que le Soleil, il avoit l'avantage de déterminer le mouvement apparent des Étoiles en longitude par les seules observations modernes, sans avoir recours aux observations anciennes qui donnoient des résultats très-différens, mais mon père n'a trouvé que les deux étoiles d'*Arcturus* & de l'*Aigle*, dont les observations aient été faites dans les circonstances

requiſes & par la méthode la plus exacte pour déterminer l'aſcenſion droite des Étoiles, & c'eſt par cette raiſon qu'il les a employées pour cette recherche; mais il obſerve en même temps dans les réſultats, des différences qui lui ſont ſoupçonner, pour me ſervir de ſes termes, *que le mouvement du Soleil ou celui d'Arcturus n'ont pas été uniformes* (p. 285.)

En effet, ſi l'on compare la longitude d'*Arcturus* qu'il a déterminée en 1738, de $6^{s}\ 20^{d}\ 34'\ 45''$ avec celle de Flamſtéed en 1690, de $6^{s}\ 19^{d}\ 53'\ 52''$, on trouvera une différence de $40'\ 53''$ dans l'eſpace de quarante-huit années à raiſon de 51 ſecondes par an, tandis que le mouvement apparent n'eſt que de 50 ſecondes environ.

On pourroit auſſi, par la même raiſon, m'objecter que je n'ai point reconnu le mouvement d'*Arcturus* en latitude, puiſque j'emploie cette Étoile depuis plus de vingt années, pour déterminer le terme du bord ſolſticial du Soleil, & ſi l'obliquité de l'écliptique change, alors je répondrai que juſqu'à ce que l'on ait trouvé des points plus fixes que les Étoiles, les Aſtronomes ſeront toujours obligés d'y avoir recours, & particulièrement à celles de la première grandeur qui ont l'avantage d'être aperçues le jour comme la nuit, & qui ſont ſans doute celles qui ont été déterminées avec plus d'exactitude par les anciens Aſtronomes.



NOUVELLE CONSTRUCTION D'UNE MACHINE PROPRE À MOIRER LES ÉTOFFES DE SOIE.

Par M. DE VAUCANSON.

L'ART de moirer, consiste à former des ondes sur une des surfaces de l'étoffe ; il n'y a que les étoffes qui ont un grain saillant, comme les gros Taffetas, les gros de Tours & les gros de Naples, qui puissent être moirées. On appelle *grain* dans l'étoffe, cette éminence faite par la grosseur du fil de trame, & qui forme ces cannelures parallèles qui vont d'une lisière à l'autre: lorsque le fil de la trame est mince, on dit que l'étoffe est à petit grain ; lorsque ce fil a plus de grosseur, on dit que l'étoffe est à plus gros grain. 5 Avril 1769.

C'est l'aplatissement de ce grain ou des cannelures couchées par parties, & en sens contraire les unes des autres, qui fait paroître les ondes sur l'étoffe à cause des différens reflets de lumière que ces couches occasionnent. Pour que la moire soit belle, il faut que les ondes soient grandes & bien terminées par des filets fins & déliés; c'est l'intersection des différentes couches qui produit ces filets.

Les moires d'Angleterre ont été long-temps supérieures en beauté & en qualité à toutes celles qu'on faisoit en France ; nos Fabriques étoient bien en état d'y employer d'aussi belle matière, & de les fabriquer aussi parfaitement, mais elles n'avoient pas une Machine pour les moirer aussi bonne que celle des Anglois. Le Ministère trouva le moyen en 1740, d'en faire venir une de Londres ; au lieu de l'envoyer à Lyon, elle fut établie ici à Paris dans la rue de Louis-le-Grand, où elle existe encore ; mais, soit que la personne qui fut chargée d'en diriger les opérations, ait manqué d'intelligence ou de capacité, soit que les Fabricans de Lyon, aient trouvé trop de difficulté à faire aller & revenir de si loin leurs étoffes, pour être moirées, cette

Machine est restée sans aucun succès, ou du moins, elle n'a pas eu l'effet qu'on en attendoit.

La ville de Lyon se détermina, quelques années après, à faire tous les frais nécessaires pour se procurer la Machine Angloise; & afin de ne pas manquer son but, elle offrit un sort avantageux à un habile Moireur de Londres qui vint s'établir à Lyon avec toute sa famille. Cette ville retire maintenant le fruit des sacrifices qu'elle a faits à cet égard ; les moires de Lyon sont tout aussi belles que celles d'Angleterre, quant à l'effet du moirage.

On nomme cette Machine une *Calandre*, parce qu'elle ressemble à celle avec laquelle on calandre les satins apprêtés & les autres étoffes mélangées ; elle consiste de même en une lourde masse que l'on fait promener sur deux rouleaux appuyés sur une plate-forme posée horizontalement sur un fort massif de maçonnerie : cette lourde masse est composée d'une caisse en bois de neuf pieds de longueur sur quatre pieds de largeur & de cinq pieds environ de hauteur, que l'on remplit de pierres, de boulets de canon ou de plusieurs saumons de plomb, jusqu'à ce que le total soit à peu près égal à un poids de quatre-vingts milliers : le fond de cette caisse est fait de deux forts plateaux de noyer ou de chêne, ainsi que la plate-forme inférieure qui est assise sur le massif de maçonnerie ; au-dessous du fond de la caisse, on incruste une plaque de fer bien unie & bien dressée, de quatre pieds environ de longueur sur trois pieds de largeur & d'un pouce & demi d'épaisseur ; on en met une semblable sur la plate-forme inférieure, toutes deux encastrées à fleur du bois, & contenues avec des vis à tête perdue : c'est entre ces deux platines que l'on met le rouleau chargé de l'étoffe qu'on veut moirer, comme je le dirai ci-après. À chaque extrémité de cette caisse, on accroche un cable dont l'un, après avoir passé sur plusieurs poulies mouflées, vient se rouler sur le haut d'un arbre vertical traversé par un levier horizontal, au bout duquel est attelé un cheval ; le cable opposé, après avoir passé sur autant de poulies mouflées, vient se plier au bas du même arbre, de manière que le cheval en tournant, tantôt dans un sens & tantôt de l'autre, fait mouvoir la caisse alternativement de droite à gauche.

Il faut néceſſairement une groſſe & une petite calandre pour moirer les Étoffes de ſoie; la petite ne diffère de la grande, qu'en ce qu'elle eſt moins peſante; elle n'eſt chargée que d'environ vingt milliers: on nomme cette dernière calandre *préparatoire*, parce que c'eſt ſous elle qu'on fait d'abord paſſer l'étoffe qui a été pliée pour la première fois ſur le rouleau. Voici comment ſe fait ce pliage.

On commence par plier l'étoffe en deux, dans toute ſa longueur, c'eſt-à-dire, qu'on rapproche les deux liſières l'une ſur l'autre, en obſervant que l'extrémité de chaque cannelure formée par le fil de trame, réponde exactement à l'autre extrémité de la même cannelure: on contient la jonction des deux liſières par deux points d'aiguille faits à neuf ou dix pouces de diſtance les uns des autres ſur toute la longueur des liſières; la largeur de l'étoffe ayant été pliée en deux dans toute la longueur de la pièce, on replie l'étoffe ainſi doublée en feuillets de demi-aune de long; on arrange ces feuillets ſur une forte toile de coutil en forme de zigzag, c'eſt-à-dire, qu'on les incline les uns aux autres ſous un angle indéterminé, mais qui eſt de quatre à cinq degrés environ; on roule la toile de coutil avec l'étoffe ainſi arrangée autour d'un cylindre de bois de gayac qui a cinq à ſix pouces de diamètre: l'étoffe étant recouverte par deux ou trois tours de toile ſurabondante, on contient le tout avec une ficelle à chaque extrémité du cylindre qu'on nomme le *rouleau*.

On met ce rouleau chargé de l'étoffe ſous la petite calandre; c'eſt-là, qu'en roulant alternativement d'un ſens & de l'autre ſous le poids de cette première charge, certaines portions du grain de l'étoffe ſont déterminées à ſe coucher d'un côté, tandis que d'autres le ſont d'un ſens oppoſé: après que l'étoffe eſt reſtée quinze ou vingt minutes ſous cette première calandre, on en ôte le rouleau pour examiner ſi la moire ſe diſpoſe à prendre de belles ondes, & l'ouvrier juge ſi l'étoffe doit être remiſe ſous la petite calandre, ou ſi elle eſt en état d'être portée ſous la grande; auquel cas on change de plis à l'étoffe, & on l'arrange ſur le coutil comme la première fois pour la remettre ſur le rouleau qui déſormais eſt toujours placé ſous la groſſe calandre.

Comme la moire ne prend point ſur les plis de l'étoffe, & que les ondes ſe trouveroient coupées par ces mêmes plis, on eſt obligé de ſortir ſouvent l'étoffe de deſſous la calandre pour faire courir les plis, c'eſt-à-dire, pour les changer de place; ce ne ſont que les plis des feuillets faits de demi-aune en demi-aune que l'on rechange, celui qui eſt fait dans le milieu de la largeur de la pièce, eſt invariable; c'eſt par lui que s'opère la répétition des objets que l'on voit ſur les deux côtés de la moire.

Quoique tous ces procédés paroiſſent fort ſimples & fort aiſés, il n'en réſulte pas toujours un même effet. Il arrive ſouvent que dans des étoffes qui paroiſſent ſemblables en matière & en fabrication, la moire prend plus tôt dans les unes, & plus tard dans les autres; quelquefois les ondes y ſont grandes & bien détachées, quelquefois petites, confondues entr'elles & mal terminées; ſouvent un bout de la pièce ſera bien moiré, & l'autre bout ne le ſera pas de même; d'autres fois le milieu ſera mieux moiré que les extrémités; il arrivera auſſi que les extrémités ſeront bien, & que le milieu ſera mal; ſouvent la moire ſortira très-bien après trois ou quatre paſſées ſous la calandre, & quelquefois elle ne paroîtra qu'après la dixième ou la douzième paſſée.

L'expérience a appris que les étoffes, dont les couleurs exigent du ſoufre, du vitriol, du jus de citron & autres acides ſemblables, ne prennent point du tout la moire. On a ſurmonté ces inconvéniens en lavant les ſoies & en les faiſant bien dégorger avant de les employer à la fabrication de l'étoffe; elles prennent alors la moire, mais elles ſont toujours ſujettes à cette eſpèce de caprice qu'on aperçoit dans toutes les autres, & auquel on n'a pas encore trouvé de cauſe, ni par conſéquent de remède.

Il n'eſt pas permis de croire avec les ouvriers moireurs, que cette variété dans le moirage ſoit le pur effet du haſard, ſans une cauſe quelconque: quoique des étoffes paroiſſent également bien fabriquées, quoiqu'elles ſoient compoſées d'un même nombre de fils, ſoit dans la chaîne, ſoit dans la trame, il peut y avoir entr'elles quantité de petites différences qui échappent aux yeux les plus exercés, mais qui rendent la moire plus ou moins difficile à ſortir; la ſoie d'une chaîne peut être plus ou moins nerveuſe,

plus

plus ou moins élaſtique, plus ou moins tordue, que celle d'une autre; la trame d'une étoffe peut être plus ou moins molle ou plus ou moins frappée; le grain peut n'en être pas également ſerré & ſaillant; la teinture des différentes couleurs peut encore apporter des variétés infinies dans la roideur ou dans la ſoupleſſe de la ſoie: la manière de moirer étant toujours la même, les effets doivent néceſſairement être relatifs à toutes ces différences.

Le poids de la petite calandre pourroit être trop léger pour une telle étoffe, & celui de la groſſe trop peſant pour telle autre; il faudroit peut-être pluſieurs charges intermédiaires entre ces deux-là; l'étoffe enveloppée dans le coutil ſur le rouleau, ne forme preſque jamais une épaiſſeur égale autour de ſa circonférence, ce qui peut rendre l'impreſſion de la calandre beaucoup plus ſenſible dans les parties plus minces, que dans celles qui le ſont moins. Lorſque ce rouleau eſt enveloppé d'une pièce d'étoffe de trente-ſix à quarante aunes de longueur ou de pluſieurs pièces d'un moindre aunage, que l'on met ordinairement enſemble afin d'avancer l'ouvrage, l'épaiſſeur en eſt alors ſi conſidérable, que l'action de la calandre ſe trouve avoir produit une partie de ſon effet ſur le commencement & ſur la fin de la pièce avant d'avoir pu pénétrer dans le milieu, parce que les premiers tours appuyant ſur le rouleau de gayac, & les derniers tours ſur les plaques de fer des plates-formes, la proximité de ces corps durs les oblige de céder les premiers à l'effort du poids de la calandre. Voilà pourquoi l'étoffe peut n'être pas toujours également bien moirée dans toute ſa longueur.

Quoique l'étoffe ſoit pliée ferme ſur le rouleau, le poids de la calandre la fait bientôt étendre & quitter le rouleau; alors les plis ſe dérangent, ou il s'en fait de faux, ce qui oblige de ſortir le rouleau de deſſous la calandre pour replier l'étoffe. Ces déployemens trop fréquens occaſionnent bien des fois de la confuſion dans les ondes & dans les filets qui les terminent; la moire en devient trop ondulée, défaut qu'il n'eſt plus poſſible de corriger.

Voilà, je crois, les cauſes qui rendent l'effet du moirage ſi capricieux; elles m'ont paru aſſez vraiſemblables pour me

déterminer à tenter le moyen de les éviter par une conſtruction de calandre toute différente.

J'ai compris qu'il falloit trouver une calandre que l'on pût charger à volonté & par degrés, de pluſieurs milliers juſqu'à la concurrence de quarante mille ; que ce chargement pût être fait très-promptement & avec beaucoup de facilité ; que l'étoffe pliſſée pût y recevoir une preſſion égale dans toutes ſes parties ; que ces plis ne puſſent jamais ſe déranger par l'extenſion de l'étoffe, ni par autre cauſe quelconque, qu'on ne fût plus obligé de ſortir l'étoffe que lorſqu'il eſt queſtion d'en faire courir les plis pour recevoir le moirage. Voici quels ont été mes moyens.

Au lieu de mettre l'étoffe dans un coutil autour d'un cylindre pour la faire rouler entre deux plans droits, je la contiens au contraire entre deux coutils ſur une ligne droite pour la faire paſſer entre deux cylindres : le degré de compreſſion qu'on donne à ces deux cylindres, produit l'effet du poids de la calandre, que l'on peut ici graduer à volonté ; les tourillons du cylindre ſupérieur qui eſt de métal très-dur, ſont appuyés ſur des collets immobiles, fixés au bâti de la machine, & les tourillons du cylindre inférieur qui eſt de bois de gayac, portent ſur des collets placés ſur deux léviers mobiles, & à neuf pouces de diſtance de leur point d'appui ; la queue de ces léviers qui ſont de la ſeconde eſpèce, eſt priſe chacune par un tirant de fer qui répond à la tête de deux autres léviers de la première eſpèce, pareillement mobiles, au bout deſquels ſont accrochés deux plateaux de balance : la ſeule peſanteur de ces derniers léviers produit un effort de ſix milliers au point de contact des deux cylindres ; un poids de vingt-cinq livres mis dans chaque plateau, augmente cet effort de cinq milliers ; on peut multiplier cet effort en mettant de nouveaux poids de vingt-cinq livres ſur les plateaux, juſqu'à le rendre égal à celui de la groſſe calandre angloiſe qui n'eſt que de quarante milliers, quoique ſa caiſſe ſoit chargée de quatre-vingts milliers peſant, par la raiſon que cette caiſſe ſe meut ſur deux rouleaux, dont un ſeul eſt enveloppé de l'étoffe à moirer, & dont l'autre ne ſert qu'à empêcher la caiſſe de baſculer, & que le poids total ſe trouvant partagé ſur chaque rouleau, l'étoffe n'y eſt

pressée que de la moitié de ce poids qui est de quarante milliers, comme elle ne l'est que d'un poids de dix milliers sous la petite calandre, quoique sa caisse soit chargée de vingt milliers.

On conçoit aisément par la facilité qu'il y a d'augmenter ou de diminuer la pression des deux cylindres, que cette nouvelle machine peut produire, non-seulement l'effet des deux calandres angloises, mais celui de plusieurs calandres intermédiaires qui seroient chargées graduellement.

On plie l'étoffe en zygzag comme à l'ordinaire, sur une toile de coutil assez longue pour y pouvoir arranger deux ou trois pièces d'étoffe de suite, que l'on recouvre de l'autre partie de la toile : les deux extrémités de cette toile sont tirées par des poids, afin qu'elle se conserve toujours bien tendue en allant & revenant dessous les cylindres, au sortir desquels elle glisse sur une table qui est de niveau avec l'ouverture des deux cylindres; on fait tourner les cylindres au moyen d'un cabestan auquel on peut appliquer des hommes ou un cheval; lorsque la toile qui contient l'étoffe a passé d'un côté, une détente fait tourner les cylindres à contre-sens, & la toile revient au côté opposé : on continue ce mouvement alternatif une douzaine de fois, après quoi on lève un coin de la toile qui recouvre l'étoffe, & sans la déranger, on examine l'effet de la première impression qui n'a été faite qu'avec le poids seul des léviers, c'est-à-dire, avec six milliers de charge. On juge si elle est assez forte pour déterminer les ondes à sortir, ou bien on met un poids de vingt-cinq livres sur chaque plateau pour la seconde passée; lorsque les ondes paroissent se bien décider, on fait courir les plis de l'étoffe, c'est-à-dire, qu'on les change de place pour recevoir le moirage, comme les autres parties de l'étoffe : on augmente peu à peu la charge par de nouveaux poids dans les plateaux, jusqu'à ce que l'on voye les ondes bien terminées par des filets très-déliés, ce qui arrive ordinairement après la cinquième ou la sixième passée, c'est-à-dire, après la cinquième ou la sixième charge.

J'ai été obligé de tâtonner long-temps dans les premiers essais, pour connoître la quantité de poids qu'il falloit donner pour chaque passée, & le nombre de révolutions que devoit faire

l'étoffe. Le réſultat m'a appris que la charge doit toujours être proportionnée à la qualité de l'étoffe; que ſouvent une étoffe épaiſſe exige moins de poids & moins de temps pour être moirée qu'une étoffe plus mince, & que d'autres fois l'étoffe mince eſt moirée bien plus promptement & avec une moindre charge; mais j'ai reconnu que dans tous les cas, la charge doit être graduée pour opérer de belles ondes bien grandes & bien terminées; que l'étoffe ſe trouve toujours également bien moirée dans toutes ſes parties; que les plis ne ſe dérangent jamais; & qu'en général toute la manœuvre en eſt bien plus ſûre, bien plus commode & bien plus expéditive. Je pourrois encore ajouter que cette machine exige beaucoup moins d'emplacement pour ſon ſervice, que les deux calandres angloiſes, & que la conſtruction en ſera de moitié moins diſpendieuſe.

Cette première machine a été conſtruite aux frais du Roi, pour la Fabrique de Tours; je ſouhaite qu'une expérience plus longue & plus ſuivie puiſſe confirmer tous les avantages que je me flatte avoir aperçus dans les premières épreuves qui ont été faites ſous mes yeux.

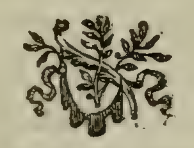
J'attendrai cette confirmation avant de me déterminer à en publier la deſcription par des planches gravées & par une explication plus détaillée. Les recherches en Mécanique qui ont pour objet la perfection des Arts, & qui ſont préſentées comme un modèle à ſuivre, ne doivent être miſes au grand jour, qu'après avoir paſſé par la coupelle des plus rudes épreuves, & après avoir été portées au plus haut degré de perfection qu'il eſt poſſible à l'Auteur de leur donner. Il eſt rare qu'on parvienne à ce degré dans une première conſtruction; très-ſouvent une ſeconde, une troiſième même, ne ſuffiſent pas pour y arriver, & les occaſions de répéter ces conſtructions ne ſont pas toujours bien fréquentes, lorſqu'il eſt principalement queſtion de grandes machines qui exigent de grandes dépenſes. Combien de nouveautés ont été dans leur naiſſance préſentées au Public comme extrêmement avantageuſes & utiles, & dont l'uſage de quelques mois ou de quelques années a fait voir toute l'inſuffiſance & tous les défauts.

Les mépriſes en Mécanique ſont de toute autre conſéquence

que les méprises dans plusieurs autres Sciences. Il en coûte peu de changer d'opinion sur un système, ou sur un fait de Physique qu'on a cru vrais pendant long-temps, & qu'un Observateur parvient à démontrer faux ; au lieu qu'il en coûte souvent la fortune à des Entrepreneurs pour avoir eu trop de confiance dans un Inventeur présomptueux qui n'a pas daigné soumettre assez long-temps ses premiers essais au tribunal de l'expérience.

Rien n'est plus capable de retarder la perfection des Arts, que de présenter trop souvent aux Artistes des moyens imparfaits de réforme ; on se lasse de tenter des épreuves inutiles, & de faire des dépenses infructueuses : on se roidit contre toute nouveauté, & l'on finit par rejeter ce qui est bon comme ce qui est mauvais.

C'est ce qui me fait différer depuis long-temps la publication de plusieurs ouvrages de Mécanique, que j'ai imaginés pour perfectionner nos Fabriques de Soie. Quoique le succès qu'ils ont eu dans les premiers établissemens qui en ont été faits, ait paru assez avoué pour déterminer le Conseil à les adopter, je crois cependant, malgré tous les reproches que l'on m'a faits, ou qu'on pourroit me faire, devoir encore attendre l'occasion d'une seconde construction pour y faire quelques changemens & y ajouter des perfections que l'expérience m'a fait voir possibles, & même nécessaires. Lorsque par des épreuves suffisantes je me serai assuré de la bonté de mes corrections, je pourrai alors avec plus de confiance & plus de satisfaction, présenter tous ces ouvrages au Public, qui voudra bien me pardonner mes retardemens en faveur de l'utilité plus prochaine, qu'il en pourra retirer.



MÉMOIRE

*Sur le mouvement d'*ARCTURUS *en ascension droite apparente, & de la vraie Longitude du Soleil pendant une suite d'Observations faites avant & après le Solstice d'été, pour en déduire l'erreur des Tables au temps de l'apogée & au 3 Juin 1769*.*

* ♂ de ♀ au ☉.

Par M. LE MONNIER.

23 Août 1769.

LE mouvement particulier, & qui paroît sans aucune loi connue, propre aux Étoiles de la 1.re grandeur, s'est trouvé, il y a plus de trente ans, difficile à bien constater, à l'aide des observations astronomiques du dernier siècle; j'en ai assez averti dans le *I.er volume de l'Histoire Céleste,* & aux années suivantes, sur-tout en 1746, à l'occasion du Catalogue particulier de ces Étoiles de la 1.re grandeur, inséré au *chap. XIX des Institutions Astronomiques.*

Ce mouvement propre des Étoiles est aujourd'hui l'un des plus importans à bien connoître, autrement l'on ne parviendroit qu'à des résultats indécis, soit dans la recherche du lieu du Soleil & des Planètes, soit dans la recherche des longitudes géographiques sur terre & sur mer, si on a soin de n'y emploier que des quarts-de-cercle, mégamètres ou quelqu'occultations des quatre Étoiles de la 1.re grandeur qui sont au zodiaque.

Je ne parlerai guère ici que du mouvement qui paroît convenir à l'étoile *Arcturus*, laquelle a été censée jusqu'ici n'avoir aucun mouvement en longitude, mais un grand mouvement propre dans le sens de la latitude: je ferai voir enfin que celui qui concerne la longitude, diffère encore sensiblement, ou paroît moins rapide que celui qui convient à la précession moyenne de l'équinoxe; au reste, n'y eut-il pour *Arcturus* qu'un mouvement réel en latitude, il doit influer sensiblement sur le mouvement en ascension droite, & jusqu'ici on auroit dû y avoir égard.

J'ai prouvé en 1765, dans nos Mémoires, qu'*Arcturus* varioit en déclinaison de deux secondes par an, plus que selon les loix de la précession de l'équinoxe, & ceux qui ont eu égard à cet article, dans leurs ouvrages périodiques, n'ont pas fait attention que l'ascension droite d'*Arcturus* avoit pareillement besoin d'une correction essentielle, mais en sens contraire, puisque l'effet du mouvement en latitude décroissante, tend à ralentir le mouvement apparent en ascension droite; c'étoit-là le cas d'y insister le plus, mais le mouvement propre d'*Arcturus* en longitude, s'il a lieu, comme je vais le prouver, doit y influer aussi de quelques secondes.

Outre le grand mouvement d'*Arcturus*, qu'il s'agit de bien reconnoître & qui a mérité jusqu'ici qu'on s'y attachât avec la plus sérieuse attention, d'autres raisons m'ont engagé à choisir cette Étoile pour la comparer au Soleil avant & après le solstice; à la vérité, l'étoile du grand Chien emploie alors le moindre intervalle de temps possible pour être comparée au Soleil avant ou après midi aux environs de son passage par l'apogée; & malgré l'excellence de mon horloge à pendule de Graham, je n'ai pas négligé, lorsque je l'ai pu voir au méridien, d'employer aussi cette comparaison pour vérifier les ascensions droites, mais j'ai eu la facilité de comparer les 22, 23 & 24 Mai, *Arcturus* au Soleil lorsqu'ils ont passé au méridien dans un même parallèle à l'équateur, & le 19 Juillet pareillement lorsque le Soleil a paru retourner à la même déclinaison ou hauteur méridienne: je parlerai ailleurs du mouvement qui est propre à *Sirius*, & des déviations qui conviennent au temps de l'apogée aux différens points de mon grand quart-de-cercle mural: voici les observations.

Le 22 Mai 1769, passage du Soleil en $2' \; 15''$ au quart-de-cercle mural & le centre à $3^h \; 57' \; 55''$ de la pendule: *Arcturus* l'a suivi à $14^h \; 05' \; 37'' \frac{1}{3}$; donc si l'ascension droite apparente d'*Arcturus* étoit, selon ma Table, de $211^d \; 17' \; 49'' \frac{1}{2}$, celle du Soleil sera $59^d \; 25' \; 30''$, & son vrai lieu ♊ $1^d \; 32' \; 45''$, plus avancé de $18'' \frac{1}{2}$ & $19''$ que selon les Tables des Institutions, corrigées par l'équation du centre & par la précession inégale de l'équinoxe.

Le 23 Mai, passage du Soleil en $2' \; 15'' \frac{2}{3}$ & le centre à

$4^h\ 02'\ 27''\frac{1}{6}$ de la pendule: *Arcturus* l'a ſuivi, l'horloge à pendule marquant $14^h\ 06'\ 08''\frac{1}{3}$, ce qui donne l'aſcenſion droite du Soleil à midi, de $60^d\ 25'\ 42''\frac{1}{2}$, & ſon lieu obſervé ♊ $2^d\ 30'\ 15''$; mais ſi *Arcturus* a paſſé $10^h\ 03'\ 28''\frac{2}{3}$ de temps corrigé, après le Soleil, comme on a lieu de le conjecturer, par d'autres paſſages à différens fils; le lieu obſervé du Soleil à midi, ſeroit ♊ $2^d\ 30'\ 20''$, c'eſt-à-dire 5 ſecondes plus grand; ainſi l'erreur des Tables ſeroit de 13 à 18 ſecondes dont elles ne donnent pas le lieu du Soleil aſſez avancé.

J'ai trouvé au contraire, par les obſervations du 24 Mai, qu'il falloit augmenter cette différence; ainſi l'on peut retenir pour lors 20 ſecondes pour l'erreur des Tables: voici les obſervations du 24 Mai. À $4^h\ 08'\ 07''\frac{1}{4}$, paſſage du 2.d bord du Soleil & à $14^h\ 06'\ 37\frac{1}{3}$, *Arcturus* a paſſé au même fil de la lunette, ainſi l'aſcenſion droite du Soleil à midi, a dû être de $61^d\ 26'\ 22''\frac{1}{2}$ & le lieu obſervé en ♊ $3^d\ 28'\ 05''$. Les Tables de Deſplaces donnent les mouvemens correſpondans aux longitudes du Soleil, ſi on les veut réduire en aſcenſion droite & déclinaiſon, pour en comparer les différences diurnes comme il ſuit.

Selon les Tables de Flamſteed corrigées.

	Différence.			*Différence.*	*Déclin. boréale.*	*Différence.*
♊ $1^d\ 32'\ 26''$	$57'\ 36''$	Aſc.	$59^d\ 25'\ 03''\frac{1}{2}$	$60'\ 18''\frac{1}{2}$	$20^d\ 30'\ 26''$	$11'\ 30''\frac{1}{4}$
2. 30. 02			60. 25. 22		20. 41. $56\frac{1}{3}$	
3. 27. 36	57. 34		61. 25. 48	60. 2	20. 53. 06	11. $09\frac{2}{3}$

Pour comparer ceci aux obſervations, il faut ſavoir que le quart-de-cercle a donné les diſtances au zénit, corrigées comme il ſuit;

		Différence.			*Différence.*
Aſc. dr. obſervées le 22 Mai	$59^d\ 25'\ 30''$	$60'\ 17''\frac{1}{2}$	bord ſupér.	$28^d\ 05'\ 57''\frac{1}{2}$	$11'\ 32''\frac{1}{2}$
23....	60. 25. $47\frac{1}{2}$		du	27. 54. 25	
24...	61. 26. $22\frac{1}{2}$	60. 35	Soleil.	27. 43. $17\frac{1}{2}$	11. $07\frac{1}{2}$

La diſtance apparente d'*Arcturus* au zénit.......... 28. 28. 05.

Le 19 Juillet 1769, le 2.d bord du Soleil a paſſé au quart-de-cercle mural à $7^h\ 54'\ 36''\frac{2}{3}$ & *Arcturus* au même fil à

14^h

$14^h\ 02'\ 50''\frac{1}{3}$, la pendule de Graham avançoit alors de 27 secondes par jour sur la révolution des Étoiles fixes; donc, si l'ascension droite apparente d'*Arcturus* étoit alors de $211^d\ 17'\ 40''\frac{1}{2}$, celle du Soleil à midi a dû être $118^d\ 59'\ 03''$, & son lieu en ♋ $26^d\ 56'\ 08''$, plus avancé de 13 secondes que selon les Tables corrigées; le même jour le bord supérieur du Soleil, a paru distant du zénit de $27^d\ 47'\ 57''\frac{1}{2}$ & *Arcturus* de $28^d\ 27'\ 52''\frac{1}{2}$; or il suit de-là, que le centre du Soleil étoit, le 19 Juillet, plus près du zénit de $0^d\ 6'\ 30''$ que le 23 Mai; mais à cette différence en déclinaison observée, répond un mouvement en ascension droite de $0^d\ 34'\ 59''$ que le Soleil a dû parcourir pour être à la même distance du colure des solstices qu'au 23 Mai; ainsi son ascension droite devient pour lors $119^d\ 34'\ 02''$ les deux complémens ou excès sur 90 degrés seront en Mai & Juillet $29^d\ 34'\ 12''\frac{1}{2}$ & $29^d\ 34'\ 02''$, ce qui fait voir que l'ascension droite d'*Arcturus* doit être augmentée de $7''\frac{1}{2}$ à $5''$ & qu'elle est plus grande de toute cette quantité qu'on ne l'a supposée dans le calcul; ici la difficulté consiste à pouvoir s'assurer des variations diurnes en déclinaison, puisqu'à une seconde de hauteur répondent pour lors 5 secondes $\frac{1}{3}$ en ascension droite; on ne doit donc pas être étonné de trouver une très-légère différence entre l'ascension droite observée & celle qui résulte de la Table des étoiles fixes; cette différence est presque nulle sur un mouvement propre de l'étoile en cent années: au reste, j'ai cru devoir m'en tenir à l'ascension droite d'*Arcturus* que j'ai supposée, jusqu'à ce que j'aie réitéré les années suivantes les mêmes comparaisons d'*Arcturus* au Soleil, ou bien en la comparant immédiatement avec α du petit Chien, ou bien à quelques étoiles d'Orion, comme je l'ai fait aux deux équinoxes, ce que je détaillerai plus au long dans la suite.

J'ai mesuré pareillement les 22 & 23 Mai, la distance de l'autre bord, ou inférieur du Soleil, au zénit, savoir de $28^d\ 37'\ 35''$ ou $37''\frac{1}{2}$ & de $28^d\ 26'\ 10''$, en sorte que les variations diurnes du Soleil en déclinaison de ce bord inférieur, ne seroient, du 22 au 23 Mai, que de $11'\ 25''$ à $27''\frac{1}{2}$, mais c'est à ce bord qu'on s'attache le moins ordinairement, l'usage ayant introduit dans l'Astronomie de commencer par le bord supérieur,

Or de l'aſcenſion droite moyenne d'*Arcturus* & de ſa déclinaiſon obſervée cette année, on en déduit, en ſuppoſant l'obliquité moyenne de l'écliptique 23^d 28′ 15″, la longitude au 21 Juin ♎ 21^d 00′ 58″, & ſa latitude boréale 30^d 53′ 57″.

Sachant donc actuellement à quel degré de préciſion on peut connoître immédiatement l'aſcenſion droite d'*Arcturus*, puiſque l'on n'y peut errer au-delà de 5 ſecondes, voyons ce qui réſulte d'obſervations ſemblables & très-bien ſuivies, faites il y a près de cent ans, lorſqu'on eut bâti l'Obſervatoire royal dans le dernier ſiècle.

Dès l'année 1669, *Arcturus* fut comparé au Soleil par M. Picard, en Mai & en Juillet, au jardin de la Bibliothèque du Roi, & les hauteurs méridiennes du bord ſupérieur du Soleil, furent ſoigneuſement obſervées; on peut s'attacher, ſi l'on veut, à diſcuter les Obſervations des 18 & 19, comparées à celles des 16, 17 & 21 Juillet: je n'en ai trouvé que les réſultats dans les regiſtres originaux ſur leſquels a été publié le Ier volume de l'Hiſtoire céleſte; ainſi je paſſe à celles de l'année 1675, qui ſont parfaitement détaillées, & qu'on trouvera au même volume.

Le 24 Mai 1675, M. Picard a conclu le vrai midi à 0^h 13′ 00″ par ſix hauteurs correſpondantes du Soleil, à l'aide de ſon quart-de-cercle de 32 pouces de rayon, qu'il nomme *P*. On avoit arrêté dès le 22 Mai l'autre quart-de-cercle *D* de 3 pieds de rayon, dans le plan du méridien, & on avoit eſſayé d'y comparer déjà deux fois *Arcturus* avec le Soleil; l'étoile étoit alors plus élevée d'un demi-degré ou d'un quart, que le centre du Soleil dans le méridien: or le 24 Mai les paſſages des deux bords ſont donnés; celui du centre du Soleil à 0^h 13′ 21″$\frac{1}{8}$ de la pendule; d'ailleurs lorſque deux aſtres paſſent au méridien à même hauteur, il importe peu que le fil vertical de la lunette immobile ſoit de 21 ſecondes de temps éloigné du vrai méridien, puiſqu'il n'en réſulte aucune erreur ſur leur différence en aſcenſion droite: *Arcturus* paſſa le ſoir au même fil du quart-de-cercle *D*, à 10^h 08′ 02″$\frac{1}{2}$, & puiſque par les étoiles orientales dont on prenoit les hauteurs, 23^h 56′ 03″$\frac{1}{2}$ de la pendule répondoient à 360 degrés, on aura leur différence en aſcenſion droite 149^d 04′ 46″$\frac{1}{2}$ pour l'inſtant de midi.

Les hauteurs du bord ſupérieur du Soleil, obſervées pour les jours qui précèdent & qui ſuivent, ſont

Arcturus le 29 Mai 62^d 04′ 05″.	Les	20 Mai	61^d	29′	20″	*Différence.*
		22....	61.	53.	50	
						11′ 10″
		23....	62.	05.	00	
						11. 25
		24....	62.	16.	25	
						10. 55
		25....	62.	27.	20	

Les Tables corrigées donnent la déclinaiſon du Soleil à midi,

Le 20 Mai	20^d	3′	14″$\frac{1}{2}$	*Différence.*
22....	20.	27.	26	
				11′ 36″
23....	20.	39.	02	
				11. 13
24....	20.	50.	15	
				10. 53
25....	21.	01.	08	

On voit ainſi que les 24 & 25 Mai, la hauteur du bord du Soleil a été obſervée avec plus d'attention, & qu'ainſi il n'y a pas de correction à faire.

Les 18 & 19 Juillet 1675, on prit des hauteurs correſpondantes du Soleil en très-grand nombre, ſans doute pour s'aſſurer des effets de la chaleur plus particulièrement & indépendamment des étoiles, ou ſi d'un midi à l'autre le quart-de-cercle *D* reſtoit immobile, & l'on trouva aſſez ſenſiblement la même différence entre les midis conclus à 0^h 19′ 52″ & 0^h 19′ 53″$\frac{1}{2}$, & les paſſages que l'on va rapporter ci-après; en effet, le 18 Juillet le paſſage du centre du Soleil déduit de celui de ſes deux bords, étoit au fil du quart-de-cercle à 0^h 19′ 19″, & celui d'*Arcturus* à 6^h 28′ 26″, ce qui donne pour midi la différence en aſcenſion droite, entre le Soleil & l'Étoile de 92^d 38′ 02″.

Le jour ſuivant 19 Juillet, le paſſage du centre du Soleil a été conclu de l'obſervation du 1.er bord ou occidental à 0^h 19′ 18″$\frac{1}{2}$; on prit enſuite avec le même inſtrument la hauteur méridienne du bord ſupérieur, parce que l'on croyoit néceſſaire de la conſtater avec les deux quarts-de-cercle; pour cet effet il a fallu

remuer tant ſoit peu le quart-de-cercle *D*, qui reſta enſuite immobile juſqu'au paſſage d'*Arcturus;* & comme le paſſage du 2.^{d} bord du Soleil fut obſervé au fil vertical de cet inſtrument, on en a déduit le paſſage du centre à $0^h\ 19'\ 20''\frac{1}{2}$: cela indiquoit en même temps qu'il n'étoit pas poſſible de le remuer ſur ſon genou horizontal, ſans le déranger tant ſoit peu, comme on le voit ici, d'environ 2 ſecondes de temps; c'eſt auſſi ce qui nous rend ſuſpectes les obſervations de 1669 & celles des années ſuivantes: quoi qu'il en ſoit, *Arcturus* paſſa le 19 Juillet au ſoir au fil de la lunette à $6^h\ 24'\ 27''$; on trouva enfin le 20 au ſoir par les hauteurs orientales de ε de Pégaſe, que le pendule avoit retardé en deux jours ſur le moyen mouvement de $7'\ 59''$, & que par conſéquent $23^h\ 56'\ 00''\frac{1}{2}$ répondoient à 360 degrés.

Enfin le 20 Juillet, le Soleil a paſſé en $2'\ 15''\frac{1}{2}$ au fil de la lunette du quart-de-cercle immobile, & ſon centre à $0^h\ 19'\ 19''\frac{1}{4}$ au ſoir; *Arcturus* y a paſſé à $6^h\ 20'\ 26''$, ainſi la différence en aſcenſion droite apparente entre le Soleil & *Arcturus*, ſe trouve par-là de $90^d\ 31'\ 44''$, & le jour précédent de $91^d\ 31'\ 50''$; les hauteurs méridiennes du bord ſupérieur du Soleil, ſont

				Différence.
Arcturus $62^d\ 04'\ 10''$. Les	18 Juillet	$62^d\ 28'\ 50''$	*D* & *P*	$10'\ 55''$ ou $50''$
	19	62. 17. 55	& 60″	11. 25 ... 20.
	20	62. 06. 35	*P.*	11. 15 ... 05.
	21	61. 55. 20	& 30.	

Soit ſuppoſé d'après les Élémens publiés dans l'Hiſtoire céleſte; l'aſcenſion droite moyenne d'*Arcturus* au 21 Juin 1675, de $210^d\ 13'\ 08''\frac{1}{2}$; on verra bientôt par les réſultats des obſervations s'il faut augmenter ou diminuer cette aſcenſion droite: or l'aſcenſion droite apparente a dû être par conſéquent au mois de Juillet $210^d\ 13'\ 33''$, & l'aſcenſion droite du Soleil obſervée à midi

			Différence.
Les	18 Juillet	$117^d\ 41'\ 25''$	$60'\ 18''$
	19	118. 41. 43	60. 06.
	20	119. 41. 49	

Les Tables corrigées, donnent l'aſcenſion droite & la déclinaiſon comme il ſuit:

			Différences.		Différences.
Les	18 Juillet	$117^d\ 41'\ 55''$		$21^d\ 2'\ 27''$	
	19	118. 42. 09.	$60'\ 14''$	20. 51. 38	$10'\ 49''$
	20	119. 42. 17	60. 08	20. 40. 31	11. 07
	21			20. 29. 00 $\frac{1}{2}$	11. 30 $\frac{1}{2}$

Ainſi les obſervations paroiſſent aſſez conformes au mouvement diurne en aſcenſion droite, tiré des Tables aſtronomiques, celle du 18 Juillet pouvant être diminuée, ſi l'on veut, de 3 ſecondes; mais aux hauteurs méridiennes, la correction du 20 à midi, paroît être plus importante, ſi on l'interpole pour rétablir la loi de progreſſion; au reſte, ſoit qu'on l'augmente ou non de 10 ſecondes, on pourra comparer immédiatement la hauteur du 24 Mai 1675 à midi, avec celle qui fut obſervée le 19 Juillet, & dans les deux cas la différence ſe trouve de 1′ 35″ dont le Soleil étoit plus bas le 24 Mai qu'au 19 Juillet.

On tire de ces obſervations l'aſcenſion droite moyenne d'*Arcturus* au 21 Juin 1675, de $210^d\ 13'\ 40''$: or de ſa déclinaiſon moyenne $20^d\ 53'\ 33''$, & de l'obliquité moyenne de l'écliptique $23^d\ 28'\ 50''$, l'on en déduit ſa longitude ♎ $19^d\ 43'\ 02''\frac{1}{2}$ avec une latitude boréale de $30^d\ 57'\ 47''$.

Ainſi en quatre-vingt-quatorze ans, *Arcturus* auroit parcouru en longitude $1^d\ 17'\ 55''\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire $24''\frac{1}{2}$ de moins que ſelon la préceſſion moyenne de l'équinoxe qu'on ſuppoſe vulgairement de 50 ſecondes par an, ou bien en cent ans de $1^d\ 23'$ $20''$: mais les obſervations anciennes & modernes donnent au moins $\frac{1}{3}$ de ſeconde d'accroiſſement annuel, ou bien $33''\frac{1}{3}$ de plus en cent ans; dans cette dernière ſuppoſition, qui eſt reçue comme plus vraiſemblable que l'autre, *Arcturus* auroit rétrogradé contre l'ordre des ſignes, par ſon mouvement propre en longitude de 56 ſecondes, & par conſéquent de $59''\frac{1}{2}$ à $60''$ en cent ans; à l'égard de la latitude, on trouve une variation de $3'\ 50''$ en quatre-vingt-quatorze ans, ce qui donne fort approchant de 4 minutes en cent ans.

EXTRAIT

Du Mémoire du Docteur HALLEY.

Transactions Philosophiques n.° 355.

AYANT eu depuis peu occasion d'examiner la quantité de la précession des points des Équinoxes, j'ai pris la peine de comparer la déclinaison des Étoiles fixes, délivrée par Ptolémée, au *chapitre III du VII.e livre de son Almageste*, comme observée par Thymocharis & Aristille, près de trois cents ans avant J. C. & par Hipparque, environ cent soixante-dix ans après ceux-ci; c'est-à-dire cent tiente ans avant J. C; avec celle qu'on a établie en ces derniers temps, & par le résultat de quantité de calculs faits à ce dessein, j'ai conclu qu'en dix-huit cents ans, les Étoiles fixes s'étoient avancé quelque peu plus que 25 degrés en longitude; en un mot, que la précession des équinoxes étoit tant soit peu plus grande que 50 secondes par an; mais ce résultat est fondé sur quelqu'incertitude, à cause de l'imperfection des Observations anciennes, & c'est pour cela que je me suis déterminé dans mes Tables, à adhérer à la proportion exacte de 5 minutes en six ans, ce qui par d'autres principes nous paroît être assuré n'être pas loin de la vérité: Mais pendant que j'étois occupé de ces recherches, j'ai été surpris de trouver les latitudes de trois des principales étoiles qu'on voit au ciel, contredire à la supposition de la plus grande obliquité de l'écliptique, quoique cette plus grande obliquité paroisse confirmée par la plupart des autres étoiles qu'on trouve dans le vieux Catalogue, comme si le plan de l'orbite de la Terre avoit changé sa situation parmi les étoiles fixes, d'environ 20 minutes depuis le temps d'Hipparque: cela se voit particulièrement dans les étoiles des Gémeaux qui sont au nord de l'écliptique, qui ont une moindre latitude que nous ne la trouvons aujourd'hui; & au contraire, celles du sud de l'écliptique ont une plus grande latitude australe que nous ne la trouvons. Cependant trois étoiles, savoir *Palilicium* ou l'œil du Taureau, *Sirius* & *Arcturus*, contredisent directement à cette règle; car à l'égard de *Palilicium*, cette étoile étant au temps d'Hipparque vers 10 degrés du Taureau, a dû être environ à 15 minutes

plus ſud qu'à préſent, & *Sirius* étant alors vers 15 degrés des Gémeaux, auroit dû être 20 minutes plus ſud qu'aujourd'hui; mais au contraire Ptolémée place la première 20 minutes, & l'autre 22 minutes plus nord en latitude que nous ne les trouvons; ce ne ſont pas des erreurs de Copiſtes, car cela eſt prouvé devoir être exact par leur déclinaiſon que rapporte Ptolémée, leſquelles ont été obſervées par Thymocharis, Hipparque & par lui-même: or ces déclinaiſons font voir que les latitudes de ces étoiles ſont les mêmes que ſelon l'intention des ſuſdits auteurs. Quant à *Arcturus*, cette étoile eſt trop proche du colure des équinoxes, pour en pouvoir tirer quelqu'argument contre le changement de l'obliquité de l'écliptique; mais Ptolémée nous donne ſa poſition 33 minutes plus nord en latitude qu'on ne la trouve aujourd'hui, & on remarquera que cette plus grande latitude, eſt encore confirmée par les déclinaiſons que nous ont laiſſées les mêmes Obſervateurs dont j'ai parlé.

Il eſt donc évident que ces trois étoiles ſe trouvent d'un demi-degré plus au ſud actuellement, qu'elles ne l'ont paru aux temps des anciens Aſtronomes; tout au contraire, aux mêmes temps la brillante de l'épaule d'Orion, paroît dans Ptolémée, près d'un degré plus ſud en latitude qu'on ne la trouve en ces années-ci; que peuvent donc ſignifier ces différences? il n'eſt pas poſſible de ſe figurer que les Anciens ſe ſoient ſi fort trompés dans une matière ſi facile à traiter, & ſur-tout par trois Obſervateurs qui ſe ſont confirmés l'un l'autre; d'ailleurs ces Étoiles ſont des plus remarquables du Ciel, & il eſt bien probable qu'elles ſont plus proches de la Terre que les autres, & que ſi elles ont par-devers elles quelques mouvemens particuliers, il eſt plus vraiſemblable qu'on doit les apercevoir dans un auſſi long eſpace de temps que dix-huit cents ans qui doit déſigner l'altération dans leurs poſitions, que de recourir à quelque choſe d'imperceptible que pourroit donner un intervalle d'environ cent ans.

Néanmoins quant à *Sirius*, il a été obſervé par Tycho près de 2 minutes plus nord que nous ne le trouvons aujourd'hui, lorſqu'au contraire il devroit être beaucoup plus ſud à l'égard de l'écliptique que Tycho a ſuppoſée $2' \frac{1}{2}$ plus grande que nous ne la faiſons, ce qui diffère en tout de 4 minutes. On peut bien rejeter la moitié de cette différence ſur la réfraction à laquelle

Tycho n'a pas eu égard, mais 2 minutes dans la latitude d'une étoile telle que *Sirius*, est une quantité trop forte pour devoir être admise comme erreur.

REMARQUES

Sur un Écrit lû à l'Assemblée dernière par M. Cassini.

Par M. LE MONNIER.

6 Septembre 1769.

IL paroît évident par le Mémoire que j'ai lû à l'Académie quelque temps avant l'Écrit dont il a été question dans la dernière Assemblée, que je n'ai eu en vue que de constater deux élémens essentiels à l'Astronomie, ce qui a été le fruit de mon travail.

Le premier de ces élémens consiste à déterminer le vrai lieu du Soleil le 3 Juin 1769, & ensuite au temps du passage de son apogée, en le comparant avec l'étoile *Arcturus.*

En second lieu, de décider par de nouvelles observations & indépendamment des Tables astronomiques, ainsi qu'on l'a pratiqué en 1738, quelle a été la position d'*Arcturus* en ascension droite & sa vraie longitude & latitude.

Qu'outre ces deux élémens essentiels, je ne me suis pas contenté de rechercher la longitude d'*Arcturus*, en y employant la moyenne précession vulgaire des équinoxes, mais que j'ai recherché encore indépendamment des Tables astronomiques, quelle a été la position d'*Arcturus* il y a près de cent ans, ce qui ne s'étoit pas encore pratiqué, qu'enfin j'ai trouvé dans quel sens le mouvement propre d'*Arcturus* affectoit la loi de son mouvement apparent, indépendamment de celui qui est causé par la moyenne précession de l'équinoxe, & que ç'a été contre l'ordre des signes.

Aucun auteur connu n'a traité jusqu'ici cette matière, quoiqu'en 1719, dans les Transactions philosophiques, & en 1738 dans nos Mémoires, il ait été reconnu qu'*Arcturus* avoit un mouvement réel en latitude.

MÉMOIRE

MÉMOIRE SUR L'INCLINAISON DU TROISIÈME SATELLITE DE JUPITER.

Par M. MARALDI.

LE mauvais temps ne nous a pas permis cette année de déterminer avec précision l'inclinaison du 3.e satellite de Jupiter; il nous a empêché d'observer les éclipses de ce Satellite, qui sont arrivées vers la fin de Février & de Mars, & au commencement d'Avril, temps auquel Jupiter étoit aux limites des plus grandes latitudes, ou très-proche. Les observations dont je me suis servi pour calculer cette année l'inclinaison du 3.e sont, non-seulement éloignées des limites, mais elles ont été faites dans des circonstances peu favorables; cependant je me hâte de les publier, parce qu'il paroît que l'inclinaison n'a pas augmenté comme elle auroit dû, suivant la théorie de M. Bailly, mais qu'au contraire elle a diminué, de sorte que la moitié de la période de ses variations paroît avoir été accomplie en 1763, & n'être que de soixante-six ans, dont le double, c'est-à-dire 132, seroit la période entière. Comme il est très-important de constater cet Élément de la théorie du 3.e satellite de Jupiter, je prie M.rs les Astronomes de l'Académie de communiquer mes observations à leurs Correspondans, & les prier de me communiquer les leurs, sur-tout celles des mois de Février, Mars & Avril: voici mes observations.

28 Juin 1769.

Temps vrai.

1769, 31 Mars, $12^h\ 43'\ 39''$ Immers. du 3.e Satellite, Jupiter est bien terminé, on voit assez bien les bandes; lunette de Campani de 15 pieds.

12. 43. 53. Immers. par M. Cassini fils, avec une lunette achromatique de Dollond, de 42 pouces, qui n'est pas parfaite.

Temps vrai.

1769, 18 Juin, 8h 27′ 30″ Imm. du 3.e Satellite, Ciel ſerein : on voit bien les bandes, mais il fait grand jour : lunette achromatique de 36 pouces, faite à Paris par M. Létan; elle a 27 lignes d'ouverture & groſſit 65 fois.

10. 1. 9. Émerſ. Même lunette, ciel ſerein, on voit bien les bandes.

25 Juin, 12. 24. 43. Immerſ. ciel ſerein, Jupiter bien terminé, mais il eſt bas & on voit difficilement les bandes; même lunette.

12. 25. 0. Imm. M. Caſſini, fils, lunette achromatique de Dollond, de 42 pouces.

On voit, par le détail de ces obſervations, que l'immerſion du 18 Juin eſt arrivée 24 minutes ſeulement après le coucher du Soleil; il faiſoit grand jour, qui diminuoit la lumière du Satellite : ainſi, quoique le ciel fût parfaitement ſerein, cette Obſervation peut n'être pas ſi exacte que ſi elle étoit arrivée dans la nuit cloſe. Le 25 Juin, Jupiter étoit bas, & on voyoit difficilement les bandes, circonſtances qui rendent les obſervations douteuſes; cependant Jupiter étoit bien terminé, & les autres Satellites étoient brillans. M. Meſſier a marqué ces deux immerſions plus de deux minutes plus tard que moi. Mais il s'eſt ſervi d'une excellente lunette acromatique de 36 pouces, faite à Paris par le même M. de Létan, qui a 39 lignes d'ouverture, & groſſit cent dix fois; au lieu que la mienne, quoique de la même longeur, n'a que 27 lignes d'ouverture, & ne groſſit que ſoixante-cinq fois.

Cependant M. Meſſier & moi, avons vu l'émerſion du 18 Juin preſque en même temps, & même je l'ai vu 13 ſecondes plus tôt que lui, dont je ſuis extrêmement ſurpris, vu la grande différence qu'il y a entre nos obſervations des immerſions. M. Meſſier m'a prié de communiquer à l'Académie ſes obſervations que voici :

Temps vrai.

1769, 18 Juin, 8h 29′ 32″ Immerſion du 3.e Satellite; 8 minutes avant il avoit déjà ſenſiblement perdu de ſa lumière; le ciel étoit beau; on voyoit très-bien les bandes, mais il faiſoit grand jour.

Temps vrai.

1769, 18 Juin, 10^h 1′ 22″ Émerſ. du 3.e Satellite; le ciel également ſerein; les bandes ne ſe voyoient pas ſi bien que dans l'immerſion; c'eſt une remarque que j'ai déjà faite, qu'on voit beaucoup mieux les bandes dans le crépuſcule que dans une nuit obſcure.

18 Juin, 10^h 2′ 53″ Le Satellite n'a preſque point augmenté de lumière.

10. 10. 7. La lumière du Satellite ſemble égaler celle du ſecond.

10. 17. 0. Il paroît avoir toute ſa lumière.

25 Juin, 12^h 14′ 0″ Le 3.e Satellite ſemble perdre de ſa lumière.

12. 26. 51. Je perds le Satellite de vue, il y avoit plus d'une minute & demie qu'il étoit très-petit.

12. 27. 36. Je le perds pour la ſeconde fois, après l'avoir revu pendant pluſieurs ſecondes & d'une lumière extrêmement foible: dans cette obſervation Jupiter étoit bas, mais il faiſoit beau, le ciel étoit pur, Jupiter aſſez bien terminé; on voyoit cependant difficilement les bandes, mais les Satellites étoient brillans.

Voyons maintenant le réſultat de ces obſervations. La demi-durée de l'Éclipſe du 18 Juin a été, ſuivant mes obſervations, de 0^h 46′ 49″ $\frac{1}{2}$; la longitude de Jupiter, vue du Soleil étoit de 7^s 21^d 19′: je ſuppoſe celle du nœud aſcendant de 10^s 14^d 0′; donc la diſtance de Jupiter au ☊ aſcendant étoit de 9^s 7^d 19′; je ſuppoſe, comme en 1763, le demi-diamètre de la ſection de l'ombre de ♃ dans l'orbe du 3.e ſatellite de 3^d 43′ 16″ que le Satellite parcourt en 1^h 46′ 40″. Avec ces élémens, je trouve l'inclinaiſon de 3^d 22′ 23″; mais je l'ai trouvée, en 1763, de 3^d 24′ 42″: donc elle eſt moindre cette année, qu'en 1763, & la différence eſt de 2′ 19″. Par les obſervations de M. Meſſier, on trouve cette inclinaiſon de 3^d 23′ 34″, moindre de 1′ 8″ qu'en 1763. Comme j'avois quelque ſcrupule

ſur mon Obſervation de l'immerſion du 18 Juin, faite pendant le grand jour, qui m'a empêché mercredi dernier de communiquer les obſervations de cette Éclipſe à l'Académie, j'ai calculé la demi-durée qui réſulte de l'émerſion obſervée le 18, & de l'immerſion obſervée le 25, & je l'ai trouvée par mes obſervavations de 47′ 15″, c'eſt-à-dire 26 ſecondes plus grande que celle qui a été obſervée immédiatement, ce qui prouve que mon Obſervation du 25 Juin, eſt moins bonne que celle du 18. Les obſervations de M. Meſſier donnent préciſément la même demi-durée que celle qui a été obſervée, c'eſt-à-dire, 45′ 55″. Je dois avertir que je me ſuis ſervi dans le calcul de l'inclinaiſon du demi-diamètre de la ſection de l'ombre de 3^d 43′ 16″, pour faire voir la différence de l'inclinaiſon déterminée en 1763 de celle qui a été trouvée cette année; mais je le ſuppoſe dans mes Tables de 3^d 41′ 18″, que le Satellite parcourt dans 1^h 47′ 10″, parce qu'il s'accorde mieux au plus grand nombre des obſervations. Dans cette hypothèſe, l'inclinaiſon a été de 3^d 25′ 41″ en 1763, & de 3^d 23′ 33″ en 1769.



OCCULTATION
DE μ DES GÉMEAUX, PAR LA LUNE,
Le 11 Avril 1769;
Avec des Remarques sur la distance des Étoiles α & β des Gemeaux.

Par M. LE MONNIER.

M. DE VERDUN, Lieutenant de Vaisseau, m'ayant fait remettre un nouveau mégamètre qu'il a fait construire sur les principes de M. de Charnières ; j'ai voulu mesurer, pour essayer cet instrument, quelques distances de la Lune aux Étoiles, aussitôt qu'on a pû les apercevoir dans le crépuscule. 12 Avril 1769.

Ayant jeté les yeux sur le zodiaque de d'Heulland, je me suis aperçu à 7 heures du soir que l'étoile μ des Gémeaux, de la 3.e grandeur, étoit déjà éclipsée par le disque obscur de la Lune ; j'ai donc attendu l'émersion avec d'autant plus de soin, que l'ouragan m'avoit fait manquer à 4 heures $\frac{3}{4}$ le passage de la Lune par le méridien. L'émersion qui fuit 10″ à 12″$\frac{1}{2}$ trop tard.

A $7^h\ 46'\ 03''$, j'ai vu cette étoile avec ma lunette de 9 pieds, détachée du disque lumineux de la Lune, sa distance à la corne boréale étant de $12^d\frac{1}{2}$ ou environ, ce qui est suffisant pour en conclure la longitude & la latitude de la Lune ce jour-là.

Je me sers pour cet effet, des Tables fort étendues, qui sont destinées à donner la hauteur & la distance au méridien du nonagésime degré, depuis l'équateur jusqu'au 60.e degré de latitude.

Suite des Observations faites aux Étoiles pour vérifier le mégamètre.

M. de Charnières propose dans la seconde partie de son ouvrage, publiée en 1768, la distance des deux étoiles α & β du petit Chien; mais cette distance pour la suite, sera variable,

à cauſe que l'étoile α ou *Procyon,* qui eſt de la 1.re grandeur, a un mouvement propre en latitude, lequel s'accroît à chaque ſiècle d'environ la moitié de celui d'*Arcturus,* ainſi qu'on l'a remarqué il y a plus de vingt ans, outre qu'il en eſt fait mention, *page 398 des Inſtitutions Aſtronomiques*, ce qui a occaſionné la correction dans la déclinaiſon boréale, telle qu'on la trouve à la *page 75 du Mémoire ſur les Longitudes, de M. de Charnières.*

J'ai donc cherché deux étoiles éloignées de 4 à 5 degrés, dont la diſtance fût invariable pendant un ſiècle, & comme il falloit donner la préférence aux étoiles de même grandeur, j'ai trouvé enſin les deux étoiles Caſtor & Pollux, autrement α & β des Gémeaux, dont je vais rapporter les obſervations.

Le 22 Avril 1769, entre α & β des Gémeaux, temps écoulé au paſſage par le méridien $0^h\ 11'\ 22''$, qui valent $2^d\ 50'\ 25''$, en déclinaiſon $3^d\ 48'\ 30''$, ce qui en 1767 avoit été vérifié le 2 Mars au ſoir; or l'on tire, de ces obſervations, la diſtance apparente par une méthode différente de la règle vulgaire des Tables, laquelle eſt fauſſe pour deux côtés de l'angle compris, de $4^d\ 31'\ 34''$.

Flamſteed, en 1690, a trouvé $0^h\ 11'\ 31''$ pour différence en aſcenſion droite, & $3^d\ 47'\ 15''$ pour différence en déclinaiſon, ce qui a été confirmé ſept à huit fois les années ſuivantes juſqu'en 1696, lorſqu'on a trouvé, le 8 & le 14 Mars, $0^h\ 11'\ 30''\frac{1}{2}$ ou 30 ſecondes, α la déclinaiſon $3^d\ 47'\ 30''$. Suppoſant donc en comparant ces obſervations au Catalogue, la différence $2^d\ 53'\ 10''$ en déclinaiſon & $52^d\ 29'\ 00''$ au nord de l'équateur, on trouve la diſtance de $4^d\ 31'\ 48''$.



EXAMEN DE LA QUESTION,

SI LES ESPÈCES CHANGENT PARMI LES PLANTES;

Nouvelles Expériences tentées à ce sujet.

Par M. ADANSON.

UNE question des plus célèbres & des plus agitées depuis quelques années en Histoire Naturelle, & sur-tout en Botanique, est de savoir si les espèces sont constantes, ou si elles changent parmi les Plantes, c'est-à-dire, si, par la communication des sexes ou autrement, il se forme de nouvelles espèces qui se fixent à leur tour, & qui se reproduisent constamment sous cette nouvelle forme, sans reprendre celle des Plantes dont elles ont tiré leur origine.

15 Novemb. 1769.

Cette question fut proposée pour la première fois en 1719, par M. Marchant dans les Mémoires de l'Académie.* Au mois de Juillet 1715, il aperçut dans son jardin une plante qu'il ne connoissoit pas, & qui s'éleva jusqu'à cinq ou six pouces; elle subsista jusqu'à la fin de Décembre, où elle se dessécha, & périt. Il crut ne pouvoir la rapporter qu'au genre de la Mercuriale; & comme elle étoit toute nouvelle, & n'avoit point encore été décrite par les Auteurs, il la nomma *Mercuriale à feuilles capillaires (Mercurialis foliis capillaceis).*

* *Voy. Mém. de l'Acad. année 1719, p. 60, planches 6 & 7.*

L'année suivante 1716, au mois d'Avril, dans le même endroit où avoit été cette plante, il en vit paroître six autres, dont quatre étoient toutes semblables à l'ancienne, & deux autres assez différentes pour faire une autre espèce de Mercuriale qu'il nomma *Mercuriale à feuilles découpées & comme déchirées, (Mercurialis foliis in varias & inæquales lacinias quasi dilaceratis)*; elle subsista aussi jusqu'à la fin de Décembre, en quoi ces deux espèces sont différentes de la Mercuriale vulgaire, qui, quoiqu'annuelle aussi bien qu'elles, ne dure pas aussi long-temps: ces deux plantes nouvelles se sont multipliées depuis dans l'espace de

7 ou 8 pieds de terrein; & ce qui eſt étonnant, jamais M. Marchant ne leur a pu découvrir aucune apparence de graine. Cependant la petite étendue où elles renaiſſent tous les ans, prouve aſſez qu'elles doivent être venues de ſemences qui y ſeront tombées des plantes précédentes; comme on a découvert les ſecrets dont pluſieurs plantes ſe ſervent pour cacher leurs graines, il eſt plus merveilleux qu'il y en ait encore qui puiſſent réuſſir à les dérober.

« Par cette Obſervation, dit M. Marchant, il y auroit donc » lieu de ſoupçonner que la Toute-puiſſance ayant une fois créé des » individus de plantes pour modèle de chaque genre, faits de toute » ſtructure & caractères imaginables, propres à produire leurs ſem- » blables, & que ces modèles, dis-je, ou chefs de chaque genre » en ſe perpétuant, auroient enfin produit des variétés, entre leſ- » quelles celles qui ſont demeurées conſtantes & permanentes, ont » conſtitué des eſpèces qui, par ſucceſſion des temps & de la même » manière, ont fait d'autres différentes productions qui ont tant » multiplié la Botanique dans certains genres, qu'il eſt conſtant » qu'on connoît aujourd'hui dans quelques genres de plantes juſqu'à » cent, cent cinquante, & même juſqu'à plus de deux cents eſpèces » diſtinctes & conſtantes, appartenant à un ſeul genre de plante.

» La preuve de ce qu'on avance au ſujet de la production des » eſpèces, paroît d'autant mieux fondée, que l'on ſait que les » plus anciens Botaniſtes n'ont fait mention que d'environ quatre » cents chefs de genres de plantes, auxquels ils ajoutent peu d'eſpèces, » ce qui donne à penſer que les eſpèces n'étoient pas encore fort » nombreuſes; au lieu que nous connoiſſons à préſent plus de huit » cents chefs de genres ſurchargés de treize à quatorze mille eſpèces » ou davantage, entre leſquelles, à la vérité, pluſieurs ſont répétées, & d'autres ne ſont que de ſimples variétés. »

Cette opinion reſta dans l'oubli juſqu'à l'année 1744, où M. Linnæus après avoir regardé les eſpèces comme conſtantes en 1740, *(Fundamenta Bot. n.° 157. Edit. in-4.° 1740)* commença à en douter, & même à croire à la production de nouvelles eſpèces en parlant de la plante qu'il appelle *Peloria;* & après avoir cité les deux exemples de M. Marchant, il en rappelle ſix autres que nous allons rapporter.

La

La *Peloria* *, c'eſt ainſi qu'il nomme cette nouvelle eſpèce, fut découverte pour la première fois en 1742, par M. Zioberg, dans une île ſituée en mer, à environ ſept milles d'Upſal vers la province de Roſlagne, ſur un terrein graveleux, tout couvert de Linaires, au milieu deſquelles elle étoit en moindre quantité. On en a trouvé depuis dans pluſieurs endroits de la Suède, ſelon M. Linnæus; & aux environs de Berlin, au rapport de M. Ludolfe: cette plante reſſemble tellement à la Linaire commune, (*Linaria vulgaris lutea, flore majore. C. B.*) avant l'épanouiſſement de ſes fleurs, qu'on n'y peut voir aucune différence; elle en a le port, la grandeur, l'odeur, la couleur, les feuilles, le calice, les étamines, le piſtile, le fruit & les graines: mais ſa corolle eſt fort différente, au lieu du tube court de la Linaire, terminé par deux lèvres irrégulières à quatre crénelures, & armé en bas d'un éperon, la corolle de la *Peloria* a un tube fort long, terminé par un pavillon preſque régulier à cinq crénelures, & entouré au bas de cinq éperons. Outre la reſſemblance parfaite qu'a la *Peloria* avec la Linaire dans toutes ſes autres parties, on a trouvé quelquefois ſur une même tige des fleurs de la Linaire commune, ce qui prouve inconteſtablement que cette plante provient d'une Linaire par une fécondation étrangère, ſon ſtigmate ayant reçu la pouſſière d'une autre plante de la même famille, qu'on ſoupçonne être la Juſquiame ou le Tabac, dont la corolle a, à peu près, la forme de celle de la *Peloria*. Enfin ce qui établit cette plante pour une nouvelle eſpèce, c'eſt qu'elle donne des graines parfaites par leſquelles elle ſe reproduit depuis pluſieurs générations, ce qui fait penſer à M. Linnæus, qu'elle ſera une eſpèce conſtante.

* *V. Linnæus, Amænitates Academicæ, vol. I.er Diſſert. 3, de Peloriâ.*

M. Linnæus cite encore deux métamorphoſes ſemblables; il aſſure que tous les ans dans le Jardin d'Upſal, les graines du Chardon à tête velue (*Carduus capite rotundo, tomentoſo. C. B.*) dégénérées, lui donnent le Chardon des Pyrénées à têtes velues & raſſemblées (*Carduus tomentoſus, Pyrenaicus, floribus purpureis glomeratis.* Tournef.) il ignore ſi cette variation provient des ſemences du diſque ou de la couronne, ou de ces ſemences fécondées par la pouſſière d'une autre plante.

À l'égard de la cinquième espèce de transformation, voici ce que le même Auteur écrivoit en 1748, à Gmelin : « j'ai aujourd'hui une espèce mulâtre de Plante née de la grande Vervène d'Amérique à feuilles étroites *(Verbena Americana altissima, urticæ foliis angustis, floribus cærulcis.* Herm. Par. l. 242.) & de la petite Vervène d'Amérique à feuilles découpées, *(Verbena humilior foliis incisis.* Clayt. Virg. 8.) que j'élève depuis long-temps. Il en a paru cette année (1748) une nouvelle espèce qui a exactement les feuilles de la Vervène d'Europe *(Verbena communis cæruleo flore. G. B.)*, & toutes les autres parties de la grande Vervène d'Amérique *(Verbena Americana, altissima)* citée ci-devant. Les deux Plantes en question ont eu la même couche ; & je vous jure que je vois cette troisième pour la première fois, que personne ne me l'a donnée, & qu'on n'a semé aucune autre plante sur cette couche. »

Le sixième exemple de changemens semblables, sur lequel s'appuie M. Linnæus, est tiré de Gmelin qui dit (en 1749), que M. Haller lui a écrit, qu'on a trouvé près de Nuremberg, une Plante pareille à la Linaire à feuilles de nummulaire *(Linaria segetum nummularia, folio aurito & villoso.* Tournef.) mais avec une fleur toute semblable à celle de la *Peloria*, & qui paroît s'être transformée de même.

Le même Gmelin cite encore un septième exemple en 1749 : « j'ai, dit-il, fourni à M. Linnæus l'exemple du pied d'alouette de Sibérie, *Delphinium*, dont je n'ai observé dans ce pays-là que deux espèces distinctes, & dont j'ai compté, dans mon jardin de Péterfbourg, jusqu'à six espèces. Les principales différences consistoient dans les feuilles découpées plus ou moins profondément, plus ou moins fermes, droites ou pendantes, de couleur plus ou moins foncée ; les fleurs étoient aussi plus ou moins grandes : ces différences laissoient l'Observateur incertain sur l'espèce à laquelle il falloit rapporter ces plantes ; je pense qu'elles provenoient du mélange des deux espèces dont je viens de parler : cela est d'autant plus probable, que ces deux espèces réellement distinctes, étoient plantées l'une près de l'autre. »

En 1749 & en 1751, M. Linnæus *(Amænit. Acad. Vol. III,*

differt. 32, de Plantis hybridis), a cru pouvoir prouver par des obſervations ſûres, que la *Pimpinella agrimonoides Mor.* qui s'eſt reproduite de graines pendant pluſieurs années à Upſal, eſt une nouvelle eſpèce de Plante née de la Pimprenelle commune, *Pimpinella ſanguiſorba minor, lævis. C. B.* fécondée par la pouſſière de l'aigremoine, *Agrimonia officinarum, C; B,* & il ajoute qu'il eſt probable, quoiqu'on ne ſoit point appuyé d'obſervations là-deſſus, que pluſieurs Plantes ont été formées ainſi: le *Nymphoides*, Tournef. paroît ſelon lui reconnoître pour père le *Menyante*, & pour mère le *Nymphæa;* le *Datiſca* a eu de même pour père le *Chanvre*, & pour mère le *Reſeda;* le *Tragopogon gramineis foliis hirſutis*, a eu pour père le *Lapſana;* l'*Hyoſcyamus Phyſalodes, Linn.* a eu pour père l'*Alkekenge;* la *Saxifraga, Fl. Suec. 358*, reconnoît pour père la *Parnaſſia*, comme la *Cataria* eſt le père de la *Moldarica betonicæ folio, floribus minimis pallidè cæruleis, Amm.* & comme la *Cortuſa Matth.* eſt le père de la *Primula 7 Cortuſioides, Linn.* Il prétend encore dans cette diſſertation que tous les *Meſembryum* du cap de Bonne-eſpérance, ainſi que les Geranions, les Cierges, les Aloès, ſont des dégénérations d'une première eſpèce.

Enfin M. Linnæus paroît plus perſuadé que jamais de la production de nouvelles eſpèces de Plantes, ainſi que Gmelin dans ſa Diſſertation ſur le ſexe des Plantes, *(de ſexu Plantarum 1760, in-4.° Petropoli)* où il dit pages 28 & 29. *Dubitari nequit quin Veronica ſpuria, Delphinium hybridum, Hieracium hybridum, Tragopogon hybridum, ſint novæ ſpecies generatione hybridâ productæ. ..... Et Gerania Botanicos facilè adducent ut credant ſpecies ejuſdem generis in vegetabilibus eſſe diverſas plantas, quot in una ſpecie florum commixtiones factæ ſunt, & viciſſim genera nihil aliud eſſe quam plantas, eadem matre & diverſis patribus ortas.*

Novus hic aperitur campus Botanicis, in quo diverſarum plantarum polline diverſis fœminis viduis factis inſternendo, novas tentent efficere ſpecies vegetabilium.

Il eſt donc évident, par ces divers paſſages, que M. Linnæus après avoir dit, en 1740, que les eſpèces ſont conſtantes parmi les Plantes, penſe tout différemment en 1744; & qu'en 1749

& en 1760 il admet, non-ſeulement la formation naturelle de nouvelles eſpèces, mais encore la poſſibilité d'augmenter artificiellement le nombre de ces nouvelles eſpèces.

Nous avions d'abord été autoriſés à penſer comme lui ſur le récit de ces faits que nous ſuppoſions vrais, bien conſtatés, bien examinés; mais depuis que nous avons vu croître & multiplier ſous nos yeux la plupart de ces prétendues nouvelles eſpèces, depuis que nous avons élevé, non-ſeulement la Pelore vivace de la Linaire commune, envoyée par M. Linnæus; mais encore une Pelore annuelle qui s'eſt formée, par haſard en 1762, de la Linaire d'Eſpagne appelée *Linaire à feuilles menues & à fleur couleur de rouille (Linaria tenui folia, æruginei coloris)* ſemée ſur les couches du Jardin royal: depuis que le même haſard nous a procuré en 1766, la deuxième Mercuriale que Marchant appelle Mercuriale à feuilles découpées & comme déchirées. *(Mercurialis foliis in varias & inæquales lacinias quaſi dilaceratis.* Mém. Acad. 1719, Tab. 6 & 7) Depuis que nous avons vu d'autres Plantes nouvelles, telles que le fraiſier à une feuille qui s'eſt formé en 1763, & le Sucrion quarré que nous avons vu naître en 1765; depuis que nous avons examiné par nous-mêmes, ces plantes annoncées comme de nouvelles eſpèces, nous avons cru devoir en porter un jugement bien différent.

Pour en juger, rapportons ces faits chacun à leur place, examinons-les avec des yeux plus attentifs, dépouillés des préjugés, & qualifions chacun du nom qui lui convient.

I.re EXPÉRIENCE. La Mercuriale citée ci-deſſus, & qui avoit été aperçue par M. Marchant dans ſon jardin en 1715 & 1716, a reparu pour la première fois depuis ce Botaniſte dans les pots de ſemences de la Chine, faites en Avril 1766, ſous les chaſſis du Jardin royal, par M. de Juſſieu qui me confia cette Plante pour ſuivre les expériences que je vais rapporter.

La plante, quand elle me fut confiée le 11 Juin ſuivant, avoit quatre pouces de hauteur, & étoit en pleine fleur; c'étoit un individu mâle: ſes cotyledons ou feuilles ſeminales étoient plus longs que dans la Mercuriale ordinaire, étant elliptiques une fois & demie plus longues que larges, au lieu que l'ordinaire les a

presqu'arrondies, de manière que leur longueur surpasse à peine de moitié leur largeur : ses feuilles inférieures ressembloient assez à celles du *Reseda* commun, déchiquetées ou ailées sur un rang, & comme rongées par des insectes, sans cependant en avoir reçu la plus légère atteinte; les supérieures étoient simples, presque linéaires, la plupart alternes, longues d'un pouce à un pouce $\frac{1}{2}$, d'un vert noir comme celles du *Reseda*, mais cependant mouchetées de petits points irréguliers, semblables à des boursouflures d'un vert plus clair, comparable à la jaunisse des feuilles malades, ou dont la séve est viciée, & l'organisation des vaisseaux dérangée: la tige verte, les stipules aux tiges, & les fleurs mâles en épi axillaire, porté sur un pédicule assez long, comme dans les Mercuriales ordinaires; le calice des fleurs a de même trois divisions, mais plus petit, & les étamines au nombre de trois à douze, mais avec des anteres vertes trois fois plus petites que dans la Mercuriale commune, & semblable à une vessie sphérique, vide de poussière séminale.

Le seul moyen de perpétuer cette Plante, bien reconnue pour mâle, étoit de féconder des pieds de Mercuriale femelle avec la poussière de ses étamines, (s'il étoit vrai qu'elles en continssent) & de semer les graines de ces Mercuriales ainsi fécondées par cette seule Mercuriale mâle. Pour remplir cet objet, je choisis dix pieds de Mercuriale femelle jeunes, qui n'avoient point encore fleuri, & les replantai avec soin dans plusieurs pots que je mis sur une des couches de ma melonnière, au-dessous de la Mercuriale de Marchant, dont je la saupoudrois trois ou quatre fois chaque jour, ayant eu soin de détruire dès-lors toutes les autres Mercuriales, soit mâles, soit femelles, à mesure qu'il en paroissoit dans mon jardin. Cette expérience ainsi continuée jusqu'au 25 Juillet où les premières graines de mes dix Mercuriales femelles parvinrent en maturité ; je semai ces graines, mais aucune ne leva ; je les resemai de quinze en quinze jours avec aussi peu de succès jusqu'au 1er Novembre où cette Mercuriale mâle périt par les premières gelées, ayant douze pouces de hauteur.

Au printemps de l'année suivante 1767, je resemai des mêmes graines, tant sur couches que dans des pots, & en pleine

terre ; il en leva à peine cent ſur mille, c'eſt-à-dire, environ un dixième, & toutes les Mercuriales qui en provinrent, furent des Mercuriales communes. Les graines que je donnai à M. de Juſſieu pour répéter la même expérience au Jardin du Roi, ne donnèrent de même que des Mercuriales communes, ainſi que les graines que je recueillis depuis des plantes de la deuxième, troiſième, quatrième & cinquième génération.

II.e & III.e EXPÉRIENCE. Comme cette Mercuriale de M. Marchant avoit des feuilles découpées comme le *Reſeda*, j'imaginai, pour me conformer aux idées de M. Linnæus, qu'originairement elle auroit pu être produite par la fécondation d'un pied de Mercuriale femelle par les étamines du *Reſeda*, & peut-être par celles d'un *chanvre* mâle; pour m'en aſſurer, je tranſplantai dans deux autres pots, des pieds de mercuriale femelle, dont je plaçai l'un ſous un *reſeda*, & l'autre ſous des pieds de chanvre mâle, tenant mes trois expériences éloignées de plus de 20 toiſes les unes des autres, ſous des cloches, pour éviter les mélanges; les graines provenues de ces mercuriales, ne m'ont encore donné que des mercuriales communes.

Ces trois expériences ainſi variées & continuées pendant quatre ans ſur pluſieurs générations, ſont ſuffiſantes pour prouver que le petit nombre de graines fertiles qu'ont produit ces mercuriales femelles, avoient été fécondées par les pouſſières des mercuriales mâles des jardins voiſins, tranſportées par le vent; elles infirment donc le ſentiment de M. Linnæus ſur le prétendu changement opéré dans les eſpèces par la fécondation étrangère, ou elles prouvent au moins qu'elle n'a pas lieu quand les plantes ſont de familles différentes. Il ſera facile de s'aſſurer par quelle voie mes pieds de mercuriale femelle, ſévrés de l'approche de tout mâle analogue à leur eſpèce, ont produit un dixième de graines fertiles, en élevant de leurs jeunes pieds dans une chambre éloignée des jardins, au milieu d'une grande ville, & ſous des cloches bien cloſes : ſi parmi les graines qui en proviendront il ne s'en trouve aucune de féconde, en ſuppoſant que ces Plantes n'aient point ſouffert de la jauniſſe, mais qu'elles aient crû avec aſſez de vigueur; alors la mercuriale ſera dans le cas de certains palmiers femelles

qui, comme le ſeul pied qui ſoit depuis plus de quarante ans ſur l'île Saint-Louis du Sénégal, n'a jamais porté un ſeul de ſes fruits à parfaite maturité, étant ſévré de la pouſſière des mâles de ſon eſpèce, dont les plus proches ſe trouvent à dix ou onze lieues de diſtance, quoiqu'on trouve d'ailleurs des Palmiers-dattiers de diverſes eſpèces, dont les jardins & les campagnes voiſines ſont parſemés; je parle ici de cet arbre que les Nègres Oualofes appellent *roun*, les François *rondier*, les Indiens des îles Moluques *lontar*, ceux du Malabar *ampana* & *carimpana*, & qu'il a plu à M. Linnæus de nommer *boraſſus*, nom ancien par lequel les Grecs, ſelon Théophraſte, déſignèrent le régime des fleurs du Palmier; & il ne ſeroit pas étonnant qu'il fût un jour fécondé, au moins par intervalles, parce que les mâles de ſon eſpèce étant très-communs le long des rives du Niger, les pouſſières de leurs étamines pourroient y être apportées dans des temps favorables, ſoit ſur les bois flottans & déracinés par le courant de ce fleuve, ſoit par les barques qui en deſcendent journellement & qui font cette route en moins d'une journée. Si les Mercuriales en queſtion, quoique ſévrées de la pouſſière des mâles fécondans par toutes les précautions ſuſdites, venoient cependant à produire quelques graines fécondes ou même un dixième ſur le total, comme il m'eſt arrivé dans l'expérience précédente; alors cette Plante ſera dans le rang de tant d'autres qui font exception à la règle générale de la fécondation, & qui n'ont pas beſoin du ſecours des étamines, telles que ſont les Plantes des familles des byſſus, des champignons, des fucus qui ſont ſi nombreuſes en eſpèces, & dont la plupart n'ont que des graines, ſans aucune apparence d'étamines. Je ſuppoſe toujours ici qu'il ne ſe ſoit point montré ſur les pieds femelles de la mercuriale quelques fleurs mâles, comme M. de Juſſieu dit en avoir obſervé quelquefois, choſe que je puis aſſurer qui n'eſt point arrivée dans aucune de mes expériences, choſe qui eſt ſi facile à voir, qu'on ne pourroit manquer de s'en apercevoir, même en prêtant beaucoup moins d'attention que je n'en ai miſe dans celles en queſtion, choſe enfin qui eſt ſi rare, qu'elle n'a encore été aperçue que par M. de Juſſieu, qu'elle n'eſt citée dans aucun Auteur, que je ſache, & qu'elle a échappée juſqu'ici à

toutes les recherches que je fais pour me procurer toutes sortes de monstruosités de ce genre, dont j'ai actuellement la suite la plus nombreuse qui fait partie de mon herbier. Au surplus, la configuration défectueuse des feuilles de la mercuriale déchiquetée, le vice dans l'organisation de leurs vaisseaux & de leurs nervures, celui de ses étamines vides de poussière séminale, & par-là stériles, sa longue durée, tout cela annonce une monstruosité par défaut, & on ne peut guère douter que les deux mercuriales qui se sont montrées d'abord à M. Marchant en 1715, au nombre de sept individus seulement, & qui ont ensuite été suivies d'un plus grand nombre en 1716, dans un espace de 7 à 8 pieds de terrein, & dans lesquels il ne put apercevoir aucunes graines, ne fussent des individus monstrueux & viciés, comme celui du Jardin royal, que j'ai élevé & sur lequel j'ai fait mes expériences; ces mercuriales sont donc, non pas de nouvelles espèces, mais des mulets viciés dans leurs tiges, dans leurs feuilles & dans leurs fleurs, mais sur-tout dans les parties de la génération, comme le mulet parmi les animaux, n'est en apparence vicié que dans ces seules parties.

IV.e & V.e Expérience.

La Pelore que M. Linnæus avoit annoncée comme se reproduisant de graines, & comme conservant avec constance la régularité de ses fleurs, ne s'est point montrée telle, ni dans les pieds qu'il a envoyés ici de la Linaire vivace, *linaria vulgaris*, ni dans la Linaire annuelle rouillée d'Espagne, devenue de même *pelora*, au Jardin royal, comme je l'ai dit ci-dessus; il se trouve dans toutes deux, tantôt quelques fleurs pelores ou régulières, mêlées avec les fleurs naturelles à la linaire, sur le même pied; tantôt tous les pieds sont à fleurs irrégulières, c'est-à-dire naturelles; tantôt ils sont à fleurs régulières ou pelores: dans tous ces cas les fleurs pelores sont toutes stériles, il n'y a que les fleurs naturelles qui donnent des graines d'où naissent souvent parmi, des pieds de Linaire naturelle, d'autres pieds de Linaire pelore. Or ces Plantes pelores pêchant par un vice de conformation dans leurs fleurs pelores, ne peuvent être regardées que comme des demi-mulets stériles en partie, & par conséquent comme des monstres par excès dans leur corolle & par défaut dans les organes de la

génération,

génération, parce que, quoique les pelores vivaces ſe rêproduiſent auſſi de bourgeons, la multiplication par graines eſt la voie la plus naturelle à ce genre de plante.

Voilà les faits les plus authentiques ſur leſquels M. Linnæus a cru pouvoir établir la tranſmutation des eſpèces dans les Plantes; car pour les autres exemples cités, tant par M. Gmelin que par M. Linnæus, ſur les plantes qu'il appelle *hybrides,* c'eſt-à-dire bâtardes, ils ne ſont pas allégués comme des changemens opérés ſous leurs yeux, en ſemant ces plantes avec les précautions que nous avons employées, & que nous jugeons néceſſaires, mais ſeulement comme des conjectures fondées ſur les faits des deux Mercuriales & de la Pelore, ſuppoſés bien appréciés; & l'expoſé ſur l'eſpèce mulâtre, née en 1748, des deux Verveines d'Amérique, n'eſt ni aſſez clair, ni aſſez détaillé, ni aſſez précis pour qu'on puiſſe ſagement en rien inférer.

Paſſons actuellement à l'examen de deux faits plus récens, encore inconnus à M. Linnæus, & ſur leſquels les partiſans de ſon opinion pourroient ſe croire fondés à admettre la tranſmutation des eſpèces. Faits plus récens.

Le premier de ces faits regarde le fraiſier commun, qui ſemé de graines, a donné, en 1763, un fraiſier dont les feuilles ſont la plupart ſimples, ou, pour parler plus exactement, à un ſeul lobe au lieu de trois lobes qu'ont les fraiſiers ordinaires; ce fraiſier à une feuille, multiplié de ſes graines, donne des pieds à une feuille, des pieds à trois feuilles, & d'autres pieds qui ont de ces deux ſortes de feuilles mêlées enſembles; ſes fouets ou bourgeons donnent auſſi des pieds qui conſervent pour l'ordinaire les particularités de ceux dont ils ſont ſortis. Cette conformation frappante de feuilles, a porté à conclure de faits variables comme on conclud de faits conſtans, on a cru que ce nouveau fraiſier devoit réſoudre la queſtion tant agitée ſur les eſpèces, & que ce changement ſe perpétuant dans la poſtérité, devoit prendre le nom de *race:* après cette concluſion, on a cru être en droit de changer les notions reçues parmi les Botaniſtes, en appelant du nom de races tout ce qui a été reconnu juſqu'ici pour être eſpèce dans les fraiſiers, & en ſuppoſant que l'un d'eux a donné naiſſance à tous Le fraiſier à une feuille.

les autres qui n'en feroient pas des efpèces, mais des races dégénérées; enfin de conclufions en conclufions, après avoir réduit tous les fraifiers à une feule efpèce, on a été conduit à métamorphofer quatre genres de la famille du fraifier en autant d'efpèces de fraifier. Mais non-feulement ce fraifier à un feul lobe aux feuilles, ne fait pas une race, c'eft-à-dire une efpèce, felon les Botaniftes, puifqu'il n'eft pas conftant & qu'il varie dans fa multiplication (au moins dans fa multiplication par graines), mais même il ne fait pas ce que nous appelons *variété:* en examinant plus attentivement la ftructure de fes feuilles, on eut aperçu un vice de conformation dans fes nervures, qui y occafionne une crifpation, on eut vu que cette feuille ayant plus de furface que chacun des trois lobes du fraifier ordinaire, & moins que ces trois lobes enfemble, étoit un compofé de ces trois lobes réunis; enfin une anaftomofation ou bifurcation extraordinaire qui arrive à une ou deux de fes nervures, l'eut fait reconnoître pour une pure monftruofité par défaut: je communiquerai un jour à l'Académie les figures de ces plantes. En portant la même attention fur la fleur, on eut eu de nouvelles preuves de la monftruofité de cette plante, en remarquant que fon calice & fa corolle ont plus de parties que dans le fraifier commun, & que fes étamines, au contraire, en ont moins à proportion, & qu'elles font monftrueufes ainfi que le fruit, qui eft toujours cannelé ou rabougri & mal conformé. Ce fraifier eft donc tout fimplement un monftre dans toutes fes parties; monftre par excès dans le calice & la corolle; monftre par défaut dans les feuilles, les étamines & le fruit: or une monftruofité n'a jamais fait changer de nom à une efpèce, elle n'en a jamais ébranlé l'immutabilité; tous les Botaniftes confommés & conféquens, ont toujours fu ranger ces monftruofités parmi les chofes accidentelles, qui, quand elles fe propageroient à un certain point par le moyen des bourgeons ou de la greffe, tendent toujours à rentrer dans l'ordre & dans la régularité de leur efpèce primitive lorfqu'on les multiplie par la voie des graines, qui, de toutes celles de la multiplication eft la plus naturelle & la plus conftante pour déterminer les efpèces. Je ne parle pas ici des autres inductions qu'on a voulu tirer de ce fait, inductions

tendantes à faire reconnoître la transmutation des espèces sous le nom de races: on sent assez quelle différence il y a entre une espèce & une monstruosité; une espèce est comparable à une autre espèce, mais un monstre ne peut être comparé qu'à un individu de l'espèce dont il est originaire. Cette réunion des trois lobes des feuilles de ce fraisier monstrueux, peut être absolument comparée aux monstres du cochon, qui ont les deux doigts ou fourchettes de la plupart de leurs pieds ou même de tous les pieds réunis en un seul, à peu près comme ils le sont dans le pied de l'âne ou du cheval, qui les ont recouverts d'un sabot ou d'un ongle qui leur est commun.

Le dernier fait que j'ai à citer, m'appartient, il regarde un changement que j'ai commencé à obtenir dans les expériences que je tente depuis l'année 1762 pour forcer la transmutation dans les espèces; ce changement regarde l'espèce d'orge qui quitte sa bale, que les Grecs nommoient pour cette raison, *gymnocrithon*, & qui est cultivé de temps immémorial, dans diverses provinces de la France, sous le nom de *sucrion* ou d'*orge nu*, *orge fromenté*; cet orge a, comme l'on sait, l'épi en queue d'hirondelle, c'est-à-dire formé de deux rangs de grains, & l'on n'en a point encore vu à quatre rangs, comme le scourgeon ou l'orge carré, quoiqu'on m'en ait envoyé sous ce nom, erreur que j'ai reconnue par ma propre expérience: en semant depuis sept ans tous les mois, ce grain, qui est le plus hâtif de tous ceux qui se cultivent dans ce pays, en le semant, dis-je, au milieu de trois cents cinquante autres espèces ou variétés de froment de tous les climats, j'aperçus dans les deux générations de la première année, un léger changement dans le haut de son épi, qui commençoit à devenir carré; je recueillis & semai avec précaution les grains de ce bout d'épi carré, & j'eus la satisfaction de recueillir ensuite plusieurs autres épis semblables; en continuant ainsi cette expérience, je suis parvenu à avoir des épis carrés en plus grand nombre, environ un sur cent épis simples, & qui sont devenus carrés de plus en plus, pendant cinq à six ans ou pendant dix à douze générations successives, & qui ensuite ont perdu presque tout-à-coup cette propriété pour rentrer dans leur espèce originaire. A voir

L'orge sucrion devenu carré.

cette Plante, elle ne paroît nullement viciée, mais en l'examinant de près on s'aperçoit que quelques-unes de ſes fleurs ont ou une bale à deux arêtes, ou deux bales, chacune avec leur arête, ou trois bales à arêtes, ou deux fleurs dans le même calice, ou deux ovaires dans une même corolle, ou enfin deux ovaires ou deux grains réunis enſemble, de manière qu'il y a deux germes pour chaque grain ou maſſe farineuſe (on peut voir ces détails dans le Mémoire que je lûs à l'Académie en 1765). Que de monſtruoſités! on n'en a peut-être jamais tant vu de raſſemblées ſur une même plante, & elles ſont toutes, comme l'on voit, par excès.

Le Froment de miracle.

La Plante qui en apparence méritoit le plus le nom d'eſpèce nouvelle, & qui cependant n'eſt point citée par les fauteurs de l'opinion de la tranſmutation des eſpèces, c'eſt ſans doute le froment appelé *Blé de Miracle* ou *Blé de Smirne*, que M. Vaillant paroît citer comme une eſpèce, & dont M. Linnæus ne fait pas la moindre mention dans ſon *Species plantarum ;* mais cette plante n'eſt encore qu'une monſtruoſité par excès, & quoique plus conſtante dans ſa multiplication que toutes celles qu'on a obſervées juſqu'ici, des expériences bien ſuivies m'ont appris qu'au milieu de ſes épis rameux, on en voit environ un ou deux ſur cinquante qui ſont ſimples ou bien régulièrement conformés, & que, quand on le ſeme trop tard ou au printemps, ou dans une terre trop maigre ou trop sèche, il n'a preſque pas d'épis rameux, & rentre ainſi dans l'eſpèce dont il eſt originaire : les mêmes expériences me l'ont fait reconnoître pour être le froment que l'on appelle *Groſſet,* & qu'on cultive dans nos provinces méridionales.

Tels ſont les faits les plus remarquables ſur leſquels on s'eſt appuyé, ou qui ſe ſont montrés juſqu'ici les plus favorables à l'opinion de la tranſmutation des eſpèces, & nous convenons que nous aurions reſté long-temps dans cette opinion, ſi nous n'avions eu lieu de vérifier par nous-mêmes, & d'apprécier ces faits avec toutes les précautions & la méfiance même néceſſaires.

Il n'eſt pas douteux qu'en variant les expériences de fécondations, on aura des variations, des monſtruoſités dans les individus, mais non pas des changemens réels d'eſpèces; & ces exemples

de variations opérées par des fécondations étrangères, se multiplieront à mesure qu'on sera plus attentif à les observer, ou qu'on voudra se les procurer en fécondant une plante femelle par une mâle d'espèce différente, par exemple, le chanvre par le houblon, l'ortie par le mûrier, le saule par le peuplier, le ricin par le titimale, pour savoir ce qui proviendroit de ces mélanges. Mais il est bon de prévenir que ces changemens ne réussissent guère qu'entre les individus de même espèce, ou entre deux espèces très-voisines, telles que le chou & le navet. L'observation & l'expérience peuvent seules nous instruire là-dessus; & nous ne cessons de répéter & de varier nos expériences sur ce sujet important, soit pour confirmer, soit pour infirmer les faits qui ont paru douteux. Il n'est personne qui ne sache qu'en coupant toutes les étamines d'une tulipe rouge avant l'émission de leur poussière, & qu'en poudrant le stigmate de cette même plante avec les étamines d'une autre tulipe blanche, les graines de cette tulipe rouge produisent des tulipes, dont les unes sont rouges, les autres blanches, d'autres blanches & rouges, de même que deux animaux de même espèce transmettent leurs couleurs différentes aux animaux qu'ils engendrent. Il y a encore bien des expériences à faire pour constater ce qui est variété ou espèce dans nombre de fleurs; nous nous sommes occupés jusqu'ici, & nous nous occupons encore plus particulièrement des plantes utiles, telles que les blés, les légumes & les plantes potagères; & quoique Morison ait annoncé que toutes les espèces & variétés de chous étant semées, dégénèrent les unes dans les autres, & passent successivement par divers états, nous nous sommes assurés que le chou-fleur que nous semons depuis plusieurs années, de graines que nous recueillons avec soin, en évitant les mélanges, ne devient pas chou-pomme, & que le chou-pomme ne devient pas chou-fleur; quoique l'un & l'autre soient sujets à dégénérer: ce sont certainement des espèces bien distinctes par la figure de leurs feuilles, par le temps & la manière de fleurir. Le chou-pomme est beaucoup plus sujet à changer & à donner des variétés plus ou moins frisées, plus ou moins aplaties ou alongées, plus ou moins vertes ou rouges. Le chou-vert fait pareillement une

troiſième eſpèce à feuilles longues & pointues du chou-fleur, mais découpées. Enfin le chou-friſé fait une quatrième eſpèce à feuilles longues, mais très-arrondies au bout: il ne donne jamais que du chou découpé, mais il varie beaucoup, & dans les découpures plus ou moins friſées de ſes feuilles, & dans les couleurs qui en font une plante d'ornement.

Il n'eſt pas auſſi facile d'opérer de pareils changemens dans les arbres, ou de s'aſſurer ſi tant de fruitiers, par exemple, qu'on ne multiplie de tout temps que par la greffe, ſont des eſpèces différentes, ou ſi ce ne ſont que des variétés, comme M. Linnæus le penſe à l'égard du pommier & du poirier. M. du Hamel eſt le ſeul, que je ſache, qui ait commencé des expériences *(Voy. Mémoires de l'Acad. année 1737)* pour s'aſſurer ſi les pepins de la pomme d'api, par exemple, étant ſemés, donnent conſtamment des apis, ou s'ils donnent indifféremment des pommiers de reinette, d'api, de fenouillet, &c. Mais la longueur du temps qu'il faut attendre pour voir le ſuccès de ces tentatives, & l'aſſiduité qu'elles exigent, ont empêché de pouvoir rien décider ſur ce ſujet, & depuis lui, perſonne n'a entrepris de ſuivre ces expériences qui ſeroient très-inſtructives: en attendant, je crois qu'on peut ſoupçonner avec aſſez de fondement que les pepins de l'api ne donneront que des apis ou des variétés d'api, plus ou moins doux, plus ou moins ſavoureux, & non pas des reinettes ou des fenouilets, ou des calviles, &c. & que ces ſortes de pommiers ou poiriers qu'on ne multiplie guère que par la greffe, ſont de vraies eſpèces, qui ne ſont point un ouvrage de l'art, mais qui ont ſubſiſté de tous les temps, comme cela paroît indiqué par les différences ſi notables & ſi multipliées qu'on remarque, non-ſeulement dans le fruit de ces arbres, mais encore dans leur bois, dans leur écorce, dans leurs boutons & bourgeons, dans leurs feuilles, dans leurs fleurs, dans le temps de leur feuillaiſon, fleuraiſon & maturité, enfin dans leur tempérament ou température, & dans toutes leurs parties.

Mais indépendamment des variations qu'on peut opérer artificiellement par la fécondation des deux individus différens, quoique de même eſpèce, la Nature nous indique d'autres moyens plus ſûrs

& plus prompts d'opérer ces mutations dans les plantes qui se reproduisent de graines, soit par la culture, soit par le terrein, le climat, la sécheresse, l'humidité, l'ombre, le soleil, le chaud, le froid, &c. Ces changemens sont plus ou moins prompts, plus ou moins durables, disparoissent à chaque génération, ou se perpétuent pendant plusieurs générations, selon le nombre, la force, la durée des causes qui se réunissent pour les former, & selon la nature, la disposition & les mœurs, pour ainsi dire, de chaque plante: car il est de remarque que telle famille de plantes ne varie que par les racines, telle autre par les feuilles; d'autres par la grandeur, le velouté, la couleur, pendant que d'autres changeront plus facilement par leurs fleurs & leurs fruits.

On pourroit en citer nombre d'exemples que nous supprimons pour abréger; on sait jusqu'où peuvent aller ces changemens par la culture seule & par le choix des grains dans les plantes potagères & les fromens: telles plantes transportées dans les jardins ou d'un climat à l'autre, sont si différentes des sylvestres, que le Botaniste le plus exercé a peine à les reconnoître; c'est ainsi que le tabac, le ricin, & beaucoup d'autres qui forment des arbrisseaux vivaces en Afrique, ne sont qu'herbacés & annuels en Europe. Je dois cependant prévenir ici que je suis parvenu avec un peu de soin à faire passer l'hiver de 1768 à 1769 à cinq plantes de tabac que j'avois semé sur couches de mes vieilles graines du Sénégal; que ces pieds, après avoir passé deux étés & un hiver sur terre, promettent cette année 1770 de reproduire encore de nouvelles tiges sur l'ancienne souche, & d'être vivaces comme elles le sont dans leur pays natal.

Il paroît donc suffisamment prouvé par les faits, que l'art, la culture, & encore plus le hasard, c'est-à-dire, certaines circonstances inconnues, font naître tous les jours, non-seulement des variétés, soit dans les plantes communes, soit dans les fleurs curieuses, telles que les tulipes, les anemones, les renoncules, &c, mais encore des monstruosités qui ne méritent pas de changer les espèces.

Il suit donc de l'exposé ci-dessus, 1.° que tous les exemples cités jusqu'ici comme des changemens d'espèces, ou comme des

formations de nouvelles races conſtantes, ne ſont que des variétés ou des monſtruoſités qui ne ſe perpétuent pas conſtamment telles par la voie des graines ; 2.° que l'examen de ces ſortes de changemens exige la plus grande attention & les connoiſſances les plus profondes pour être apprécié à ſa juſte valeur, & pour faire éviter les inconſéquences, ſources de tant d'opinions & d'erreurs ; car un fait mal apprécié, mal jugé, & le même fait mal vu, conduiſent également à des conſéquences fauſſes, puiſque la Linaire-pelore aperçue & nommée *monſtrueuſe* par M. Linnæus, l'a conduit à admettre la tranſmutation des eſpèces, comme le fraiſier monſtrueux à une feuille, apprécié comme une production régulière & conſtante, a conduit ſon Obſervateur à embraſſer la même opinion ſous un terme différent.

En conſéquence, ſi la recherche de la vérité nous a expoſés à admettre le changement des eſpèces, fondés, non pas ſur la ſeule opinion d'un Savant diſtingué, mais ſur des faits qu'il a cru vrais & conſtans dans les apparences ; ſi nous avons été trompés par le rapport d'autrui, l'eſprit de vérité qui nous a guidé, après avoir vu par nous-mêmes & apprécié ces faits, doit nous faire tirer des concluſions directement oppoſées, & nous porter à dire que *la tranſmutation des eſpèces n'a pas lieu dans les plantes, non plus que dans les animaux, & qu'on n'en a pas de preuve directe, même dans les minéraux, en ſuivant le principe reçu, que la conſtance eſt eſſentielle pour déterminer une eſpèce.*

À voir l'harmonie qui règne dans toutes les parties de l'Univers, tout Philoſophe raiſonnable eſt d'abord porté à croire que ces écarts ont auſſi leurs loix & leurs bornes : en effet, plus on obſerve, plus on ſe convainc que ces monſtruoſités & variations ont une certaine latitude, néceſſaire ſans doute pour l'équilibre des choſes, après quoi elles rentrent dans l'ordre harmonique préétabli par la ſageſſe du Créateur.



MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR LA COMÈTE DE 1769.

Par M. DE LA LANDE.

LA Comète obſervée en 1769, eſt la cinquante-ſixième de notre Catalogue; elle fut aperçue pour la première fois par M. Meſſier, à l'Obſervatoire de la Marine, le 8 Août; peu de jours après elle fut aſſez lumineuſe pour être aperçue dans toute l'Europe. M. Matheucci à Bologne, l'aperçut par haſard le 26 Août; M. le Gentil l'a obſervée à Pondicheri au commencement de Septembre, je l'obſervai moi-même à Bourg-en-Breſſe, & j'y reçus des obſervations qu'avoit faites M. Meſſier, à Paris; depuis ce temps j'ai reçu celles que firent M. Darquier, à Toulouſe; M.rs de Saint-Jacques & Poitevin, à Marſeille; le P. Audiffredi, Bibliothécaire de la Minerve, à Rome; le P. de la Grange, à Milan; M. Zanotti, à Bologne, le P. Mayer, à Péterſbourg; M. Liuntberg, à Gottingen; M. Toſigno, Commandant des Gardes-marine, à Cadiz.

Novembre & Décembre 1769.

Le 3 Septembre à $14^h\ 14'\ 54''$ de temps vrai à Rome, ſuivant le P. Audiffredi, la Comète précédoit γ d'Orion en aſcenſion droite de $0^d\ 59'\ 50''$, & la Comète étoit plus boréale que l'étoile de $0^d\ 15'\ 10''$.

Le 4 Septembre à $16^h\ 9'\ 34''$, la Comète ſuivoit *A* d'Orion de $1^d\ 59'\ 31''$, elle étoit au midi de l'étoile de $0^d\ 26'\ 23''$.

Le 8 Septembre à $16^h\ 7'\ 19''$, la Comète ſuivoit l'étoile *b* d'Orion de $17^d\ 51'\ 25''$, la Comète étoit plus méridionale que l'étoile de $0^d\ 27'\ 19''$.

M. Liuntberg ayant obſervé la conjonction de cette Comète avec γ d'Orion, à l'Obſervatoire royal de Gottingen, m'a envoyé le réſultat de ſes calculs: le 3 Septembre à $19^h\ 47'\ 1''$, temps vrai, ſa longitude étoit $2^f\ 17^d\ 44'\ 11''$, & ſa latitude auſtrale $16^d\ 56'\ 44''$, cette obſervation a été faite avec le plus grand ſoin.

Voici encore quelques obſervations choiſies de M. Meſſier, que j'ai employées pour calculer les élémens de cette Comète; je ne les rapporte pas toutes, parce que M. Meſſier les a réſervées pour les Mémoires de l'Académie de Berlin, dans laquelle le Roi de Pruſſe lui a donné une place à l'occaſion de ces mêmes obſervations.

DATE des Obſervat.	TEMPS MOYEN.	ASCENSION droite.	DÉCLINAIS.	LONGITUDE.	LATITUDE.	LIEU du SOLEIL.	LOGARIT. de la diſt. u SOLEIL.
	H. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.	
8 Août	11. 5. 7	33. 44. 00	11. 59. 00 B.	1. 5. 32. 00	1. 29. 00 A.	4. 16. 30. 14	0,005699
14......	12. 34. 12	38. 35. 2	11. 49. 32 B.	1. 9. 58. 47	3. 9. 36 A.	4. 22. 20. 40	0,005199
21......	13. 4. 55	46. 15. 25	11. 16. 48 B.	1. 17. 1. 30	5. 53. 49	4. 29. 6. 25	0,004575
28......	15. 59. 48	59. 9. 26	9. 35. 25 B.	1. 29. 2. 50	10. 37. 19	5. 5. 59. 30	0,003882
3 Sept.	13. 35. 47	77. 15. 20	6. 13. 18 B.	2. 16. 46. 0	16. 39. 48	5. 11. 42. 52	0,003242
9......	16. 14. 58	106. 12. 4	0. 22. 27 A.	3. 11. 32. 0	22. 6. 55	5. 16. 40. 59	0,002646
15......	16. 41. 40	135. 56. 26	6. 58. 38 A.	4. 20. 39. 17	22. 43. 34	5. 23. 31. 27	0,001809
24 Oct.	6. 4. 42	232. 28. 14	1. 7. 54 A.	7. 20. 21. 35	17. 19. 0 B.	7. 1. 37. 13	9,997086
27......	6. 0. 0	237. 43. 22	0. 57. 13 A.	7. 25. 40. 37	18. 44. 52 B.	7. 4. 37. 24	9,996743
4 Nov.	5. 39. 1	249. 32. 27	0. 14. 6 A.	8. 7. 58. 40	21. 13. 57 B.	7. 12. 37. 55	9,995849
20......	5. 43. 44	266. 49. 41	0. 13. 35 A.	8. 26. 32. 55	23. 12. 24 B.	7. 28. 45. 47	9,994362
27......	6. 22. 42	272. 34. 59	0. 1. 45 A.	9. 2. 48. 55	23. 24. 53 B.	8. 5. 52. 58	9,993830
28......	5. 37. 54	273. 19. 29	0. 1. 10 B.	9. 3. 37. 27	23. 26. 48 B.	8. 6. 51. 57	9,993754
1 Déc.	5. 38. 22	275. 30. 4	0. 7. 22 B.	9. 5. 59. 58	23. 28. 38 B.	8. 9. 54. 42	9,993555

J'ajouterai que ſuivant l'obſervation de M. Maraldi, faite le 1.er Décembre, qui fut pour nous le dernier jour de ſon apparition, la Comète à $5^h\ 59'\ 53''$ de temps vrai, avoit $275^d\ 30'\ 13''$ d'aſcenſion droite, & $9'\ 59''$ de déclinaiſon boréale.

Dans la première obſervation je n'ai point mis de ſecondes, à cauſe de l'incertitude dont cette obſervation eſt ſuſceptible: les obſervations du 14 Août, du 3 & du 15 Septembre, ſont du nombre de celles que M. Meſſier a marquées comme étant les plus exactes.

J'avois choiſi d'abord les obſervations du 14 Août & du 8 Septembre, pour trouver différentes paraboles qui ſatisfiſſent à ces deux obſervations; & celle du 28 Août m'a ſervi pour

trouver entre ces différentes hypothèses, celle qui étoit la véritable.

Soient *A*, *B*, *C*, les lieux de la Terre, les 14 & 28 Août, & le 8 Septembre; je supposois alors les élongations observées $3^{s}\ 12^{d}\ 22'\ 24''$; $3^{s}\ 6^{d}\ 56'\ 40''$; $2^{s}\ 5^{d}\ 8'\ 36''$; les logarithmes des distances du Soleil à la Terre 0,005199; 0,003882; 0,002645. Figure 1.

Les lignes *AG*, *BH*, *CK*, tirées suivant les élongations observées, il s'agit de trouver les longueurs de ces lignes, c'est-à-dire, les points *G*, *H* & *K*; il faut pour cela avoir recours aux règles de fausses positions, dont j'ai donné le détail & les préceptes en 1759 à la suite de la Cométographie de Halley, & en 1764 dans mon Astronomie. Je suppose que la distance *SG* de la Comète au Soleil, réduite au plan de l'écliptique, soit de 1,3; celle du Soleil à la Terre étant prise pour unité: dans cette première hypothèse, je suis obligé de supposer pour l'autre distance *SK*, diverses valeurs, jusqu'à ce que j'en aie trouvé une qui soit telle, que les deux distances *SG*, *SK*, appartiennent à une parabole dans laquelle l'intervalle *GK*, réduit en jours, soit de 25^{j} 153.

Je trouve qu'en supposant la distance *SK*, de 0,913, l'intervalle est à peu près tel, le mouvement héliocentrique de la Comète étant de $21^{d}\ 36'$, le lieu du périhélie de $2^{s}\ 15^{d}$, le lieu du nœud descendant de $11^{s}\ 16^{d}$, l'inclinaison 24^{d}, & le passage par le périhélie le 10 Octobre; mais ayant calculé dans cette hypothèse l'observation intermédiaire du 28 Août, je trouvai une longitude trop grande de $10^{d}\ \frac{3}{4}$.

En supposant la première distance de 1,2, je trouve qu'il faudroit supposer la seconde 0,913 pour avoir l'intervalle de 25^{j} 15, tel qu'il est par observation; mais dans cette hypothèse on trouve pour le 28 Août une longitude trop grande de $15^{d}\ \frac{1}{6}$.

Cette Comète est du nombre de celles où il ne suffit pas d'avoir égard aux distances, si l'on ne fait pas attention à la nature de l'angle à la Comète ou de la parallaxe annuelle, cet angle est aigu dans la première Observation, & obtus dans la seconde, en sorte que pour former mes différentes hypothèses,

Au mois de Septembre, cette Comète paroiſſoit à la vue, auſſi je préférois de prendre la diſtance AG avec le mouvement héliocentrique GK, réduit à l'écliptique. Je trouvai pour troiſième hypothèſe que la diſtance 1,45, avec un mouvement de $8^d\ 7'$, ſatisfaiſoit à l'intervalle des deux Obſervations, mais que la longitude pour le 28 Août étoit trop grande de $1^d\ 8'$.

Pour quatrième hypothèſe, je trouvai que la diſtance 1,48 avec un mouvement de $3^d\ 24'$, donnoit pour le 28 Août deux degrés de moins que l'Obſervation.

Cinquième hypothèſe, la diſtance SG étant ſuppoſée de 1,461, & le mouvement du Soleil dans l'intervalle des deux Obſervations $6^d\ 34'\ 59''$, je trouve en mettant plus de préciſion dans le calcul, que l'intervalle de temps eſt $25^j\ 157$ au lieu de $25^j\ 153$ qu'il y avoit ſuivant l'Obſervation; la différence eſt trop peu ſenſible pour s'y arrêter. Dans cette hypothèſe, le paſſage de la Comète par ſon périhélie, arrive le 7 Octobre à $8^h\ 50'$, temps moyen au méridien de Paris; le lieu du périhélie eſt à $4^f\ 25^d\ 24'\ 34''$, le lieu du nœud aſcendant à $5^f\ 25^d\ 9'\ 51''$, l'inclinaiſon de $41^d\ 0'\ 21''$, & la diſtance périhélie 0,11586; ces premiers élémens ne renferment qu'un eſpace de vingt-cinq jours d'Obſervation, ainſi l'on ne peut en attendre une extrême préciſion: cependant l'obſervation du 28 Août, calculée dans cette hypothèſe, donne $1^f\ 29^d\ 3'\ 14''$ de longitude, c'eſt-à-dire ſeulement 24 ſecondes de plus que par l'Obſervation; cette erreur eſt aſſez petite pour que ces élémens puiſſent repréſenter à peu près toutes les Obſervations des deux premiers mois, & l'Obſervation du 15 Septembre, quoiqu'éloignée de 33 degrés de celle du 9 Septembre, n'a différé de mon calcul que de quelques minutes.

Premiers élémens de l'orbite.

Les élémens de cette orbite font voir que la Comète de 1769, ne reſſemble à aucune des cinquante-cinq Comètes qui ont été calculées juſqu'ici; celle-ci eſt la cinquante-ſixième, en ne comptant que pour une, toutes les apparitions de chacune des trois Comètes, dont les périodes ſont connues, c'eſt-à-dire; premièrement, les Comètes de 1531, 1607, 1682 & 1759; ſecondement, celles de 1532 & de 1661; troiſièmement, celles de 1264 & de 1566. Lorſque la Comète de 1769 fut

observée pour la première fois le 8 Août, elle étoit éloignée de la Terre de 1,03, c'est-à-dire, plus que le Soleil d'un trente-troisième ou d'un million de lieues, & éloignée du Soleil de 1,578.

Le 9 Septembre elle étoit le plus près de la Terre, sa distance étoit seulement de 0,32 ou presque le tiers de celle du Soleil; mais elle auroit été trois fois plus près de nous, ou neuf fois plus près que le Soleil, si elle eût passé en *K* vingt-deux jours plus tard, c'est-à-dire, le 29 Septembre, au lieu d'y passer le 7; elle ne sauroit s'approcher davantage de la Terre dans aucun cas, mais si elle eût eté aussi près elle n'auroit été visible que pour les pays méridionaux de la Terre, parce que la partie *PKHG* de son orbite, étant toute au midi de l'écliptique, la Comète auroit paru répondre au pôle austral de l'écliptique dans le moment où elle auroit passé en *K*, perpendiculairement au-dessous de la Terre.

De-là il suit que cette Comète n'est point de celles qui, par leur proximité à la Terre, pourroient y produire des révolutions ou des phénomènes sensibles, si toutefois il y en a qui soient dans ce cas-là. Pour qu'une Comète pût rencontrer la Terre, ou nuire à ses habitans, il faudroit qu'un des points *N* & *O*, dans lesquels sa circonférence coupe le plan de l'écliptique, se rencontrât précisément sur la circonférence de l'orbite terrestre, & que la Comète & la Terre passassent ensemble au même point d'intersection; cet assemblage de circonstances est trop singulier pour que l'on doive s'en alarmer.

J'avois cru que, lorsque la Comète repasseroit à pareille distance de l'autre côté du périhélie au point *D*, le 6 Novembre, la Terre étant en *T* seroit trop éloignée de la Comète pour qu'on pût espérer de la voir: cette Comète sembloit être de nature à n'être sensible pour nous, que quand elle est à peu près à une distance égale à celle du Soleil, à en juger par la manière dont elle paroissoit le 8 Août, lorsqu'elle fut vue pour la première fois; cependant elle a reparu d'une manière très-sensible, comme nous allons le rapporter.

grande qu'une étoile de la 1.re grandeur; dans un téleſcope, ſon diamètre en comprenant l'atmoſphère, n'a été pour l'ordinaire que d'environ 1′ ½: cependant le 1.er Septembre, elle a paru un peu plus grande au P. de la Grange à Milan. Sa queue avoit près de 40 degrés de longueur le 14 Septembre, lorſque M. Poitevin l'obſerva à Marſeille, la Comète étoit alors à 27 degrés & demi de *Sirius*, & à 17 degrés de Procyon, & la queue s'étendoit juſqu'à la ceinture d'Orion; M. Zanotti trouva même le 5 & le 12 Septembre, à Bologne, que cette queue s'étendoit juſqu'à 70 degrés de diſtance. Celles de 1618 & de 1680, ſont les ſeules qui l'aient égalé; le corps de cette Comète vu dans un téleſcope, paroiſſoit très-petit: c'étoit un point blanc & brillant, noyé dans un vaſte brouillard.

M. Pingré étant ſur mer entre Ténériffe & Cadiz, obſerva le 11 Septembre 1769, que cette queue avoit 90 degrés de longueur, mais elle étoit ſi foible que le lever de Vénus fut ſuffiſant pour en faire diſparoître pluſieurs degrés.

La Comète ayant reparu après ſon périhélie, M. Meſſier l'obſerva le 24 Octobre; & le P. de la Grange à Milan le 25 à 7 heures du ſoir, à droite des Étoiles ε & δ d'*Ophiucus*, la queue étoit foible & à peine ſenſible, mais le noyau avoit une lumière plus vive qu'avant la conjonction; je reconnus que les élémens que j'avois déterminés par les obſervations faites au mois d'Août & juſqu'au 8 Septembre, ne repréſentoient qu'à un degré près les Obſervations faites dans la ſeconde branche de l'orbite, ſoit que cela vint de l'imperfection des Obſervations, relativement à la grande étendue du mouvement de $6^{ſ}\ 28^{d}$ qu'il avoit fallu en conclure, ſoit que l'erreur fut celle de l'hypothèſe parabolique, relativement au mouvement réel de la Comète: il a donc fallu calculer de nouveaux élémens en conſéquence des nouvelles Obſervations; j'ai choiſi les Obſervations du 14 Août, du 15 Septembre & du 4 Novembre: voici les lieux & les diſtances du Soleil que j'ai ſuppoſés.

14 Août......	$4^{f}\ 22^{d}\ 20'\ 40''$	0,005199.
15 *Septembre*...	5. 23. 31. 27.	0,001809.
4 Novembre...	7. 12. 37. 55.	9,995849.

Les élémens que j'en ai tirés, diffèrent des précédens, je les ai rapportés néanmoins, parce qu'ils pourront servir à connoître l'effet de l'ellipticité de cette orbite, car je ne doute pas que leur différence ne vienne principalement de l'erreur de l'hypothèse parabolique.

Lieu du Nœud......	$5^{f}\ 25^{d}\ 0'\ 43''$.
Inclinaison..........	40. 37. 33.
Lieu du périhélie.....	4. 24. 5. 54.
Distance du périhélie................	0,12376.

Passage au périhélie le 7 Octobre $12^{h}\ 30'$, temps moyen au méridien de Paris.

Dans l'observation du 3 Septembre, le calcul donne 7 secondes de plus que l'observation; pour celle du 27 Octobre, le calcul donne 25 secondes de moins, pour celle du 24 Octobre le calcul donne 14 secondes de plus: il est vrai que dans l'observation du 8 Septembre le calcul donne 1′ 52″ de plus, mais l'observation étoit marquée douteuse; d'ailleurs la difficulté de bien déterminer le centre du noyau de cette Comète, l'incertitude sur la position des petites étoiles auxquelles on étoit obligé de la comparer, fait qu'on ne peut pas espérer d'avoir des élémens qui représentent toutes ces observations à la minute; il y en a aussi quelques-unes qui paroissent suspectes, à en juger par celles qui précèdent & qui suivent, par exemple, celle du 28 Novembre.

Le P. Asclepi, Astronome du Collége Romain, a publié un Mémoire sur le calcul des Comètes, dans lequel il y a quatre déterminations différentes de cette orbite; mais voyant que les paraboles qui s'approchoient le plus des observations de Novembre, s'éloignoient de celles de Septembre, il m'en a envoyé une cinquième où il a eu pour objet de tenir le milieu entre les observations qui ont précédé le périhélie & celles qui l'ont suivi; pour que les erreurs fussent moindres que dans les autres paraboles, il y a réussi, mais les erreurs vont souvent à trois ou quatre

minutes, ſoit en longitude, ſoit en latitude dans cette cinquième détermination.

M. Wargentin qui avoit obſervé cette Comète à Stockolm juſqu'au 3 Décembre, m'a envoyé les élémens qui ſuivent.

Nœud	5ʳ 25ᵈ 6′ 32″.
Inclinaiſon	40. 48. 49.
Périhélie	4. 24. 11. 7.
Diſtance périhélie	0,1227225.
Paſſage au périhélie le 7 Octobre 1ʰ 58′ 40″.	

J'avois engagé M. Wallot à calculer encore cette orbite, en y employant l'obſervation du 1ᵉʳ Décembre, comparée avec celles du 14 Août & du 15 Septembre; mais ces deux Obſervations n'étoient pas tout-à-fait réduites de la même manière que dans la Table qui eſt au commencement de ce Mémoire, il a trouvé les élémens ſuivans.

Nœud	5ʳ 25ᵈ 2′ 25″
Inclinaiſon	40. 42. 38.
Périhélie	4. 24. 14. 22.
Diſtance périhélie	0,12298.
Paſſage au périhélie le 7 Octobre 12ʰ 26′ 17″.	

On voit par-là que plus les Obſervations qu'on emploie, s'éloignent du périhélie, plus les élémens qu'on en tire, ſont différens des premiers; ce qui me perſuade qu'en mettant un grand ſoin dans le calcul des Obſervations que nous avons, on pourroit prédire le retour de cette Comète par cette ſeule apparition: M. Euler l'a eſſayé, mais j'ignore encore le réſultat de ſes recherches; on y parviendroit aiſément en déterminant le lieu & la diſtance du périhélie par les Obſervations qui en ſont peu éloignées, & cherchant enſuite entre différentes ellipſes décrites ſur cette même diſtance, celle qui peut ſatisfaire à l'Obſervation la plus éloignée, j'ai reconnu par des calculs faits ſur la Comète de 1759, qu'on auroit pu facilement calculer ſon retour à quatre à cinq ans près, par les ſeules Obſervations de 1759.

On

On a continué d'obſerver cette Comète, comme je l'ai dit, juſqu'au 1.er Décembre; M. Maraldi & M. Meſſier l'ont encore vue ce jour-là, après quoi le mauvais temps & enſuite ſon grand éloignement l'ont fait perdre de vue: elle étoit éloignée de nous le 1.er Décembre, de 2,18, ou deux fois & un ſixième la diſtance du Soleil à la Terre; mes ſeconds élémens donnent pour ce jour-là une longitude plus petite de 11′ 7″ que l'Obſervation: cette différence me paroît venir de l'erreur de l'hypothèſe parabolique; mais j'ai cru qu'il étoit inutile de chercher dans cette hypothèſe des élémens qui fuſſent d'accord avec des Obſervations auſſi éloignées du périhélie; c'eſt en ſuppoſant différentes ellipſes, qu'il faudra tenter de trouver ſes véritables élémens, & peut-être même ſa révolution.

Suivant le calcul de M. Zanotti, ſuppoſant que la queue de la Comète étoit directement oppoſée au Soleil, & qu'elle paroiſſoit de 74 degrés le 12 de Septembre, la diſtance de la Comète à la Terre étant de 0,2639, on trouve que la longueur de la queue devoit être 0,3803, c'eſt-à-dire, plus de douze millions de lieues. Son Mémoire fut lû à l'Académie de Bologne le 23 Novembre, mais ſes élémens diffèrent beaucoup de ceux que je viens d'établir; cependant il étoit très-facile de les trouver exactement d'après ceux que j'avois publiés dans la Gazette de France du 2 Octobre, & qui diffèrent peu de ceux que j'ai trouvés enſuite par les calculs d'une plus longue ſuite d'Obſervations.

On a lû dans quelques papiers publics, ſoit en France, ſoit en Angleterre, que M. Dunn, Aſtronome de Londres, avoit annoncé que cette Comète approchoit beaucoup de Vénus; j'ai voulu ſavoir juſqu'à quel point les circonférences de ces deux orbites pouvoient être rapprochées. Soit ♈ *V* (*Fig. 2*) l'écliptique; *COX* l'orbite de Vénus inclinée en *C* de $40^d\ 38'$, le nœud deſcendant étant à $11^f\ 25^d\ 0'\ 43''$; *V*, le nœud aſcendant de Vénus à $2^f\ 14^d\ 35'\ 45''$, c'eſt-à-dire, $79^d\ 35'$ plus avancé, & l'angle *V* de $3^d\ 23'\ 20''$: ayant abaiſſé la perpendiculaire *VX*, pour réſoudre le triangle *CVO*, j'ai trouvé *CO* de $5^d\ 2'$, en ſorte que le nœud de l'orbite de la Comète ſur celle de Vénus, eſt à $0^f\ 0^d\ 3'$ de longitude; ainſi la Comète

dans ce nœud-là avoit 4^{s} 24^{d} 3′ d'anomalie, & dans le nœud opposé elle en avoit 1^{s} 5^{d} 57′; ainsi quand elle a traversé le plan de l'orbite de Vénus du nord au sud, au mois d'Août, elle étoit éloignée du Soleil de 1,299, tandis que Vénus ne sauroit l'être plus que de 0,728; & quand la Comète a repassé dans le plan de l'orbite de Vénus au mois d'Octobre, elle n'étoit éloignée que de 0,1368, tandis que Vénus l'est au moins de 0,7183 dans ses moindres distances au Soleil. Il s'en faut donc beaucoup que la Comète ait pu rencontrer le globe de Vénus, ni même s'en approcher sensiblement dans cette apparition, à quel endroit que Vénus se fut trouvée sur son orbite, & je ne vois aucun fondement à la menace qu'on sembloit faire à l'Univers d'une étonnante révolution dans le système planétaire.



Fig. 1

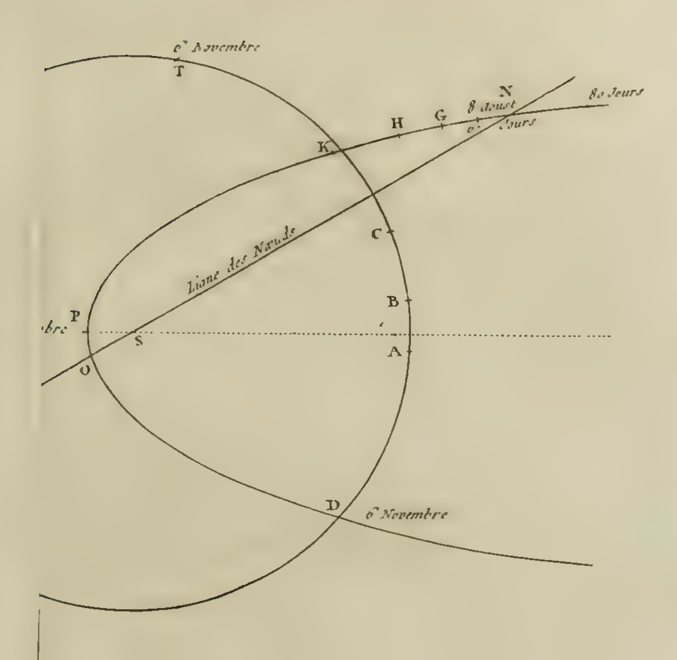

6^e Novembre
T
N
80 Jours
H
G
8 Aoust
6^e Jours
K
C
Ligne des Nœuds
B
P
S
A
O
D
6^e Novembre

Fig. 2

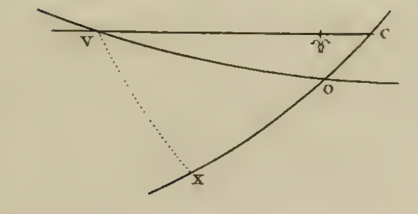

V
♈
C
O
X

Fig. 1

Novembre
T
N
H
G
K
C
Ligne des Nœuds
B
P
Octobre
S
A
O
D
Novembre

Fig. 2

V
C
O
X

OBSERVATIONS DE DEUX ÉCLIPSES DE LUNE DE CETTE ANNÉE 1768.

Des 30 Juin au matin & 23 Décembre au soir.

Par M. MARALDI.

J'AI fait ces Observations avec une Lunette de 7 pieds, garnie d'un micromètre composé de treize fils, également éloignés les uns des autres, de sorte qu'ils comprennent douze espaces égaux. 24 Décemb. 1768.

Le ciel s'étant couvert la nuit du 29 au 30 Juin vers les onze heures du soir, on ne put voir la Lune que vers les trois heures du matin du 30 Juin, & j'ai fait les Observations suivantes.

À 3^h 2′ 0″ temps vrai, j'ai jugé l'éclipse de huit doigts.
3. 6. 0 l'Éclipse est de neuf doigts.
3. 17. 0 elle est de onze doigts.
3. 23. 56 immersion totale.
3. 26. 0 on ne voyoit plus du tout la Lune à la vue simple; l'émersion n'a pas été visible à Paris, parce que la Lune étoit sous l'horizon & il faisoit jour.

Le 23 Décembre, les vapeurs de l'horizon ne nous ont permis de voir les bords de la Lune & de l'ombre de la Terre un peu terminés, que 25 minutes après le lever de la Lune.

À 4^h 27′ 44″ du soir, temps vrai, Copernic est sorti de l'ombre.
4. 32. 20 je juge l'éclipse de sept doigts: le micromètre n'est pas encore bien disposé.
4. 35. 40 l'Éclipse est de six doigts.
4. 39. 20 *Manilius* hors de l'ombre.
4. 41. 26 *Menelaüs* hors de l'ombre.
4. 43. 0 l'Éclipse est de cinq doigts: le micromètre est mieux ajusté.

À 4^h 46′ 30″ *Plinius* hors de l'ombre.
4. 47. 55 *Mare ſerenitatis* toute hors de l'ombre.
4. 49. 30 . . . trois doigts.
4. 50. 25 *Promontorius acutum* hors de l'ombre.
4. 53. 55 . . . deux doigts.
4. 55. 55 *Proclus* hors de l'ombre.
4. 58. 16 . . . un doigt.
À 5^h 0. 50 *Mare criſium* hors de l'ombre.
5. 3. 9 on commence à voir le bord de la Lune terminé, quoique fort obſcur.
5. 4. 53 fin de l'Éclipſe.
5. 5. 20 fin plus certaine.



SUR UNE

ÉCLIPSE HORIZONTALE DE LA LUNE,

VUE À CHÂTILLON

Dans la Tour de M. le Duc de Croy, le 23 Décembre 1768, au ſoir.

Par M. LE MONNIER.

CETTE Éclipſe a été vue à ſon émerſion & au moment de ſa fin, avec une lunette achromatique de 3 pieds & demi, qui redreſſoit les objets : elle appartient à M. le Duc de Croy, qui l'avoit fait apporter à ſa Tour ; les temps ont été marqués avec ma montre de Graham que j'ai vérifiée à Paris avant l'Éclipſe, & à mon retour. 21 Janvier 1769.

Entre la face auſtrale de l'Obſervatoire royal & la Tour, la différence en latitude eſt 2303,31 toiſes ou 2′ 25″, ce qui donne la latitude de la Tour de 48ᵈ 47′ 50″, & la Tour fait au ſud-oueſt de l'Obſervatoire, un angle de 43ᵈ 55′ 10″. Suppoſant donc le degré de longitude ſous ce parallèle de 38000 toiſes, à proportion pour 2218,3 toiſes, qui eſt la différence en longitude, on auroit 3′ 30″$\frac{1}{6}$, qui valent en minutes d'heures, 14 ſecondes de différence en longitude occidentale; c'eſt pourquoi aux phaſes ſuivantes il faudroit ajouter conſtamment un quart de minute, ou 14 ſecondes pour réduire le temps vrai au méridien de Paris, ſi ce n'eſt que l'heure de la montre étoit corrigée, non ſur le lieu même, mais par une pendule règlée au méridien même de Paris. Quoique le ciel fut fort ſerein, principalement du côté de l'eſt, nous ne pumes obſerver l'heure du coucher du Soleil ni ſon amplitude, à cauſe de quelques nuages opaques qui bordoient l'horizon du côté de l'oueſt.

à 4^h $14'$ $20''$ le *Palus Maræotis* tout découvert, ce qui donne l'émerſion à 4^h $12'$ $20''$.

4. 21. 30 Ætna ſorti de l'ombre.
4. 28. 40 Sinaï ſorti de l'ombre.
4. 29. 40 tout le grand lac noir.
4. 38. 52½ l'île Caloline ou *inſula Beſbicus Propontidis.*
4. 40. 55 Bizance.
4. 45. 30 l'île d'Achille ou *inſula Macra.*
4. 50. 35 le Promontoire aigu d'Héraclée.
4. 59. 20 le *Palus Mæotis* entièrement ſorti.
5. 01. 20 fin de l'Éclipſe.

Cette Éclipſe eſt arrivée dix-huit ans & neuf jours & demi après l'Éclipſe totale du 13 Décembre au matin, que nous avons obſervée à Paris, & qui eſt rapportée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'année 1750.*



OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE DE LUNE Du 23 Décembre 1768, ET DE LA LUNE DANS LE MÉRIDIEN.

Par M. DE LA LANDE.

LA Lune s'est levée si peu de temps avant l'émersion, qu'il n'a pas été possible de l'observer avec quelque précision; je n'ai commencé qu'à $4^h\ 26'$ à observer des phases, c'est-à-dire à mesurer la grandeur de la partie éclairée, avec un micromètre appliqué à une lunette de 9 pieds. 18 Janvier 1769.

Temps vrai.	*Partie éclairée.*	*Temps vrai.*	*Partie éclairée.*
à $4^h\ 26'\ 40''$	995.	à $4^h\ 41'\ 10''$	2770.
4. 30. 40.	1460.	4. 45. 40.	3169.
4. 33. 40.	1864.	4. 47. 25.	3289.
4. 35. 40.	2219.	4. 52. 10.	3747.
4. 38. 40.	2487.	5. 0. 38, sortie de *Mare Crisium.*	

à $5^h\ 3'\ 23''$ fin de l'Éclipse, le bord supérieur se distinguant nettement dans ma lunette de 9 pieds.

5. 4. 40. La pénombre n'est plus sensible dans la lunette de 9 pieds.

5. 8. 10, fin de la pénombre dans une petite lunette achromatique de 6 pouces, les deux bords paroissant aussi lumineux l'un que l'autre.

5. 17. 00. Diamètre de la Lune en déclinaison 4958.

La même nuit, M. l'abbé Marie, Professeur de Mathématiques au Collége Mazarin, qui a succédé à M. l'abbé de la Caille & occupe le même Observatoire, observa la Lune au méridien; à $12^h\ 26'\ 43''$ de la pendule le second bord de la Lune passa à la lunette méridienne, le bord supérieur étant à $26^d\ 47'\ 24''$

du zénith; *Procyon* paſſa au méridien à 13^h 18′ 1″, & le Soleil le lendemain à 0^h 3′ 31″; de-là je conclus que le 23 à 12^h 30′ 12″ de temps moyen, l'aſcenſion droite du centre de la Lune, étoit de 81^d 17′ 58″, & ſa déclinaiſon de 22^d 46′ 30″. Sa longitude 3^ſ 8^d 1′ 4″, & ſa latitude 27′ 10″. Par les Tables de M. Mayer, je trouve la longitude plus grande de 53 ſecondes, & la latitude plus petite de 23 ſecondes; l'erreur en longitude fait voir la cauſe de la différence de 2 minutes qui s'eſt trouvée entre la fin de l'Éclipſe obſervée, & celle que j'avois annoncée dans la *Connoiſſance des Temps* pour 5^h 5′ 32″.



OBSERVATION

OBSERVATION
DE
QUELQUES PHASES DE L'ÉCLIPSE DE LUNE
Du 23 Décembre 1768.

Par M. DE FOUCHY.

LA Lune devoit se lever totalement éclipsée au coucher du Soleil; des bâtimens placés au nord-est de l'endroit où j'observe, m'ont caché tout le commencement du recouvrement de lumière, & je n'ai vu la Lune que très-peu avant la fin de l'Éclipse; voici les deux seules phases que j'ai pu observer, réduites au temps vrai. 18 Janvier 1769.

4^h	59′	55″	*Marc Crisium* tout-à-fait hors de l'ombre.
5.	4.	48.	Je juge l'Éclipse finie.
	5.	0.	Fin certaine.

Ces phases ont été observées avec une lunette de 8 pieds.



NOUVELLES RECHERCHES POUR SERVIR À DÉTERMINER LA NATURE DE LA BILE.

Par M. CADET.

15 Novemb. 1769. LES expériences dont j'ai exposé les détails à l'Académie en 1767, m'avoient donné ſur la nature de la bile toutes les lumières que je croyois pouvoir en attendre; cependant une Thèſe de M. Rœderer ſur la même matière, ſoutenue à Straſbourg, & annoncée avec éloge dans le *Journal des Savans*, m'a engagé à y revenir, & m'a fait entreprendre des expériences nouvelles, qui donnent un nouveau degré de certitude à ce que j'ai établi dans mon premier Mémoire.

Ce qui m'a le plus frappé dans l'Ouvrage que je viens de citer, c'eſt d'y trouver ces deux aſſertions: que la bile contient un principe acide, & qu'elle coagule le lait. Si cela eſt, la bile n'eſt plus un vrai ſavon, comme je l'avois établi, ou du moins c'eſt un ſavon d'une nature toute différente, dont la partie ſaline eſt plutôt un acide qu'un alkali.

Il faut avouer cependant que M. Rœderer n'a pas oſé tirer des conſéquences auſſi formelles; il adopte mon ſentiment ſur les différens principes que j'ai reconnus dans la bile, & il ſuſpend ſon jugement avec une réſerve bien digne d'éloges.

Mais mes premières expériences m'ont forcé à prononcer avec plus de confiance que M. Rœderer. J'ai dit que la bile eſt un véritable ſavon compoſé d'une huile animale, de la baſe alkaline du ſel marin, du ſel marin lui-même, d'un ſel de la nature du ſucre de lait & d'une terre calcaire qui participe légèrement du fer: les cendres que j'ai retirées de la bile, paroiſſent exactement ſemblables à la ſoude qu'on emploie dans le commerce; elles m'ont donné par la leſſive une très-grande quantité

de criſtaux de ſel alkali de ſoude, ſemblable à celui qu'on emploie à former le ſavon.

J'ai donc cru, d'après de pareils réſultats, être bien autoriſé à dire que la bile eſt un véritable ſavon; d'ailleurs ſa propriété ſavonneuſe eſt déjà aſſez connue, puiſqu'on dégraiſſe avec la bile des matières que le ſavon peut à peine dégraiſſer.

M. Rœderer reconnoît avec moi dans la bile, une ſubſtance animale gélatineuſe, mais je crois être un des premiers qui l'ait démontré auſſi ſenſiblement, puiſque de ſix livres de bile, j'ai ſéparé plus de quatre gros de cette ſubſtance gélatineuſe. M. Buquet, Médecin de la Faculté de Paris, qui n'avoit aucune connoiſſance de mes premières expériences ſur la bile, en a tenté depuis pluſieurs ſur cette liqueur animale; elles l'ont conduit à y reconnoître le même principe gélatineux, ainſi que la baſe alkaline du ſel marin. On peut voir les obſervations intéreſſantes de M. Buquet, ſur cette matière, dans une Thèſe qu'il a ſoutenue à la Faculté le 25 Janvier de l'année dernière.

L'acide que M. Rœderer prétend avoir reconnu dans la bile, m'a paru mériter toute mon attention; prêt à renoncer à mon ſentiment, ſi les expériences de M. Rœderer y étoient contraires, j'ai fait de nouvelles expériences ſur la bile, & j'ai voulu ſurtout examiner ſi ce principe acide n'étoit pas plutôt l'ouvrage d'un commencement de fermentation acide que pourroit éprouver la bile avant de paſſer à la putréfaction. J'eſpère que les expériences ſuivantes ſuffiront pour ne laiſſer aucun doute ſur le ſentiment que les premières m'avoient fait adopter: quoique ces expériences détruiſent quelques-unes de celles de M. Rœderer, je ne prétends pas déprimer ſon Ouvrage, qui contient beaucoup de faits intéreſſans.

1.° J'ai pris deux onces de bile tirée d'un bœuf qui venoit d'être tué; elle étoit encore chaude, & ne pouvoit avoir ſouffert aucune altération: je les ai miſes avec une chopine de lait de vache, trait depuis plus de quatorze heures; j'ai agité le mélange, & après l'avoir laiſſé repoſer pluſieurs heures, je n'ai rien vu qui annonçât la moindre décompoſition du lait.

2.° J'ai fait bouillir une chopine du même lait, j'y ai mis

deux onces de bile, j'ai fait faire encore deux ou trois bouillons; il n'a paru aucune coagulation; les parties du mélange en étoient bien liées, le lait paroissoit seulement plus crêmeux qu'il n'étoit auparavant, ce qui venoit de la viscosité & de la partie grasse de la bile.

J'ai exposé ces deux mélanges dans une cuvette d'eau de puits; fraîchement tirée; la température du lieu étoit à 10 degrés du Thermomètre de M. de Reaumur. Le premier mélange est resté plus de quatorze heures sans se séparer; sur le deuxième mélange, j'ai aperçu, au bout de trois ou quatre heures, se former une crême bien lisse sans grumeaux: mais la simple agitation a remis sur le champ le lait dans son premier état; la même chose arrive au lait pur, lorsqu'il est en repos.

3.° J'ai fait tourner du lait avec quelques gouttes de vinaigre distillé, j'ai voulu examiner ce qu'opéreroit la bile sur ce lait caillé; après trois ou quatre bouillons, j'ai observé que la bile avoit rétabli ou régénéré quelques portions du lait, que ce mélange étoit devenu laiteux, & que la partie restante du caillé, qui n'avoit pu être régénérée, s'y étoit entièrement précipitée.

J'attribuai ce commencement de régénération du lait au principe de l'alkali marin que j'ai démontré si sensiblement dans la bile: cette réflexion me donna lieu de répéter quelques expériences momentanées que j'avois faites anciennement pour rétablir du lait qui s'étoit caillé de lui-même sur le feu; je pris pour cet effet, un lait de même qualité, je veux dire qui étoit aigre; j'y jetai quelques grains d'alkali marin, produit des cendres de la bile, au lieu d'alkali marin ordinaire dont je m'étois servi en pareil cas: le lait qui avoit tourné sur le feu fut aussi-tôt rétabli par le moyen de cet alkali, & se trouva de bonne qualité.

4.° Sur un même lait caillé, j'ai jeté quelques gouttes d'alkali volatil; j'ai eu le même résultat comme avec l'huile de tartre par défaillance.

Ces moyens pourroient être tentés, & seroient sûrs dans les temps de chaleur & d'orages, pour empêcher le lait de tourner aussi aisément à l'aigre. On avoit observé que les Eaux minérales qui contiennent un principe alkalin, ont la propriété de

conſerver le lait en l'empêchant de tourner à l'aigre, & de ſe cailler.

D'après ces expériences, il eſt bien conſtant que la bile ne contient point d'acide développé; ſes effets avec le lait, prouvent au contraire qu'elle eſt d'une nature alkaline comme le ſavon. On n'ignore point que l'acide eſt un des principes conſtituans des huiles & des graiſſes, & par conſéquent du principe huileux de la bile, ainſi que du ſavon; ce n'eſt pas cet acide élémentaire dont veut parler M. Rœderer, mais un autre acide qu'il ſoupçonne combiné avec la partie huileuſe de cette ſubſtance animale, & qui lui fait conſidérer la bile comme un ſavon acide: mais mes expériences ſont tout-à-fait contraires à cette opinion; j'avois regardé la bile avec les plus ſavans Chimiſtes, comme étant une liqueur ſavonneuſe: cependant afin d'en faire une exacte comparaiſon avec le ſavon lui-même, j'ai voulu voir quels effets le ſavon produiroit avec le lait.

5.° J'ai fait diſſoudre quatre gros de ſavon blanc dans quatre onces d'eau, j'ai laiſſé refroidir la diſſolution, je l'ai mêlée enſuite avec une chopine de lait; cette liqueur ſavonneuſe, de même que la bile, n'a pas opéré la moindre décompoſition.

6.° J'ai pris une même diſſolution de ſavon, que j'ai verſée dans une chopine de lait bouillant; j'ai donné trois ou quatre bouillons, j'ai obſervé un commencement de décompoſition du lait, qui s'eſt fait remarquer par une portion de lait caillé aſſez conſidérable que j'en ai ſéparée, ce que ne produit point la bile de bœuf dans la même expérience.

Je dirai pourtant que malgré cette portion de caillé, le lait s'eſt ſoutenu, & n'a point tourné; étant mis à repoſer, il s'en eſt ſéparé comme dans les expériences avec la bile, une crême bien liſſe & ſans grumeaux, que la ſimple agitation mêle de nouveau avec la liqueur. Quant à la partie décompoſée, je ne doute pas qu'elle ne vienne de quelque partie d'huile rance que le ſavon ordinaire peut contenir, auſſi n'ai-je rien vu de ſemblable en employant un ſavon nouvellement préparé.

On ſait qu'il y a peu de matières animales qui fourniſſent de l'acide bien développé; les fourmis, les abeilles, ſont preſque

les seules desquelles on en retire : nous en devons l'Observation à M.rs *Hulse, Fisher, Langham ;* M. de Montigny a même observé que l'acide des fourmis est si subtil & si développé, que, lorsqu'on irrite ces insectes dans leurs fourmillières, il s'en échappe aussi-tôt une vapeur qui rougit le papier bleu, comme si on l'avoit trempé dans une liqueur acide ; elle fait aussi sur les mains l'impression d'un acide très-concentré. Si les autres substances animales sont reconnues pour ne point contenir d'acide, il y avoit tout lieu de présumer d'abord que la bile de bœuf, qui contient beaucoup de principe alkalin, devoit être moins soupçonnée qu'aucune autre matière animale, de contenir l'acide que M. Rœderer prétend y avoir reconnu. Il est facile de le démontrer par une expérience très-simple & préférable, ce me semble, à la plupart des combinaisons qu'on a tentées avec le lait ; il suffit de prendre de la bile de bœuf bien fraîche, de l'étendre dans trois ou quatre parties d'eau, d'essayer ensuite cette liqueur sur du fin papier bleu : cette expérience, au lieu de faire passer la couleur bleue au rouge, comme elle le feroit, si effectivement la bile participoit de l'acide, lui donne au contraire un œil verdâtre. On m'objectera peut-être que la cause de cette couleur peut venir plutôt de la couleur jaune de la bile, que du sel alkali qui constitue ce savon animal, puisque dans le mélange des couleurs, le jaune & le bleu donnent toujours du vert ; mais je répondrai que si la bile que j'ai employée, quoique jaune, avoit contenu quelqu'atome d'acide, elle n'en auroit pas moins changé en rouge la couleur bleue du papier. Une seule goutte d'huile de vitriol sur huit onces de cette dissolution de fiel de bœuf, a suffi pour faire passer la couleur bleue du papier au rouge.

Mais, selon moi, rien ne prouve davantage la nature alkaline de la bile, que l'altération qu'elle éprouve par les acides ; en effet, les acides coagulent la bile, & en séparent la partie huileuse, comme ils font à l'égard du savon, qui se décompose de même par les acides.

Autorisé par ces nouvelles expériences, je persiste à soutenir que la bile est alkaline, comme le savon est alkalin. L'acide que M. Rœderer a cru y apercevoir, pourroit être l'effet d'une

fermentation acide ſpontanée; la bile paſſe ſi aiſément à la putréfaction, ſur-tout dans les temps de chaleur, qu'il pourroit bien arriver que ce principe acide s'y manifeſtât promptement, puiſque c'eſt ordinairement la fermentation acide qui précède la putride: cette prompte fermentation eſt peut-être dûe auſſi à la partie gélatineuſe de la bile que j'y ai obſervée.

Malgré ces réflexions, que je ne haſarde qu'à raiſon de l'acide que M. Rœderer dit avoir reconnu dans la bile, je ne diſſimulerai pas que d'après quelques expériences qui me ſont propres, je ſuis plutôt diſpoſé à croire que la bile n'eſt pas ſuſceptible de la fermentation acide, mais qu'elle paſſe d'abord à la fermentation putride. J'ai multiplié à cet effet les obſervations ſur la bile, pour tâcher de ſaiſir le moment où elle deviendroit acide; je l'ai examinée avec le papier bleu de quart-d'heure en quart-d'heure juſqu'à la putréfaction, & je n'ai aperçu aucun inſtant où cette liqueur pût être ſoupçonnée acide.

Si dans l'expérience de M. Rœderer, le lait mêlé avec la bile s'eſt coagulé; je penſe que cette coagulation n'a eu lieu que parce que le lait employé étoit déjà diſpoſé à l'aigre, ou peut-être auſſi parce que la bile étoit alterée *.

Effectivement, s'il eſt naturel de penſer que la bile d'un corps humain bien ſaine, & conſervant ſa couleur jaune, doit être auſſi alkaline, & produire avec le lait les mêmes effets que la bile de bœuf: on pourroit de même ſoupçonner qu'une bile verte venue d'une perſonne mal ſaine & ſujette à des aigreurs, ne devroit cette couleur verte qu'au développement & à la préſence d'un acide étranger, & qu'à cet égard, elle ſeroit dans le cas de faire cailler le lait; mais on conviendra que la propriété & les effets d'une bile ainſi dégénérée, ne devroient être

* M. Tronchin eſt bien de mon ſentiment ſur les principes conſtituans de cette ſubſtance animale, car dans tous les cas où la bile manque d'énergie & où l'acide abonde dans les premières voies, il a recours avec le plus grand ſuccès, à la bile épaiſſie, *felli taurino inſpiſſato*, & dans ce cas ce célèbre Médecin m'a aſſuré ne connoître aucun remède qui dompte plus ſûrement l'acide.

considérés que comme un fait isolé & particulier, d'où on ne peut tirer aucune induction générale sur les principes constitutifs de la bile, telle qu'elle est composée & combinée par la Nature, quand ses opérations ne sont point troublées, ni altérées pour l'élaboration des liqueurs animales: par conséquent, ces faits particuliers ne prouvent rien, ce me semble, contre mon sentiment, appuyé des preuves que j'ai avancées dans mon premier Mémoire & dans celui-ci.



RECHERCHES

RECHERCHES SUR LE CALCUL INTÉGRAL.

Par M. D'ALEMBERT.

CES Recherches contiendront principalement la démonstration des Théorèmes imprimés dans le *Volume de 1767*, que je suppose qu'on ait ici sous les yeux; je joindrai à ces démonstrations, plusieurs autres propositions & méthodes qui en résultent, pour l'intégration d'un grand nombre de quantités ou d'équations différentielles: mais je rejetterai ces propositions & ces méthodes dans des Notes, que je renverrai par des chiffres à la fin du Mémoire, pour ne pas occuper trop de place dans ce Volume. Juillet 1769.

§. I.er

LEMMES pour la démonstration des Théorèmes suivans.

(1.) LEMME I.er On sait que $\cos. ma + \sin. ma\sqrt{-1} = (\cos. a + \sin. a \times \sqrt{-1})^m$, & que $\cos. ma - \sin. ma\sqrt{-1} = (\cos. a - \sin. a \times \sqrt{-1})^m$; d'où l'on a $\cos. ma = \frac{(\cos. a + \sin. a \times \sqrt{-1})^m}{2} + \frac{(\cos. a - \sin. a \times \sqrt{-1})^m}{2}$; & $\sin. ma = \frac{(\cos. a + \sin. a \times \sqrt{-1})^m - (\cos. a - \sin. a \times \sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}$. De-là il s'ensuit 1.° que si m est un nombre entier positif, & qu'on fasse $\sin. a = x$, & $\cos. a = \sqrt{(1 - xx)}$, $\cos. ma$ & $\sin. ma$ seront exprimées par une fonction sans diviseur, qui ne contiendra d'autre radical que $\sqrt{(1 - xx)}$. 2.° Que la même chose aura lieu, si m est un nombre entier négatif, puisque $\cos. -ma = \cos. ma$, & $\sin. -ma = -\sin. ma$. 3.° Que si m est pair, $\cos. ma$ ne renfermera que des puissances paires de x, avec un terme tout constant sans x, qu'on pourra supposer Ax^0. 4.° Que dans le même cas $\sin. ma$ sera $= xX\sqrt{(1 - xx)}$, X ne renfermant que des termes de la forme Ax^0, Bx^2, Cx^4, &c.

5.° Que si m est impair, cos. ma sera $= X' \sqrt{(1 - xx)}$; X' étant de la même forme que X dans le cas précédent; & que sin. ma sera $= xX''$, X'' étant aussi de la même forme que X & X' (1).

(2.) Donc si on appelle v l'angle dont le sinus est x, & que m soit un nombre pair, sin. $mv \times dv$ sera composé de termes de cette forme, $Ax^p dx$, p étant un nombre entier impair. Il en sera de même de dv cos. mv, si m est un nombre impair, avec cette différence qu'alors p sera un nombre pair, dans lequel zéro pourra être compris. Par la même raison, si m est un nombre impair, dv sin. mv sera composé de termes de cette forme $\frac{Ax^p dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$, p étant un impair; & si m est un nombre pair, dv cos. mv sera composé de termes de cette forme $\frac{Ax^p dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$, p étant un nombre pair.

(3.) Puisque sin. $(ma + A) =$ sin. A cos. $ma +$ sin. ma cos. A, & que cos. $(ma + A) =$ cos. ma cos. $A -$ sin. ma sin. A; il est évident que m étant un nombre entier quelconque, positif ou négatif, sin. $(ma + A)$ & cos. $(ma + A)$ seront exprimés par une fonction sans dénominateur qui ne contiendra d'autre radical que $\sqrt{(1 - xx)}$.

(4.) LEMME II. Toute quantité $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + c$ (a, b, c, étant réels ou imaginaires, & m un nombre entier positif) peut toujours se réduire en facteurs de la forme $x + M + N\sqrt{-1}$, M & N étant réels. J'ai démontré le premier cette proposition dans les *Mémoires de Berlin de 1746*, pour le cas où a, b, c, &c. sont réels; pour la démontrer en général, soit $x = p + q$, p & q étant deux quantités indéterminées, & soit $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + c = 0$; on aura une équation formée de p & q, qu'on pourra séparer en deux autres à volonté; à cause que p & q sont indéterminés l'un & l'autre. On pourra donc former une équation dans l'une desquelles les imaginaires ne se trouvent pas (après avoir réduit toutes ces imaginaires à la forme $P + Q\sqrt{-1}$, ce qui est

toujours possible, ainsi que je l'ai démontré autrefois); l'autre équation contiendra tous les termes imaginaires ou multipliés par $\sqrt{-1}$, & en divisant par $\sqrt{-1}$, on aura deux équations sans imaginaires, en p & q, qui peuvent se changer par les méthodes connues en deux autres, l'une simplement en p, l'autre en q. Donc on aura $p = R + S\sqrt{-1}$, & $q = T + V\sqrt{-1}$; donc $x = R + T + (V + S)(\sqrt{-1})$; donc, &c.

(5.) LEMME III. Toute quantité de cette forme $\frac{(g + f\sqrt{-1})dx}{x + a + b\sqrt{-1}}$; se change, en multipliant le haut & le bas par $x + a - b\sqrt{-1}$, en $\frac{dx}{(x+a)^2 + b^2} \times [g(x+a) + fb + (\sqrt{-1})(fx + fa - gb)]$, d'où il est aisé de voir que les différens termes de cette quantité sont toujours réductibles à une fraction rationnelle multipliée par A ou par $A\sqrt{-1}$, A étant une quantité réelle.

§. II.

Démonstration des Théorèmes énoncés dans les Mémoires de 1767, page 573.

Démonstration du Théorème I.er

(6.) Les quantités p, q, r, &c. étant par l'hypothèse en rapport rationnel, peuvent se réduire à $\frac{mA}{n}$, $\frac{m'A}{n}$, $\frac{m''A}{n}$, &c. A étant une quantité quelconque, m, m', m'', &c. des nombres entiers positifs ou négatifs, & n un nombre entier positif. Faisant donc $\frac{Av}{n} = z$, la transformée sera de cette forme $Z\,dz$, Z ne contenant que des sinus & cosinus de αz, βz, &c. α & β &c. étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Donc faisant sin. $z = x$, la nouvelle transformée en x ne contiendra (*Art. 1 & 3*) que le radical $\sqrt{(1 - xx)}$. Faisant donc évanouir ce radical par les méthodes connues, en supposant $\sqrt{(1 - xx)} = (1 - x)t$; on n'aura plus qu'une fraction rationnelle en t & dt. Donc, &c.

Démonstration du Théorème II.

(7.) 1.° Toute quantité de cette forme $a^{pv+\alpha}$ peut se changer en $a^\alpha a^{pv} = A' a^{pv}$; 2.° Ayant donné aux quantités p, q, &c. la forme $\frac{mA}{n}$, $\frac{m'A}{n}$, & supposé $\frac{Av}{n} = v'$, on aura une quantité qui ne contiendra plus que des exponentielles $a^{Sv'}$, S étant un nombre entier; donc faisant $a^{v'} = t$, ce qui donne $dv' = \frac{dt}{t \log. a}$, on n'aura plus qu'une fraction rationnelle, qui pourra à la vérité contenir des imaginaires, mais qui pourra (*art. 4.*) se développer en plusieurs termes de la forme de l'*art. 5.* Donc, &c. (2)

Démonstration du Théorème III.

(8.) Toute quantité de cette forme $a^{pv} \times c^{rv} = (a^p c^r)^v = A^v$: Donc tous les termes de $V dv$ se réduiront à $C v^m A^v dv$; m étant positif, & s'intégreront par les méthodes connues.

Démonstration du Théorème IV.

(9.) Le sinus de $pv + \alpha$, est, comme l'on sait, égal à $\frac{c^{(pv+\alpha)\sqrt{-1}} - c^{-(pv+\alpha)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{(-1)}}$ & le cosinus du même angle est $= \frac{c^{(pv+\alpha)\sqrt{-1}} + c^{-(pv+\alpha)\sqrt{-1}}}{2}$. Donc le théorème à démontrer est une suite du précédent.

Démonstration du Théorème V.

(10.) Soit $m = \frac{1}{p}$, $v^{\frac{1}{p}} = z$, on aura $v = z^p$, &

les différens termes Vdv feront de cette forme $\frac{Bz^m dz c^{gz+b}}{(z+\alpha)^m}$, α étant réel ou imaginaire ; & la difficulté fe réduira, comme il eft aifé de le voir, à intégrer $\frac{dz c^{gz}}{z+\alpha}$ *(3)* ; ou en faifant $z + \alpha = t$, à intégrer $\frac{dt c^{gt - g\alpha}}{t} = \frac{D dt}{t} c^{gt}$, ou (en faifant $c^{gt} = s$) $\frac{E ds}{\log. s}$ *(4)*.

En faifant $v^m = z$, l'expreffion $\frac{c^{gv^m} dv}{v}$ devient de la forme $\frac{A c^{gz} dz}{z}$. Donc, &c. *(5)*.

* *Démonftration du Théorème VII.*

* *Le Théorème VI porte avec lui fa démonftration.*

(11.) 1.° En faifant fin. $v = x$, & $xx = z$, la propofée fe transformera en $\frac{Z dz (a + bz)^{\frac{m}{2}}}{Z'(e + fz)^{\frac{n}{2}} + Z''(g + hz)^{\frac{t}{2}}}$ qu'on fait être réductible aux fractions rationnelles. *(Voyez les Mém. de Berlin, 1746, page 197, n.° V).*

2.° Il en fera de même dans le fecond cas, où Udv fera réductible en termes de cette forme $\frac{x^{2m+1} dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$ & U', U'' en termes de la forme $x^{2p} \sqrt{(1 - xx)}$.

3.° Dans le troifième cas, où Udv eft compofée de termes de la forme $\frac{x^{2m} dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$, & U', U'', de termes de la forme $x^{2p+1} \sqrt{(1 - xx)}$, il n'y aura qu'à multiplier le haut & le bas par x, & faire enfuite $xx = z$.

4.° Il en fera de même dans le quatrième cas, où les termes de Udv feront de la forme $x^{2m} dx$ & ceux de U', U'' de la forme x^{2p+1}.

Démonstration du Théorème VIII.

(12.) 1.° $U\,dv$ ne contient dans le premier cas que des termes de la forme $x^r dx$, & U', U'' que des termes de la forme $x^p dx$, r & p étant des nombres entiers positifs. Donc, &c. *(Voy. les Mémoires de Berlin, 1746, p. 198, n.° VII).*

2.° Udv ne contient dans le second cas que des termes de la forme $\frac{x^r dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, & U', U'' que des termes de la forme $x^p\sqrt{(1-xx)}$. Donc, &c.

3.° Dans le troisième cas il n'y a qu'à faire simplement $xx = z$; & la transformée se réduira aisément aux fractions rationnelles comme dans le premier cas.

4.° Dans le quatrième cas, si U' & U'' contiennent des sinus, il faudra multiplier le haut & le bas par x, & faire ensuite $xx = z$; & si U', U'' contiennent des cosinus, il faudra faire $xx = z$, & la transformée sera composée de termes de cette forme $\frac{Z\,dz}{Z'\sqrt{(az+bz^2)}+Z''\sqrt{(cz+gz^2)}}$; Z, Z', Z'' étant des quantités rationnelles; elle sera donc réductible aux fractions rationnelles. *(Mém. de Berlin, 1746, p. 198, n.° VII.)*

Démonstration du Théorème IX.

(13.) En faisant sin. $v = x$, la transformée sera de cette forme $\frac{X\,dx}{X' + X''(a+bx)^{\frac{n}{2}} + X''(e+fx)^{\frac{1}{2}}}$, X, X', X'' étant rationnelles. Donc, &c. *(Voy. Mém. de Berlin, 1746, p. 197, n.° VI).*

Démonstration du Théorème X.

(14.) On sait 1.° que toute quantité de cette forme $\frac{dx}{(x+b)^{\mu}\times\sqrt{(1-xx)}}$ est intégrable par logarithmes, si μ est un

nombre entier positif, & si b^2 est < 1; cela est évident en faisant $x + b = z$, & $z = u^{-1}$.

2.° Il est aisé de voir que A cos. $rv + B$ ou A sin. $rv + B$, si A^2 est $=$ ou $> B^2$, & qu'on fasse cosin. v ou sin. $v = x$, sera réductible en facteurs réels, $x + a$, $x + b$, $x + c$, &c. dans lesquels a^2, b^2, c^2, &c. seront égaux ou < 1; r étant supposé un nombre entier pair ou impair. C'est une suite des théorèmes connus sur la division des arcs de cercle. Car en faisant, par exemple, sin. $(rv) + k = 0$, si r est impair; & en mettant pour sin. rv sa valeur en x, toutes les racines seront réelles, & ne surpasseront pas l'unité, pourvu que k^2 soit $=$ ou < 1.

De-là il s'ensuit que si on a une quantité de cette forme $\frac{V dv}{(A \,{}^{\text{cos.}}_{\text{sin.}}\, (rv) + B)^\mu}$, V étant $= \alpha$ sin. $pv + q$ cos. sv, &c. p étant impair & s pair, & p & s étant $< \mu r$, cette quantité sera intégrable par logarithmes; car chaque terme de la transformée sera de la forme $\gamma x^{p-\omega} dx$ ou $\gamma' x^{s-\omega} dx$ divisé par $(A' x^r + B x^{r-1}$ &c. $)^\mu \times \sqrt{(1 - xx)}$, ($\omega$ étant un nombre entier $=$ ou $< p$ & s); & par conséquent (à cause de p & $s < \mu r$) chaque terme sera réductible à des termes de la forme $\frac{dx}{(x + b)^\mu \sqrt{(1 - xx)}}$ (6). Donc, &c. (7).

Démonstration du Théorème XI.

(15.) La quantité $A + B$ sin. $(a + v) + C$ cos. $(c + v) + D$ sin. $(g + v) + F$ cos. $(l + v)$ &c. à l'infini, se change en $A + M$ sin. $v + N$ cos. $v = A + R$ sin. $(\alpha + v)$. Soit $\alpha + v = x$, & sin. $x = z$, les termes les plus composés de la transformée seront de cette forme $\frac{Z dz}{(A + Rz)^{\frac{n}{2}} \sqrt{(1 - zz)}}$, & par conséquent réductibles à des arcs de sections coniques. (*Voy. Mém. de Berlin, 1746, p. 219, art. XL.*)

Démonstration du Théorème XII.

(16.) La transformée sera, en faisant sin. $v = z$, $Z\,dz \times (a + Bz)^{\frac{m}{2}} \times (C + Dz + Ezz)^{\frac{n}{2}}$, Z étant une fonction rationnelle de z sans radical ni diviseur. Donc, &c. *Voy. (Mém. de Berlin, ibidem.)*

Démonstration du Théorème XIII.

(17.) En faisant sin. $v = x$, & $xx = z$, les termes les plus composés de la transformée, dans le cas où U renferme des cosinus, seront de cette forme $Z\,dz \times z^{\pm\frac{1}{2}}(a + bz)^{\frac{m}{2}} \times (g + hz)^{\frac{n}{2}}$, Z étant de même espèce que dans le cas précédent; & par conséquent ces différens termes seront réductibles à des arcs de sections coniques; & dans le cas où U renferme des sinus, les termes de la transformée seront de cette forme $\frac{Z\,dz}{\sqrt{(1 - z)}} \times (a + bz)^{\frac{m}{2}} \times (g + hz)^{\frac{n}{2}}$. Donc, &c. *(Voy. Mém. de Berlin, 1746, p. 219, n.° XL.)*

Démonstration du Théorème XIV.

(18.) Soit sin. $v = x$, & $xx = z$, & on aura une transformée de cette forme $Z\,dz\,(a + bz)^{\frac{m}{2}} \times (g + hz)^{\frac{n}{2}} \times (e + fz)^{\frac{r}{2}}$, Z étant de la même forme que dans les cas précédens. Donc, &c.

Démonstration du Théorème XV.

(19.) Il suffit de faire sin. $v = x$, & la différentielle se transformera en une autre réductible à des arcs de sections coniques. *(Voy. Mém. de Berlin, 1746, page 219, art. XLI; & page 221, art. XLVIII.)*

Démonstration

Démonstration du Théorème XVI.

(20.) Soit $zz = u$, & $= \frac{1}{t}$, la différentielle se transformera en $\frac{t^{-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\lambda+\omega+\sigma}{2}-2}}{(ft+g)^{\frac{\omega}{2}}(pt+q)^{\frac{\lambda}{2}}(lt+r)^{\frac{\sigma}{2}}}$, réductible aux arcs de sections coniques, si $-\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}-2+\frac{\lambda+\omega+\sigma}{2}$ est $= 0$ ou un nombre entier positif. Donc, &c.

Démonstration du Théorème XVII.

(21.) Soit, par exemple, $U = C \operatorname{cof.} 3v + D \operatorname{cof.} v = (Ax^2+B)\sqrt{(1-xx)}$, ce qui donne $U dv = (Ax^2+B)dx$; & soient m, n, s, des nombres entiers négatifs & impairs; la transformée sera, en faisant $xx = z$, de la forme $\frac{(Az+B)dz}{\sqrt{z} \times (a+bz)^{\frac{m}{2}}(e+fz)^{\frac{n}{2}}(g+hz)^{\frac{\;}{2}}}$, qui sera réductible aux arcs de sections coniques, en faisant $z = \frac{1}{u}$, pourvu qu'un seul ou plusieurs à volonté des exposans m, n, s, soient > 1.

Démonstration de la 1.re partie du Théorème XVIII.

(22.) Soit $a + bx = z$, on aura $z^{m-\omega}$ au lieu de x^m dans les différens termes de la transformée, ω étant un nombre entier $=$ ou $< m$; & en faisant $z = t^{-1}$, les différens termes de la transformée seront de la forme $\frac{t^{-m+\omega-2+s+\frac{q+p}{2}}dt}{(tt-1)^{\frac{s}{2}}(\alpha t+b)^{\frac{p}{2}}}$, réductible aux arcs de sections coniques si l'exposant de t dans le numérateur est zéro ou un entier positif. Or si $-m-2+$

$s + \frac{p+q}{2}$ eſt un tel nombre, à plus forte raiſon $- m - 2 + \omega + s + \frac{q+p}{2}$ en ſera un auſſi. Donc, &c.

Démonſtration de la 2.ᵉ partie du Théorème XVIII.

(23.) Soit, par exemple, $U = 1$, & n, l négatifs, on aura la transformée $\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}(a + bx)^{\frac{n}{2}}(e + fx)^{\frac{l}{2}}}$; faiſant enſuite $a + bx = z$, & $z = t^{-1}$, on aura pour transformée une quantité de cette forme $\frac{A\,dt \times t^{\frac{n+l}{2} - 1}}{\sqrt{(\alpha + \beta t + \gamma tt)} \times (\delta + \varepsilon t)^{\frac{l}{2}}}$, qui eſt réductible à des arcs de ſections coniques. (*Mémoires de Berlin, 1746, page 219, article XI.*)

(24.) Il en ſera de même ſi $U = A$ ſin. $pv + B$ coſ. qv, p étant impair & q pair, & que $- p - 2 + 1 + \frac{n+l}{2}$ & $- q - 2 + 1 + \frac{n+l}{2}$ ſoient $=$ ou $>$ 0 *(8)*.

Démonſtration du Théorème XIX.

(25.) Soient y & x les coordonnées de la courbe, & ſoit ſuppoſé $y = xz$, on aura l'élément $y\,dx$ de l'aire de la courbe $= z\,x\,dx$, dont l'intégrale eſt $\frac{zxx}{2} - \int \frac{xx\,dz}{2}$. Donc la quadrature de la courbe ſera réductible aux fractions rationnelles, ſi $xx\,dz$ y eſt réductible. Or c'eſt ce qui aura lieu dans l'équation propoſée en mettant xz pour y, & tirant de l'équation la valeur de xx en z.

Démonſtration du Théorème XX.

(26.) Elle eſt la même que celle du Théorème précédent *(9)*.

Démonstration du Théorème XXI.

(27.) Soit $z + dz$, la valeur de z qui répond à $y + dy$, x étant supposé constant; $z + dz + \mathrm{d}z$ la valeur de z qui répond à $x + dx$ & à $y + dy$; on aura évidemment $dz = \omega dy$; $\mathrm{d}z = dx\,(p + \frac{dp}{dy}dy)$; & par conséquent $z + dz + \mathrm{d}z = z + \omega dy + dx\,(p + \frac{dp}{dy}dy)$; soit à présent $z + \partial z$ la valeur de z qui répond à $x + dx$ en prenant y constant; & $z + \partial z + \delta z$, la valeur de z qui répond à $x + dx$ & à $y + dy$; on aura $\partial z = p\,dx$, $\delta z = dy\,(\omega + \frac{d\omega}{dx}dx)$; donc $z + \partial z + \delta z = z + p\,dx + dy\,(\omega + \frac{d\omega}{dx}dx)$. Or il est évident que $z + dz + \mathrm{d}z$ doit être la même que $z + \partial z + \delta z$. Donc $\frac{dp}{dy}$ doit être $= \frac{d\omega}{dx}$. Donc, &c.

L'équation A donne la valeur de ω en x, y, z, en prenant x pour paramètre, & la différentiation de cette équation donne la valeur de $d\omega$ en faisant varier le paramètre x, & en prenant y constant. Il en est de même de l'équation B & de sa différentielle, dans lesquelles on prend d'abord y pour paramètre, & ensuite x constant, en faisant varier le paramètre *(10)*.

Démonstration du Théorème XXII.

(28.) Pour que $N = 0$, ou en général $N - a = 0$ satisfasse à l'équation $dx - M dy = 0$; il faut 1.° que $dx \frac{dN}{dx} + dy \frac{dN}{dy} = 0$; 2.° qu'en mettant dans cette équation, au lieu de dx sa valeur $M dy$, l'équation finie qui en résultera $M \frac{dN}{dx} + \frac{dN}{dy} = 0$, s'accorde avec l'intégrale supposée $N - a = 0$.

Or c'eſt ce qui réſulte en effet de la ſuppoſition que $z = 0$ rende $u - a = 0$.

Démonſtration du Théorème XXIII.

(29.) Suppoſant $P + Q = a$, différentiant, & mettant pour dx & dy leurs proportionnelles N & M, on aura $\frac{NdP}{dx} + \frac{MdP}{dy} + \frac{NdQ}{dx} + \frac{MdQ}{dy} = 0$. Or ſi $z = 0$ donne $u = 0$ ou $= a$; cette dernière équation s'accordera avec l'équation ſuppoſée $P + Q = a$. Donc, &c. *(11)*

Démonſtration du Théorème XXIV.

(30.) Une équation différentielle quelconque, étant donnée, on peut toujours aiſément la transformer en une autre $du + \varrho\, dt = 0$, dans laquelle $t = 0$, donne $u = 0$. Il en ſeroit de même ſi les différentielles étoient élevées dans l'équation à telles puiſſances qu'on voudroit.

En effet, 1.° ſuppoſons que $u = a$ donne $t = b$, il n'y a qu'à ſuppoſer $u - a = u'$, $t - b = t'$, & mettre dans l'équation $u' + a$ au lieu de u, du' au lieu de du, $t' + b$ au lieu de t, & dt' au lieu de dt. 2.° Si u ou t, ou toutes deux ſont infinies à la fois, il n'y a qu'à faire $u = \frac{1}{u'}$ & $t = \frac{1}{t'}$, & ſubſtituer à la place de u, du, t, dt, leurs valeurs en u', du', t', dt'. Il eſt donc viſible que dans une équation différentielle on peut toujours ſuppoſer $u = 0$ lorſque $t = 0$.

(31.) On demande maintenant dans quel cas $t = 0$ donnera $u =$ à tout ce qu'on voudra. Après avoir penſé à ce problème & trouvé une méthode pour le réſoudre, j'ai reçu le premier volume du *Calcul intégral* de M. Euler, & j'ai vu que ce grand Géomètre y avoit donné les principes néceſſaires pour cet objet, & m'avoit ainſi prévenu en grande partie; mais il me ſemble qu'on peut, à pluſieurs égards, étendre & perfectionner ſon travail.

(32.) M. Euler remarque d'abord, avec raiſon, que ſi on a, par exemple, $du = \frac{dt}{\sqrt{(t - a)}}$ ou plus ſimplement $du = \frac{dt}{\sqrt{t}}$; on aura, en ſuppoſant que t ſoit toujours $= 0$, & par conſéquent $dt = 0$, une équation identique, & que cependant la ſuppoſition de $t = 0$ ne ſatisfait pas réellement à l'équation différentielle propoſée, quel que ſoit u, puiſqu'on a en intégrant $u = 2\sqrt{t} + C$, C étant une conſtante arbitraire, ce qui donne lorſque $t = 0$, $u = C$, & par conſéquent $C = 0$, puiſque *(hyp.)* $u = 0$ quand $t = 0$. Donc $t = 0$ ne donne que $u = 0$, & non pas u de valeur quelconque. Mais M. Euler n'a pas, ce me ſemble, donné la raiſon de ce paradoxe. La voici, ſi je ne me trompe.

(33.) Soit $t = zz$, on aura $z = 0$, & en ſubſtituant & réduiſant $du = 2\,dz$, équation dans laquelle la ſuppoſition de $t = 0$, ou, ce qui eſt la même choſe, $z = 0$, ne donne plus une valeur arbitraire à u. Cette équation provient de celle-ci, $z\,du = 2\,z\,dz$, dont les deux membres ſont multipliés par z, & doivent être diviſés par cette quantité pour avoir la vraie valeur de du. C'eſt ainſi que l'équation $uz = za$, paroît ſe réduire à $0 = 0$ quand $z = 0$; cependant elle donne réellement $u = a$, & non pas u d'une valeur arbitraire.

(34.) M. Euler conſidère enſuite une équation de cette forme $du = \frac{dt}{t^n}$, n étant > 1, & il remarque que l'intégrale eſt $u = \frac{-1}{(t^{n-1})(n-1)}$, plus C conſtante arbitraire. Il ajoute qu'en faiſant $t = 0$ & C infinie, u eſt alors *indéterminée*. C'eſt ce qui ne ſe voit pas clairement, ce me ſemble. Car ſoit (comme nous le ſuppoſons toujours) $u = 0$ lorſque $t = 0$, C ſera $= \frac{1}{0^{n-1}(n-1)}$, & en faiſant $t = 0$, u ſemble devoir reſter toujours égale à zéro.

(35.) La ſeule manière de faire voir que u peut être ici ſuppoſée tout ce qu'on voudra, c'eſt de remarquer 1.° que u étant

$= 0$ *(hyp.)* lorsque $t = 0$, C doit nécessairement être infinie. 2.° que C étant infinie, u est nécessairement infinie lorsque t est finie, quelque petite qu'on la prenne. Donc u qui est $= 0$ lorsque $t = 0$, devient infini lorsque t est finie, quelque petite qu'on la suppose. Donc u a toutes les valeurs possibles entre $t = 0$, & t fini & très-petit. Donc t supposé infiniment petit ou (ce qui en Géométrie revient au même) égal à zéro, donne pour u toutes les valeurs possibles.

(36.) Mais comme ce raisonnement, quoique démonstratif, pourroit encore souffrir quelques difficultés auprès de certains Lecteurs, soit $t^n du = dt$, n étant > 1, & je remarque, 1.° que si on fait $t = z^m$, m étant une quantité positive, $t = 0$ donnera $z = 0$; 2.° que pour lors on aura $z^{mn} du = mz^{m-1} dz$, & qu'on ne peut jamais donner à l'équation cette forme $du = Az^k dz$, k étant 0 ou positif, puisque n étant $>$ ou même simplement $= 1$, $m - mn - 1$ est nécessairement négatif. Donc en ce cas l'équation sera nécessairement de cette forme $z^r du = Adz$, dans laquelle r est positif; donc alors $z = 0$, donne $0 = 0$, & par conséquent u de valeur quelconque.

(37.) Il faut donc pour que $t = 0$ rende u de valeur quelconque, que l'équation différentielle entre u, t, du, dt soit telle qu'en faisant $t = z^n$, & n étant positif, on ne puisse jamais supposer à n une telle valeur que z disparoisse du coëfficient de du. D'où l'on tire cette règle:

(38.) L'équation entre u, t, du, dt étant donnée telle qu'on voudra, de manière même que dt & du y soient mêlées entre elles & élevées à des puissances quelconques, on fera d'abord disparoître les radicaux & les fractions, & on ordonnera l'équation par rapport à du. On examinera ensuite le coëfficient $At^m + Bu^n t^p + Cu^r t^s$, &c. de la plus haute puissance de du que j'appelle du^λ; on verra si dans tous les termes de ce coëfficient l'exposant m, p, s, de la puissance de t est $=$ ou plus grand que la somme des exposans $\varrho + \sigma$ de t & de dt dans tout autre terme $t^\varrho\, dt^\sigma \times u^k\, du^{\lambda - \sigma}$; je dis qu'en ce cas $t = 0$ donnera $u =$ à tout ce qu'on voudra.

(39.) En effet, puisque m, par exemple, est $=$ ou $> \rho + \sigma$, on aura beau supposer $t = z^n$, on ne parviendra jamais *(art. précédent)* à délivrer de la quantité z le coëfficient de la plus haute puissance de du; tous les termes contiendront donc nécessairement ou z ou dz, de sorte qu'en faisant $z = 0$, ce qui donne $dz = 0$, l'équation se réduira à $0 = 0$, & par conséquent u pourra être supposée tout ce que l'on voudra.

(40.) Mais quand dans tous les termes dont il s'agit, c'est-à-dire qui multiplient du^{λ}, l'exposant de t sera $< \rho + \sigma$, ou quand cela arrivera même dans un seul de ces termes, alors en supposant $t = z^n$, & divisant par z^{mn} si m est le plus petit exposant de t dans le coëfficient dont il s'agit, on aura nécessairement un terme où ne se trouveront ni z ni dz; & par conséquent la supposition de t & $dt = 0$, ne donnera pas $0 = 0$.

(41.) En effet, puisqu'il y a un des termes du coëfficient de du^{λ} où l'exposant de t est $< \rho + \sigma$, soit m le plus petit des exposans de t, & on aura nécessairement $m < \rho + \sigma$. Cela posé, soit $t = z^n$, ce qui donne $t^{\rho}\, dt^{\sigma} = n^{\sigma} z^{\rho n + \sigma n - \sigma} dz^{\sigma}$; & si $\rho = m$, on n'a qu'à supposer $n = 1$, & diviser par z^m ou z^{ρ}, on aura un terme où du^{λ} n'aura point z pour multiplicateur; & un autre terme où il n'y aura point de z non plus, mais seulement dz^{σ}. Donc alors en faisant $z = 0$ & $dz = 0$, on n'aura pas $0 = 0$, & u ne pourra être supposée de valeur quelconque. Si ρ est $> m$, alors divisant par z^{mn}, on aura un terme où du^{λ} sera sans z, & d'autres termes où l'exposant $\rho n + \sigma n - mn\sigma$, de z sera toujours positif ou zéro, pourvu qu'on prenne $n = \frac{\sigma}{\rho + \sigma - m}$; donc en supposant $u =$ ou $>$ que la plus grande des valeurs de $\frac{\sigma}{\rho + \sigma - m}$, on aura toujours $\rho n + \sigma n - mn - \sigma =$ ou > 0, quel que soit ρ & σ. Donc z & $dz = 0$ ne donneront pas $0 = 0$, ni par conséquent u de valeur quelconque *(12)*.

(42). On peut conclure de ce qui précède, que si on exprime u par une série de puissances de t suivant les méthodes

connues, & que $u = A t^n$ soit la 1.re valeur de u en t, la supposition de $t = 0$, donnera u telle qu'on voudra dans les cas suivans.

1.° Si A est arbitraire, n étant positif ou négatif; en effet n étant positif, & $A = \infty$ ou $\frac{1}{A} = 0$, t sera $= 0$, quel que soit u; & n étant négatif, & $A = 0$, on aura $t^{-n} = \frac{0}{u}$, & t sera encore $= 0$, quel que soit u.

2.° Si A étant finie & donnée, n est négatif. Car pour que u soit égal à zéro, il faut que la valeur de u contienne un autre terme $B t^k$, dans lequel puisque k est nécessairement $< n$, il s'ensuit que B doit être infinie, & $= - A 0^{n-k}$. Donc t finie & très-petite donnera u infinie. Donc, &c.

3.° Dans le 1.er cas t sera aussi tout ce qu'on voudra, u étant $= 0$; car il n'y a qu'à supposer $A = 0$, ce qui est permis, puisque A est arbitraire. Mais si on avoit $u = A t^n$, A étant donnée & n positif, alors on ne pourroit rien conclure par cette voie sur la valeur de u, lorsque $t = 0$, ni sur celle de t, lorsque $u = 0$; car l'équation $u = A t$, par exemple, peut venir également de l'équation $d u = A dt$, ou de $\frac{A d u}{u^2} = \frac{d t}{t^2}$; dont la première ne donne point, & ne sauroit jamais donner u de valeur quelconque, t étant $= 0$, & dont la seconde au contraire peut donner $t = 0$, u étant tout ce qu'on voudra, & réciproquement.

(43). Soit maintenant donnée une équation entre t, u; dt, du. Après avoir fait évanouir les radicaux, s'il y en a, on la disposera sur le triangle analytique, en mettant les termes $t^m u^p dt^k du^r$ dans les mêmes cases où seroient les termes $t^{m+k} u^{p+r}$, si l'équation étoit finie. On cherchera ensuite, par les méthodes connues, le premier terme de la valeur de u en t, lorsque t est 0 ou infiniment petite, & le premier terme de la valeur de t en u, lorsque u est 0 ou infiniment petite; & par les valeurs de A & de n, on trouvera aisément dans les cas énoncés

énoncés ci-dessus (*art. précéd.*) si $t = 0$ donne $u =$ à tout ce qu'on voudra, & réciproquement.

Cette méthode est fondée 1.° sur les propriétés connues du triangle analytique, 2.° sur cette considération, que si dans la quantité $t^m\ u^p.\ dt^k\ du^r$, on met At^n pour u, on aura une quantité de même dimension qu'en faisant la même substitution dans $t^{m+k}\ u^{p+r}$. Au reste, la méthode proposée ici, ne doit être employée que dans les cas où l'on n'auroit pas pour premier terme de la valeur de u, $u = At^n$, A étant donnée & n positif. Dans ces cas-là il faudroit avoir recours à la méthode générale donnée ci-dessus, qui d'ailleurs est plus simple dans tous les cas que celle du triangle analytique ; mais j'ai cru qu'on ne seroit pas fâché de voir de quel usage le triangle analytique ou le parallélogramme de Newton, peut être dans cette recherche. On peut remarquer en passant, que plusieurs termes peuvent ici se trouver à la fois dans la même case du triangle analytique ; par exemple, les termes où seroient udt & tdu, lesquels se trouvent dans la case où seroit le terme tu de l'équation finie. On voit aussi comment le coëfficient A, qui n'est jamais arbitraire quand l'équation entre u & t est finie, peut l'être quand elle renferme les différentielles du, dt ; par exemple, si on avoit $tdu - nudt = 0$, on auroit par le triangle analytique, en faisant $u = At^k$, l'équation $-nA + kA = 0$, d'où $k = n$, & A tout ce qu'on voudra (*13*).

(44.) Il n'est pas difficile de voir que les méthodes précédentes s'étendent au cas où l'équation entre u, t, contiendroit des différences secondes, troisièmes, &c. & que $t = 0$ donnera u de valeur quelconque, si l'exposant m de t dans chacun des termes $At^m\ u^k\ du^\lambda\ ddu^\nu$, (où dt ni ses différences ne se trouvent pas) est $=$ ou $>$ que la somme des exposans $\rho + \sigma + \mu$ de t & de ses différences dans les termes $Bt^\rho dt^\sigma\ ddt^\mu \times u^\theta\ du^\gamma\ ddu^\varsigma$. C'est une suite de ce qui a été démontré ci-dessus.

(45.) Voici maintenant l'usage de ces méthodes, pour trouver des intégrales particulières & algébriques d'une équation, sans

avoir recours aux opérations du Calcul intégral, & pour ainsi dire, par la seule inspection de la transformée.

(46.) Soit $dx + \alpha dy = 0$, & ayant pris tant d'indéterminées nouvelles qu'on voudra, z, u, t, &c. en nombre n, soient formées n équations algébriques entre x, y, z, u, t, &c. & soit $du + \varrho dt = 0$, la nouvelle équation différentielle transformée qui résulte de ces équations. Soit cherchée, par le moyens des équations algébriques, l'équation entre x, y, u, & celle entre x, y, t; soit fait $u = 0$ dans la 1.ere; je dis que si l'équation $du + \varrho dt = 0$ est telle que u y soit $= 0$ quel que soit t, l'équation en x & en y résultante de $u = 0$ sera une équation intégrale algébrique de la proposée; ce qui est évident, puisque u *(hyp.)* est toujours égale à zéro. Il en sera de même de l'autre équation entre x, y, t, en y faisant $t = 0$, si $du + \varrho dt = 0$ donne $t = 0$, quel que soit u *(14)*.

Démonstration du Théorème XXV.

(47.) 1.° En faisant $y = cSp\,dx$, & supposant dx constante; on aura $ddp + (3 + b)\, p\,dp\,dx + (a + b + 1)\, p^3 dx^2 = 0$, qui se réduit à l'homogénéité, en faisant $dx = u\,dp$, & $u = pz^t$, t étant égal à -3.

2.° L'équation $d\,(y^2 ddy) + a\,dy^3 + b\,y\,dy\,ddy = 0$ se change en $y^2 d^3 y + (b + 2)\, y\,dy\,ddy + a\,dy^3 = 0$, qui se réduit au cas précédent.

3.° L'équation $Ay^p ddy + By^{p-1} dy^2 + Cdx^2 = 0$, donne, étant différenciée, $y^2 d^3 y + (p + \frac{2B}{A})\, y\,dy\,ddy + \frac{B(p-1)\,dy^3}{A} = 0$, qui se réduit au premier cas.

4.° Il en est de même de $Ad(y^p dy) + Dy^{p-1} dy^2 + Cdx^2 = 0$ qui se réduit évidemment au cas précédent *(15)*.

Démonstration du Théorème XXVI.

(48.) On suppose $k + 2p + q$ constant, afin que les quantités infiniment petites soient du même ordre dans l'équation. Maintenant puisque $n + k + p$ est constant, on aura, en faisant $y = c^{\int t\,dx}$, une quantité d'où les exponentielles disparoîtront, & qui ne contenant que t, dt & dx pourra s'intégrer sans peine.

Démonstration du Théorème XXVII.

(49.) Soit $dx = u\,dp$, on aura $ddp = -\frac{du\,dp}{u}$; & l'équation transformée aura pour premier terme $-\frac{du}{u}$, & pour chacun des autres une quantité de cette forme $Bp^q u^{2-r} dp$. Soit $u = pz^t$, on aura $-\frac{dp}{p} - \frac{t\,dz}{z} + Bp^{q+2-r} \times z^{(2-r)t} dp$, &c. $= 0$. Or il est visible que cette équation sera réductible à l'homogénéité, & par conséquent intégrable, si $q + 2 - r + (2 - r)t = -1$, c'est-à-dire, si $\frac{q+3-r}{2-r}$ est constante dans chaque terme & égale à l'indéterminée t. Donc, &c. *(16)*.

Démonstration du Théorème XXVIII.

(50.) En supposant $y = c^{\int q\,dx}$, il est facile de voir que si la 2.e équation a lieu, la transformée sera de la forme $ddq + dq\,dx\,\varphi q = 0$, qui s'intègre aisément en faisant $dx = u\,dq$, ce qui donne $-\frac{du}{u^2} + dq\,\varphi q = 0$; & si la 1.re équation a lieu, on aura pour transformée $ddq + dx^2\,\varphi q = 0$ qui s'intégrera de même.

Il est aisé de voir que la 1.re équation aura lieu, 1.° si

$B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $F = 0$, & si $3A + E = 0$, & $k = 1$; ou 2.° si $A = 0$, $C = 0$; $E = 0$, $F = 0$, & si $3B + D = 0$, & $p = -1$; ou 3.° si $A = 0$, $D = 0$, $3B + E = 0$, $k = p + 1$, $3C + F = 0$, $l = r + 1$, &c. On trouvera de même les conditions néceſſaires pour que la 2.e équation ait lieu.

Démonſtration du Théorème XXIX.

(51.) Faiſant $y = c^{\int p\, dx}$, & multipliant par x^2, la tranſformée eſt $x^2 dp + (1 + a) x^2 pp\, dx + bxp\, dx + C dx + ep^m x^m\, dx + fp^k x^k\, dx +$ &c. $= 0$; & ſuppoſant $px = z$, on aura $x\, dz + (1 + a) z^2 dx + (b - 1) z dx + C dx + ez^m dx + fz^k dx$, &c. $= 0$, équation qui eſt évidemment toute ſéparée *(17)*.

Démonſtration du Théorème XXX.

(52.) Soit $y = c^{\int p\, dx}$, $p = Fzx^n = -\frac{H}{n} zx^n$, on aura la tranſformée $Fx^n dz + x^{2n} dx \times [(1 + a) F^2 z^2 + Gz + B] = 0$; équation toute ſéparée *(18)*.

Démonſtration du Théorème XXXI.

(53.) Soit multipliée l'équation par u^{a+1}, elle deviendra $d(u^a du) + \xi u^a du\, dx + \frac{X u^{\omega + a + 1} du^\rho}{dx^{\rho - 2}} = 0$; or il eſt aiſé de voir que cette équation eſt intégrable ſi $\omega + a + 1 = a\rho$, c'eſt-à-dire, ſi $a = \frac{\omega + 1}{\rho - 1}$; car en faiſant $u^a du = z dx$, elle devient $dz + \xi z dx + X z^\rho dx = 0$.

Démonstration du Théorème XXXII.

(54.) Soit $y = zu$, & l'équation $ddy + yXdx^2 + \frac{Edx^2}{y^3} = 0$ se changera en $uddz + 2dudz + zddu + Xzudx^2 + \frac{Edx^2}{z^3u^3} = 0$; ou (à cause de $ddz + Xzdx^2 = 0$ *(hyp.)*) en $2dudz + zddu + \frac{Edx^2}{z^3u^3} = 0$; donc en multipliant par z, on aura $d(zzdu) + \frac{Edx^2}{z^2u^3} = 0$, ou $z^2du\,d(zzdu) + \frac{Edudx^2}{u^3} = 0$; ce qui donne $\frac{z^4du^2}{2} + Edx^2(A - \frac{1}{2u^2}) = 0$; A étant une constante. Donc $\frac{-du^2}{A - \frac{1}{2u^2}} = \frac{Edx^2}{z^4}$; & comme z est connu en x *(hyp.)*, on aura donc u, & par conséquent y.

Démonstration du Théorème XXXIII.

(55.) Soit multipliée l'équation $yddz + Adydz + Ey^{-2A+1}z^qdx^2 = 0$ par y^{A-1}, on aura $d(y^Adz) + Ey^{-A}z^qdx^2 = 0$, ou $y^Adz\,d(y^Adz) + Ez^qdzdx^2 = 0$; donc $\frac{y^{2A}dz^2}{2} + Edx^2(\frac{z^{q+1}}{q+1} - C) = 0$. Donc, &c.

Démonstration du Théorème XXXIV.

(56.) Soit multipliée l'équation $yzddz + Cydz^2 + Azdzdy + Ey^{-2A+1}z^qdx^2 = 0$ par $z^{C-1}y^{A-1}$; on aura $d(y^Az^Cdz) + Ey^{-A}z^{q+C-1}dx^2 = 0$, ou $y^Az^Cdz\,d(y^Az^Cdz) + Ez^{q+2C-1}dzdx^2 = 0$; d'où $\frac{y^{2A}z^{2C}dz^2}{2} + Edx^2(\frac{z^{q+2C}}{q+2C} - B) = 0$. Donc, &c.

Démonstration du Théorème XXXV.

(57.) Si on met l'équation $\frac{ddy}{y} + \frac{Edx^2}{y^4} + Xdx^2 = 0$ sous la forme $d\left(\frac{dy}{y}\right) + \frac{dy^2}{y^2} + \frac{Edx^2}{y^4} + Xdx^2 = 0$, & qu'on fasse $y = Au^p$, on aura $\frac{ddu}{u} + \frac{(p-1)\,du^2}{u^2} + E \times A^{-4} u^{-4p} dx^2 + Xdx^2 = 0$, ou $\frac{ddu}{u} + \frac{a\,du^2}{u^2} + Du^{-4a-4} dx^2 + Xdx^2 = 0$, qui sera par conséquent intégrable dans les cas où $ddy + yXdx^2 = 0$ le sera *(19)*.

Démonstration du Théorème XXXVI.

(58.) Soit mise l'équation sous cette forme $\frac{ddy}{dy} + \zeta dy + \frac{\sigma dx^k}{dy^{k-1}} = 0$, & soit mis $\frac{dY}{Y}$ pour ζdy, ce qui est toujours possible, en faisant $Y = c^{\int \zeta dy}$, on aura d log. $\left(\frac{Ydy}{dx}\right) + \frac{\sigma dx^k}{dy^{k-1}} = 0$, & faisant $\frac{Ydy}{dx} = p$, on aura $\frac{dp}{p} + \sigma Y^k p^{-k} dy = 0$, qui est évidemment intégrable.

Démonstration du Théorème XXXVII.

(59.) On aura *(art. précéd.)* $\frac{ddy}{dy} + \frac{dY}{Y} + \frac{\rho dx}{x} + \frac{\sigma x^\omega dx^k}{dy^{k-1}} = 0$, ou d log. $\left(\frac{Yx^\rho dy}{dx}\right) + \frac{\sigma x^\omega dx^k}{dy^{k-1}} = 0$. Faisant donc $\frac{Yx^\rho dy}{dx} = p$, on aura $\frac{dp}{p} + \sigma x^{\omega + k\rho} p^{-k} \times Y^k dy = 0$, équation intégrable, si $\omega + k\rho = 0$. *(20)*

Démonstration du Théorème XXXVIII.

(60.) Toute équation de cette forme $dp + dx\,\varphi\left(\frac{p}{x}\right) = 0$ ou $dp + dx\,\varphi\left(\frac{x}{p}\right) = 0$ est intégrable; donc en l'écrivant ainsi $\frac{dp}{p} + \frac{dx}{p}\,\varphi\left(\frac{p}{x}\right) = 0$, & mettant pour p sa valeur $\frac{Y \times X' dx^m}{dy^m}$, on aura $\frac{m\,ddx}{dx} - \frac{m\,ddy}{dy} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dy^m}{X \times Y dx^{m-1}}\,\varphi\left(\frac{X \times Y dx^m}{x\,dy^m}\right) = 0$. Faisant successivement $ddx = 0$ & $ddy = 0$, on aura les équations énoncées dans le théorème dont il s'agit ici *(21)*.

Démonstration du Théorème XXXIX.

(61.) Soit mise l'équation sous cette forme $\frac{ddt}{t} + \frac{\xi\,dt\,dx}{t} + \frac{\zeta\,dt^2}{t^2} + X dx^2 = 0$; & faisant $t = A z^q$, on aura pour transformée $\frac{q\,ddz}{z} + \frac{q \times (q-1)\,dz^2}{z^2} + \frac{\zeta q^2\,dz^2}{z^2} + \frac{\xi q\,dz\,dx}{z} + X dx^2 = 0$; & supposant $q(q-1) + \zeta q^2 = 0$ ou $q - 1 + \zeta q = 0$, on aura la transformée $q\,ddz + \xi q\,dz\,dx + X z\,dx^2 = 0$. Or s'il y a une seule valeur de z qui satisfasse à cette équation, on pourra intégrer en général l'équation $q\,ddz + \xi q\,dz\,dx + X z\,dx^2 + X' dx^2 = 0$ ou $\frac{q\,ddz}{z} + \frac{\xi q\,dz\,dx}{z} + X dx^2 + \frac{X' dx^2}{z} = 0$, ou $\frac{ddt}{t} + \frac{\xi\,dt\,dx}{t} + \frac{\zeta\,dt^2}{t^2} + X dx^2 + \frac{X' dx^2}{A^{-\frac{1}{q}}} \times t^{-\frac{1}{q}}$, ou enfin $t\,ddt + \xi\,t\,dt\,dx + \zeta\,dt^2 + X t^2\,dx^2 + X' dx^2 \times t^{1-\zeta}$, en multipliant par t^2 & mettant pour q sa valeur $\frac{1}{1+\zeta}$.

Démonſtration du Théorème XL.

(62.) Soient θ', θ'', θ''', &c. les n valeurs de θ, on aura n équations de la forme $d^n\theta + Z\,d^{n-1}\theta\,dz + \ldots \xi\,dz^n = 0$, & en retranchant ces équations les unes des autres, on aura $n - 1$ équations de la forme $d^n\vartheta \,.\,. + Z'\vartheta\,dz^n = 0$, dans leſquelles ϑ ſera connue, & aura $n - 1$ valeurs, puiſqu'il y a $n - 1$ valeurs différentes de $\theta' - \theta''$, $\theta' - \theta'''$, $\theta'' - \theta'''$, &c. Donc comme M. de la Grange & moi l'avons fait voir ailleurs, *(Mém. de Turin, tom. III.)* on aura l'intégrale de la propoſée (22).

Démonſtration du Théorème XLI.

(63.) Si on a l'intégrale générale de l'équation $d^n\theta + Z\,d^{n-1}\theta\,dz \ldots\ldots + \xi\,dz^n = 0$, on aura celle de la même équation en mettant pour ξ telle autre fonction de z qu'on voudra; puiſque l'intégrale générale ſuppoſée renferme n conſtantes, d'où l'on peut tirer n valeurs particulières de θ. Donc, &c. (23)

Démonſtration du Théorème XLII.

(64.) En effet, ſi l'équation étoit, par exemple, du troiſième ordre, & que $A\theta'$, & $B\theta'$, fuſſent les deux valeurs données, on trouveroit en faiſant par notre méthode $\theta = A\theta'z$, que z ſeroit conſtant, en ſorte que dz, d^2z, & d^3z, ſeroient égaux à zéro, & la transformée ſe réduiroit à $0 = 0$; équation d'où l'on ne pourroit tirer aucune nouvelle valeur de z. Sur quoi on obſervera que toutes les fois qu'on a une valeur θ' qui ſatisfait à l'équation privée de ſon dernier terme $\xi\,dz^n$, la quantité $A\theta'$ y ſatisfera de même, A étant une conſtante quelconque; d'où il s'enſuit que θ', $A\theta'$, $B\theta'$, &c. n'indiquent réellement qu'une ſeule & même valeur. Il faut donc non-ſeulement que la valeur de θ' ſoit différente dans les expreſſions données de θ, mais que ces valeurs ne ſoient pas entr'elles en raiſon conſtante.

Démonſtration

Démonstration du Théorème XLIII.

(65.) Soit d'abord $dp + \sigma p dx = 0$, & p' une valeur de p qui y satisfasse; en faisant $p = p'k$, substituant & réduisant, on aura $p'dk = 0$, ou k constant. Donc la valeur générale & complette de p est Ap'.

(66.) Soit maintenant $ddu + \xi du dx + X u dx^2 = 0$, & soient u', u'' deux valeurs qui y satisfassent; en faisant $u = u'z$, on aura une transformée $ddz + X' dz dx = 0$, dans laquelle une des valeurs de z sera $\frac{u''}{u'}$; donc une des valeurs de $\frac{dz}{dx}$ est $\frac{d\left(\frac{u''}{u'}\right)}{dx}$; donc (*art. précéd.*) la valeur générale de $\frac{dz}{dx}$ est $A\frac{d\left(\frac{u''}{u'}\right)}{dx}$; donc en géneral $z = \frac{Au''}{u'} + B$; donc $u = Au'' + Bu'$.

(67.) De même si on a $d^3u + \xi ddu dx + \zeta du dx^2 + X u dx^3 = 0$, qu'on ait trois valeurs de u, savoir u', u'', u''', & qu'on fasse $u = u'z$, on aura (*Mém. de Turin, tome III, p. 381*) une transformée $d^3z + \xi' dz^2 dx + \zeta' dz dx^2 = 0$, dans laquelle z a deux valeurs connues $\frac{u''}{u'}$, $\frac{u'''}{u'}$; & par conséquent $\frac{dz}{dx}$, deux valeurs connues $\frac{d\left(\frac{u''}{u'}\right)}{dx}$, $\frac{d\left(\frac{u'''}{u'}\right)}{dx}$. Donc la valeur générale de $\frac{dz}{dx}$ sera $A\frac{d\left(\frac{u''}{u'}\right)}{dx} + B\frac{d\left(\frac{u'''}{u'}\right)}{dx}$; donc $z = \frac{Au''}{u'} + \frac{Bu'''}{u'} + C$. Donc $u = Au'' + Bu''' + Cu'$.

(68.) Il eſt viſible que cette démonſtration s'étend aux équations ſupérieures. Donc, &c.

Démonſtration du Théorème XLIV.

(69.) Soit $\theta = \vartheta + \omega$, on aura évidemment n valeurs de ω qui ſatisferont à l'équation privée de ſon dernier terme, & ces valeurs ſeront évidemment $\theta' - \vartheta$, $\theta'' - \vartheta$, &c. Donc la valeur générale de ω ſera $A(\theta' - \vartheta) + B(\theta'' - \vartheta) + C(\theta''' - \vartheta)$, &c. Donc, &c.

Démonſtration du Théorème XLV.

(70.) Il eſt clair qu'on aura $m - 1 + p - 1 + q - 1 + r - 1$, &c. valeurs qui ſatisferont à l'équation privée de ſon dernier terme. Donc, puiſque ces valeurs doivent être au nombre de $n - 1$, au moins pour rendre l'intégration générale poſſible dans le cas propoſé *(Mém. de Turin, tome III)*; il s'enſuit évidemment que ſi s eſt le nombre des quantités m, p, q, r, &c. on doit avoir $m + p + q + r \ldots\ldots = n + s - 1$. Donc, &c. *(24)*

Démonſtration du Théorème XLVI.

(71.) La valeur générale de u dans l'équation $du + uZdz + \xi Z'dz = 0$ eſt donnée par l'équation $uc^{\int Zdz} + \int \xi \times Z'c^{\int Zdz} = B$; donc la valeur générale de u, en ſuppoſant $\xi = 0$, eſt $A'c^{-\int Zdz}$; or cette valeur générale eſt $B'\vartheta$. Donc, $c^{\int Zdz} = \frac{A}{\vartheta}$. Donc, &c.

Démonſtration du Théorème XLVII.

(72.) Soient θ', θ'' les deux valeurs qui ſatisfont à l'équation $dd\theta + Zd\theta dz + \xi\theta dz^2 = 0$, & ſoit $\theta = \theta'\omega$, nous aurons pour transformée *(Mém. de Turin, tome III, p. 381)* $2d\theta'd\omega + \theta'dd\omega + Z\theta'd\omega dx + \xi dz^2 = 0$, ou $dd\omega + d\omega\left(\frac{2d\theta'}{\theta'} + Zdx\right) + \frac{\xi dz^2}{\theta'} = 0$; donc,

puisque $\frac{\theta''}{\theta'}$ est une valeur de ω, & par conséquent $\frac{d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)}{dz}$ une valeur de $\frac{d\omega}{dz}$, la valeur générale de $\frac{d\omega}{dz}$ sera *(art. précéd.)* $\frac{d\omega}{dz} = \frac{D\,d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)}{dz} - \frac{d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)}{dz}\int\frac{\xi\,dz}{\theta' d\left(\frac{\theta''}{\theta}\right)}$; donc l'intégrale complette est $\omega = A + \frac{D\theta''}{\theta'} - \frac{\theta''}{\theta'}\int\frac{\xi\theta' dz^2}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'} + \int\frac{\xi\theta'' dz^2}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}$; donc la valeur générale & complette de θ est $A\,\theta' + D\,\theta'' - \theta''\int\frac{\theta'\xi\,dz^2}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'} + \theta'\int\frac{\xi\theta'' dz^2}{\theta' d\theta' - \theta'' d\theta'}$. On peut même supprimer les deux premiers termes, en supposant que les quantités qui sont sous le signe $\int$ ne soient pas $= 0$, quand $z = 0$, mais renferment chacune une constante arbitraire *(25)*.

Démonstration du Théorème XLVIII.

(73.) Soit $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{bx^q dy}{dx} + \frac{a\,dy}{x\,dx} + eyx^{q-1} = 0$; & soit supposé $y = Ax^r + Bx^{r+p} + Cx^{r+2p}$, &c. on aura la transformée $[Ar \times (r-1) + Aar]\,x^{r-2} + [B(r+p)(r+p-1) + Ba(r+p)]\,x^{r+p-2} + [C(r+2p)(r+2p-1) + Ca(r+2p)] \times x^{r+p-3}$, &c. $+ (Abr + Ae)\,x^{r+q-1} + [Bb(r+p) + Be]\,x^{r+p+q-1} + [Cb(r+2p) + Ce] \times x^{r+2p+q-1}$, &c. $= 0$. Équation dans laquelle on peut faire différentes suppositions.

(74.) On peut supposer en premier lieu que le 1.er terme de la seconde partie réponde au 1.er terme de la première, ce qui ne pourra arriver que dans le seul cas de $q = -1$; d'où l'on tire pour ce cas particulier $r(r-1) + ar +$

$br + e = 0$, & $(r + p)(r + p - 1) + b(r + p) + e = 0$. Donc, on aura deux valeurs de r, que j'exprime ainſi $P \pm \sqrt{Q}$, & deux valeurs de $r + p$ qui ſeront les mêmes, & que j'exprime auſſi par $P \pm \sqrt{Q}$; d'ailleurs A & B ſeront ce qu'on voudra, & les autres coëfficiens C, D, &c. à l'infini, devront être ſuppoſés égaux à zéro. Donc $y = Ax^{P + \sqrt{Q}} + Bx^{P - \sqrt{Q}}$; de-là il eſt aiſé de conclure que $y = A'x^{P + \sqrt{Q}} + B'x^{P - \sqrt{Q}}$ eſt la valeur générale & complette de y, puiſque $x^{P + \sqrt{Q}}$ & $x^{P - \sqrt{Q}}$ en ſont deux valeurs particulières.

(75.) Ce cas eſt celui de l'équation $\frac{ddy}{dx^2} + \frac{fdy}{xdx} + \frac{ey}{x^2} = 0$, qui en faiſant $y = c^{\int pdx}$, ſe change en $dp + ppdx + \frac{fpdx}{x} + \frac{edx}{x^2} = 0$, laquelle devient homogène en faiſant $u = z^{-1}$, & par conſéquent intégrable. Nous ne nous arrêterons donc pas au cas de $q = -1$.

(76.) Suppoſons en ſecond lieu que le 1.[er] terme de la ſeconde partie ſoit mis ſous le 2.[d] terme de la première, & on trouvera 1.° $p - 2 = q - 1$, ou $p = q + 1$. 2.° Le coëfficient A ſera tel qu'on voudra dans l'équation $Aar + Ar(r - 1) = 0$, qui donne ou $r = 0$, ou $r - 1 + a = 0$, c'eſt-à-dire, $r = 1 - a$. 3.° Il eſt aiſé de voir que le coëfficient d'un terme quelconque du rang k ſera égal au précédent pris avec un ſigne contraire, & multiplié par ..... $\frac{b[r + p(k - 2)] + e}{(r + pk - p)(r + pk - p - 1 + a)}$. D'où il eſt évident que la ſérie ſera finie ſi $br + pb(k - 2) + e$ eſt $= 0$; c'eſt-à-dire, ſi $\frac{-e - br}{bp}$ eſt $=$ à un nombre entier poſitif $k - 2$ en y comprenant zéro, car k ne ſauroit être ſuppoſé < 2. Or nous avons 1.° $p = q + 1$;

2.° $r = 0$, ou $r = 1 - a$; donc il faudra, ſi on prend $r = 0$, que $-\frac{e}{b(q+1)}$ ſoit un nombre entier poſitif; & ſi on prend $r = 1 - a$, que $\frac{-e-b+ba}{b(q+1)}$ ſoit égal à un nombre entier poſitif.

(77.) Faiſons en troiſième lieu égal à zéro le 1.er terme de la ſeconde partie ſeul, & mettons le 2.d terme de cette ſeconde partie ſous le 1.er de la première; & ainſi de ſuite, on aura 1.° $A =$ à tout ce qu'on voudra; 2.° $br + e = 0$, & $r = -\frac{e}{b}$; 3.° $p + q = -1$ ou $p = -q - 1$; 4.° un coëfficient quelconque ſera égal au précédent, pris négativement, & multiplié par $\frac{[r+p(k-2)][r+p(k-2)-1+a]}{b[r+p(k-1)]+e}$, ou (à cauſe de $br + e = 0$) par $\frac{[r+p(k-2)][r+p(k-2)-1+a]}{bp(k-1)}$. Donc à cauſe de $p = -q - 1$, chaque coëfficient ſera $=$ au précédent, multiplié par $\frac{[r+p(k-2)][r+p(k-2)-1+a]}{b(q+1)(k-1)}$.

Dans le cas de $q = -1$, cette formule ne peut ſervir, le dénominateur devenant infini, mais nous avons donné plus haut l'analyſe de ce cas. Dans les autres, la formule ſe terminera ſi $\frac{r}{p}$ eſt $=$ à un nombre entier négatif $-k+2$, en y comprenant zéro, ou ſi $\frac{r-1+a}{p}$ eſt égal à $-k+2$; d'où l'on tire $\frac{-e}{b(q+1)}$, ou bien $\frac{-e-b+ba}{b(q+1)}$ égal à un nombre entier poſitif, en y comprenant zéro. Or il eſt clair que ces conditions ſont les mêmes que celles du cas précédent. *(art. 76)*.

(78.) De plus il n'eſt pas difficile de voir que les ſéries ſeront les mêmes dans les deux cas, lorſqu'elles ſont finies, avec cette ſeule différence, qu'elles ſeront à contre-ſens l'une de

l'autre, c'est-à-dire, que le 1.er terme de la série dans le premier cas sera le dernier dans le second, &c. En effet, si dans le premier cas on suppose, par exemple, $r = 0$, le 1.er terme de la série sera $Ax^0 = A$; & dans le second cas, si on suppose $\frac{-e}{b(q+1)}$ = à un nombre entier positif k, on aura pour dernier terme de la série $Mx^{-\frac{e}{b}+pk}$, ou bien $Mx^{-\frac{e}{b}-k(q+1)} = Mx^0 = M$. Et si on suppose dans le premier cas $r = 1 - a$, & $\frac{-e-b+ba}{b(q+1)}$ = à un nombre entier positif k, le 1.er terme sera Ax^{1-a}, & dans le second cas, le dernier terme sera toujours $Mx^{-\frac{e}{b}-kp}$, ou bien $Mx^{-\frac{e}{b}-k(q+1)} = Mx^{1-a}$. Donc, &c. *(26)*

Démonstration du Théorème XLIX.

(79.) On la trouvera dans le *§. III* qui suit.

§. III.

Contenant quelques autres recherches sur l'intégration des équations différentielles.

Il nous reste encore à démontrer *le Théor. XLIX des Mém. de 1767.* Nous donnerons cette démonstration à la fin du présent paragraphe, que nous destinons à des recherches encore plus générales que les précédentes sur l'intégration des équations différentielles.

(80.) Soit l'équation différentielle $dx + \alpha dy = 0$, & supposons que l'équation $\varphi(x, y) = 0$ y satisfasse; je dis que si on prend la différentielle $Mdx + Ndy$ de cette fonction $\varphi(x, y)$, & que $-M\alpha + N$ soit telle que tout s'y détruise, l'intégrale générale & complette sera $\varphi(x, y) = C$ constante

quelconque. En effet, cette dernière équation donne $Mdx + Ndy = 0$; & $M\alpha = N$ est une équation identique. Donc $Mdx + M\alpha dy$ est une différentielle complette, dont l'intégrale complette est $\phi(x, y) = C$. La différence des intégrales particulières aux intégrales absolues & complettes, c'est qu'en différentiant les premières, & substituant au lieu de dx sa valeur $- \alpha dy$, on a une équation qui peut n'être pas identique, mais qui doit s'accorder avec l'intégrale supposée; au lieu que dans le cas de l'intégrale générale, l'équation qu'on a après la substitution de $- \alpha dy$ au lieu de dx dans les différentielles, doit être identique. En effet, cette équation (qui ne renferme point la constante C) doit être aussi générale que l'intégrale $\phi(x, y) = C$, c'est-à-dire, qu'elle doit être vraie quel que soit C; ce qui ne peut être qu'en la supposant identique.

(81.) Toute équation $\phi(x, y) = 0$, dans laquelle il se trouvera une constante de plus que dans l'équation différentielle $dx + \alpha dy$, & qui satisfera à cette équation, en sera l'intégrale absolue & complette.

Cela se voit aisément par l'article précédent, lorsque l'intégrale est de cette forme $\phi(x, y) - C = 0$, & que la constante C se trouve seule dans un terme; mais, lorsqu'elle est mêlée avec d'autres termes, & qu'il est difficile, ou même souvent impossible de la dégager, on différentiera l'équation, & on y mettra pour dx sa valeur $- \alpha dy$, ce qui donnera une équation entre C, x, y, α; cette équation & l'intégrale donnée serviront à avoir par les méthodes connues une équation linéaire de C en x, y, α, ou, ce qui revient au même, en x, y, puisque α est une fonction de x & de y. Différentions cette équation linéaire en C, nous aurons une équation de laquelle C disparoîtra, & qui en y substituant $- \alpha dy$ pour dx, doit être identique *(27)*.

(82.) Ayant l'équation $\phi(x, y) = 0$, qui renferme la constante C, on peut trouver aisément une infinité d'autres équations qui renferment en apparence tant de constantes arbitraires qu'on voudra, & qui soient aussi l'intégrale générale de l'équation $dx + \alpha dy = 0$.

En effet, ſoit $X = C$ l'intégrale abſolue, X étant une fonction de x & de y, on aura d'abord $\varphi\,(X) = C$ pour une autre intégrale encore plus générale. De plus, comme la conſtante C eſt arbitraire, & peut être tout ce qu'on voudra, ſoit formée une fonction quelconque de $\varphi\,(X)$ qui renferme tant de conſtantes qu'on voudra, & ſoit fait cette fonction $= 0$, il eſt évident qu'il en réſultera $\varphi\,(X) =$ à différentes conſtantes, & par conſéquent autant d'intégrales de la propoſée. Donc, &c. *(28)*

(83.) Si on a une équation différentielle du ſecond ordre, & que l'intégrale contienne deux conſtantes arbitraires, elle ſera l'intégrale abſolue & complette. En effet, ſoit différenciée deux fois cette intégrale, on aura trois équations, ſavoir l'intégrale & ſes deux différentielles, qui contiendront les deux conſtantes. On pourra donc, par les méthodes connues, faire diſparoître ces deux conſtantes, & on aura une équation différentielle qui devra être néceſſairement identique avec l'équation différentielle donnée. Car qu'on faſſe diſparoître ddy de ces deux équations, on aura une équation en $\frac{dy}{dx}$ qui ne contiendra point de conſtantes, & qui doit être identique pour s'accorder avec la différentielle du premier ordre de l'équation intégrale donnée, laquelle renferme au moins une conſtante. Donc, &c. *(29)*

(84.) Toute équation de cette forme $dp + \sigma p\,dx + p^2 \xi\,dx + X\,dx = 0$, σ, ξ, X étant des fonctions de x, peut ſe réduire à la forme $ddz + \varrho\,dz\,dx + z\vartheta\,dx^2 = 0$, dx étant conſtant, & ϱ, ϑ des fonctions de x; car il n'y a qu'à ſuppoſer $p = \frac{dz}{z\xi\,dx}$, ce qui donne $ddz + dz\,dx\,(\sigma - \frac{d\xi}{\xi dx}) + z\xi X\,dx = 0$, d'où $\varrho = \sigma - \frac{d\xi}{\xi dx}$, & $\vartheta = \xi X$ *(30)*

Donc ſi on a deux valeurs de p, ſavoir θ, θ', on aura auſſi deux valeurs de z, ſavoir $c^{\int \theta \xi dx}$ & $c^{\int \theta' \xi dx}$; donc la valeur générale de z eſt $A'\,c^{\int \theta \xi dx} + B'\,c^{\int \theta' \xi dx}$, A' & B' étant des conſtantes

constantes quelconques; donc la valeur générale de p ou $\frac{dz}{z\xi dx}$ est $\frac{A'\theta + B'\theta'}{A'c^{\int\theta\xi dx} + B'c^{\int\theta'\xi dx}}$.

Ce problème a déjà été résolu par M. Euler *(Nouv. Mém. de Péterfbourg, Tome VIII)*, mais par une voie toute différente de celle-ci *(31)*.

(85.) Soit l'équation $dy + yydx + X'dx = 0$; & soit supposé $y = X + Y\sqrt{-1}$, X & Y étant des fonctions réelles de x & de y; on aura $dX + (XX - YY)dx + X'dx + 2XYdx\sqrt{-1} + dY\sqrt{-1} = 0$. Et par conséquent 1.° $dY + 2XYdx = 0$ ou $Y = Ac^{-2\int Xdx}$ ou $X = -\frac{dY}{2Ydx}$. 2.° $dX + (XX - YY)dx + X'dx = 0$; d'où l'on voit que si $X' = -\frac{dX}{dx} + YY - XX$, on aura une valeur particulière de y qui sera l'intégrale de l'équation, & que par conséquent on pourra l'intégrer en général & absolument.

(86.) Soit, par exemple, $Y = Ax^n$, A & n étant des constantes quelconques, on aura $X = -\frac{n}{2x}$; $-dX = -\frac{ndx}{2x^2}$ & X' ou $-\frac{dX}{dx} + YY - XX = \frac{(-2n - n^2)}{4x^2} + A^2x^{2n}$; d'où l'on voit que toute équation réductible à cette forme $dy + yydx + \frac{Bdx}{x^2} + Cx^q dx = 0$ est intégrable, pourvu que B soit $= -\frac{q}{4} - \frac{qq}{4 \times 4}$, C étant positif *(32)*.

(87.) Soit encore $Y = A(k + \beta x^n)^m$, on aura $X = \frac{-m\beta n x^{n-1}}{2(k + \beta x^n)}$, & $X' = A^2(k + \beta x^n)^{2m} +$

$[2km\beta n \times (n-1)x^{n-2} + 2m\beta\beta n \times (n-1)x^{2n-2} - 2m\beta\beta nnx^{2n-2} - mm\beta\beta n^2 x^{2n-2}] : 4(k+\beta x^n)^2 = A^2(k+\beta x^n)^{2m} + [2km\beta n \times (n-1) \times x^{n-2} - [m\beta\beta n(2+mn)]x^{2n-2}] : 4(k+\beta x^n)^2.$

Soit, par exemple, $n = 1$, & l'équation $dy + yydx + A^2 dx \times (k+\beta x)^{2m} - \frac{m\beta\beta(2+m)dx}{4(k+\beta x)^2} = 0$, fera intégrable; & ainfi d'un très-grand nombre d'autres.

(88.) Soit en général $Y = u^{-1}$, on aura $X = \frac{du}{2udx}$; & $X' = \frac{-2uddu + du^2}{4u^2dx^2} + \frac{1}{u^2}$. Donc fi $u = 'A(\alpha + \beta x + \gamma xx)$, on aura $X' = \frac{-4\alpha\gamma + \beta^2 + 4A^{-2}}{4(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2}$, $'A$ pouvant être tout ce qu'on voudra (33).

(89.) Si au lieu de fuppofer $y = X + Y\sqrt{-1}$, on prenoit $y = X + Y$, & qu'on fuppofât $dY + 2XYdx = 0$, ce qui eft permis, à caufe des deux indéterminées X, Y, on auroit dans la valeur de X', la quantité $-YY$ au lieu de $+YY$; ce qui fourniroit de nouveaux Théorèmes. On verroit, par exemple, que dans l'équation de l'*art.* 86, $dy + yydx + \frac{Bdx}{x^2} + Cx^q dx = 0$, C peut être négatif.

(90.) En général, foit $dy + \xi yydx + \zeta ydx + 'X'dx = 0$, & foit $X + Y = y$, Y étant réel ou imaginaire fimple; fi l'on fait $dY + (2\xi XY + \zeta Y)dx = 0$, ou $X = -\frac{dY}{2\xi Ydx} - \frac{\zeta}{2\xi}$, on aura pour condition d'intégrabilité, $X' = -\frac{dX}{dx} - \xi XX - \xi YY$

$= \zeta X = d\left(\frac{dY}{2Y\xi dx} + \frac{\zeta}{2\xi}\right) - \xi YY - \frac{1}{\xi}$ $\times\left(\frac{dY}{2Ydx} + \frac{\zeta}{2}\right)^2 + \zeta\left(\frac{dY}{2Y\xi dx} + \frac{\zeta}{2\xi}\right)$.

(91.) Soit $\frac{dy}{dx} + \frac{Ex^p}{\alpha + \beta x^r + \gamma x^{r+s}} + Fy^2 x^k +$ $X' = 0$, & soit supposé $y = \frac{Dx^m + Cx^q}{\alpha + \beta x^r + \gamma x^{r+s}}$, la substitution de cette valeur de y, donnera dans les trois premiers termes, pour dénominateur $(\alpha + \beta x^r + \gamma x^{r+s})^2$; & pour numérateur $m\alpha Dx^{m-1} + m\beta Dx^{r+m-1}$; $m\gamma Dx^{r+s+m-1} - r\beta Dx^{r+m-1} - \gamma(r+s)\times$ $Dx^{r+s+m-1} + q\alpha Cx^{q-1} + q\beta Cx^{r+q-1}$ $+ q\gamma Cx^{r+s+q-1} - r\beta Cx^{r+q-1} - (r+s)\times$ $\gamma Cx^{r+s+q-1} + E\alpha x^p + E\beta x^{r+p} +$ $E\gamma x^{r+s+p} + FDDx^{2m+k} + 2FDCx^{m+q+k}$ $+ FCCx^{2q+k}$;

Soit $p = q - 1$; $m + k = -1$; $q + k$ $= r + s - 1$, on aura $q = p + 1$; $k = r +$ $s - p - 2$; $m = -r - s + p + 1$, & le numérateur précédent deviendra $(m\alpha D + FDD)x^{m-1}$ $+ (Dm\beta - r\beta D)x^{r+m-1} + [E\alpha + q\alpha C +$ $\gamma mD - \gamma(r+s)D + 2FDC]x^p + (qC\beta$ $- rC\beta + E\beta)x^{r+q-1} + (\gamma qC - \gamma(r+s)C$ $+ E\gamma + FCC)x^{r+s+q-1}$.

(92.) Soit donc supposé $X' =$ à une fraction dont le numérateur soit la quantité précédente avec le signe $-$, & le dénominateur $(\alpha + \beta x^r + \gamma x^{r+s})^2$, & soit de plus pris $k = r + s - p - 2$, & l'équation sera intégrable. Par exemple, on peut supposer $\alpha = 0, D = 0, X' = [-((p+1)\times$ $C\beta - rC\beta + E\beta)\, x^{r+p} - ((p+1)\gamma C -$ $\gamma(r+s)C + E\gamma + FCC)\, x^{r+s+p}] : (Bx^r + \gamma x^{r+s})^2$.

ou plus simplement $X' = [Qx^{-r+p} + Sx^{-r+s+p}]: (\beta + \gamma x^s)$, Q & S ayant certaines conditions.

Soit donc l'équation $dy + Fy^2 x^{r+s-p-2} dx + [Qx^{-r+p} + Sx^{-r+s+p}] dx : (\beta + \gamma x^s)^2 = 0$; on prendra $y = \frac{Cx^{p+1}}{\beta x^r + \gamma x^{r+s}}$ & l'équation sera intégrable, pourvu qu'on ait $Q + (p+1)C\beta - rC\beta = 0$, & $S + (p+1)\gamma C - \gamma C(r+s) + FCC = 0$.

(93.) Soit $-r+p = \omega$, $r+s-p-2 = \mu$, la proposée deviendra $dy + Fy^2 x^\mu dx + \frac{Qx^\omega + Sx^{\omega+s}}{(\beta+\gamma x^s)^2} dx = 0$, & on aura $r = p - \omega$, $\mu = s - \omega - 2$; $C = -\frac{Q}{\beta(p+1-r)} = -\frac{Q}{\beta(\omega+1)}$; & $S + (\omega + 1 - s) \times -\frac{\gamma Q}{\beta(\omega+1)} + \frac{FQQ}{\beta\beta(\omega+1)^2} = 0$. Si donc cette dernière équation de condition a lieu entre les coëfficiens S, Q, β, γ, & les exposans ω, s, l'équation proposée sera intégrable, μ étant $= s - \omega - 2$, & il faudra prendre pour l'intégration absolue $y = -\frac{Qx^{\omega+1}}{\beta(\omega+1)(\beta+\gamma x^s)} + z$.

(94.) Soit encore $D = 0$, $q = 0$ (ce qui donne $p = -1$), $E = 0$, on prendra $X' = [rC\beta x^{r-1} + (\gamma(r+s)C - FCC)x^{r+s-1}] : (\alpha + \beta x^r + \gamma x^{r+s})^2$; & l'équation proposée se changera en $dy + Fy^2 x^{r+s-1} dx + [Qx^{r-1} + Sx^{r+s-1}] dx : (\alpha + \beta x^r + \gamma x^{r+s})^2 = 0$; équation intégrable, pourvu qu'on ait $-rC\beta + Q = 0$, & $-S + \gamma C(r+s) - FCC = 0$, c'est-à-dire, $-S + \frac{\gamma(r+s)Q}{\beta r} - \frac{FQQ}{\beta^2 rr} = 0$. Si cette dernière condition est observée, on n'aura qu'à prendre

pour intégrale $y = \frac{Q}{r\beta(\alpha + \beta x^r + \gamma x^{r+1})} + z$; & l'on aura dans ce cas, ainsi que dans celui de l'article précédent, une équation en z de la forme $dz + \xi z dx + \zeta z^2 dx = 0$; dont on aura l'intégrale par les méthodes connues.

(95.) Il seroit assez facile, comme on le voit aisément, de pousser cette méthode plus loin, & d'augmenter le nombre de ces formules intégrables, mais en voilà assez pour mettre sur la voie ceux qui voudront aller plus loin. Passons à quelques autres recherches.

(96.) Il est aisé de voir que toute quantité de cette forme; $X d^p u = d(X d^{p-1} u) - dX d^{p-1} u = d(X d^{p-1} u) - d(dX d^{p-2} u) + d(ddX d^{p-3} u) - d(d^3 X d^{p-4} u) \ldots \pm u d^p X$, savoir $+$ si p est pair, & $-$ si p est impair.

(97.) Soit donc proposé d'intégrer l'équation $d^p u + \xi d^{p-1} u dx + \zeta d^{p-2} u dx^2 \ldots + \chi u dx^p = 0$. Et soit multipliée cette équation par X, elle se changera en $d(X d^{p-1} u) - d(dX d^{p-2} u)$, &c. $+ d(\xi X d^{p-2} u) dx - d[d(\xi X) d^{p-3} u] dx$, &c. $+ d(\zeta X d^{p-3} u) dx^2 - d[d(\zeta X) d^{p-4} u] dx^2$, &c. $\pm u d^p X \mp u d^{p-1}(\xi X) dx \pm u d^{p-2}(\zeta X) dx^2$, &c. $= 0$. D'où il est visible qu'on pourra abaisser l'équation proposée à une équation d'un degré moindre, si on prend X telle que $d^p X \mp d^{p-1}(\xi X) dx \pm d^{p-2}(\zeta X) dx^2 \mp$, &c. $= 0$. C'est-à-dire si $d^p X \mp (\xi d^{p-1} X + (p-1) d^{p-2} X d\xi \frac{(p-1)\times(p-2)}{2} \times d^{p-3} X dd\xi +$ &c. $dx \pm (\zeta d^{p-2} X + (p-2) \times d\zeta d^{p-3} X +$, &c.$) dx^2 = 0$.

(98.) On trouvera de la même manière que si on propose d'intégrer ou du moins de réduire à un ordre inférieur l'équation $\zeta d^p u + \xi d^{p-1} u dx + \xi' d^{p-2} u dx^2 +$, &c. $= 0$, la question se réduira à trouver une quantité X telle que

$\pm d^p (X\zeta) \mp d^{p-1} (\xi X) dx \pm d^{p-2} (\xi' X) dx^2$ $\mp$, &c. ſoit $= 0$ (33).

(99.) Soit $\zeta ddu + \xi du dx + \xi' u dx^2 = 0$; on aura $d^2 (X\zeta) - d(X\xi) dx + X\xi' dx^2 = 0$; ſoit $X\xi' = \frac{ad(X\xi)}{dx}$, on aura $\frac{d^2 (X\zeta)}{dx} + (a - 1) \times d(\xi X)$ $= 0$; & par conſéquent $d(X\zeta) + (a - 1) \times X\xi dx +$ $b dx = 0$. Cette équation donnera une valeur de X, qui renfermera une conſtante arbitraire, & qui étant comparée à l'autre valeur de X, réſultante de l'équation $X\xi' = \frac{ad(X\xi)}{dx}$; laquelle renferme auſſi une conſtante arbitraire, donnera une équation de condition entre ζ, ξ & ξ', qui renfermera deux conſtantes arbitraires, ſans y comprendre la troiſième conſtante arbitraire a (34).

(100.) On peut dans ces calculs, ſuppoſer $\zeta = 1$; ce qui les rendra plus ſimples.

(101.) On voit auſſi, en faiſant $\zeta = 1$, que l'intégrale de $ddu + \xi du dx + \xi' u dx^2 = 0$, ſe réduit à celle de $ddX - \xi dX dx + X(\xi' - \frac{d\xi}{dx}) dx^2 = 0$ (35).

(102.) Soit propoſé d'intégrer l'équation $dd(z\xi) +$ $z\zeta dx^2 + \varrho z ddx + X dz dx = 0$, dans laquelle σdx eſt ſuppoſé conſtant, σ étant une fonction donnée de x; on fera $\sigma dx = dt$, d'où $dx = T dt$; & on aura une équation de la forme ſuivante, $dd(zT) + zT' dt^2 + T'' dz dt = 0$; ce qui renferme le cas du *tome IV de nos Opuſcules, p. 270.*

(103.) Il ſeroit bon d'examiner quelle forme on doit ſuppoſer à σ pour que la réduite ſoit intégrable, c'eſt-à-dire, pour qu'en faiſant $z = c^{\int p dt}$ ou $c^{\int p \sigma dx}$, la transformée ſoit intégrable.

(104.) Prenons le cas ſimple $dd(z\xi) = zXdx^2$, ζdx étant conſtant, on aura $dd(z\xi) = \frac{zX(\zeta^2dx^2)}{\zeta^2}$, & ſuppoſant $z\xi = p$, $ddp = \frac{pX(\zeta dx)^2}{\zeta^2\xi}$; ſoit $p = c^{\int\omega\zeta dx}$; on aura $d\omega + \omega\omega\zeta dx = \frac{X\zeta dx}{\zeta^2\xi}$; or en ſuppoſant $\zeta dx = t$, il faut que $\frac{X}{\zeta^2\xi} = t^n$, n étant $= -\frac{4\mu}{2\mu\pm 1}$. Donc $\frac{X}{\zeta^2\xi} = (\int\zeta dx)^n$, donc en ſuppoſant $\int\zeta dx = t$, on aura $\zeta = \frac{dt}{dx}$, & $\frac{Xdx^2}{\xi dt^2} = t^n$, ou $dt \times t^{\frac{n}{2}} = \frac{\int dx\sqrt{X}}{\sqrt{\xi}}$. Donc $t = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{\frac{2}{2+n}} \int\left(\frac{dx\sqrt{X}}{\sqrt{\xi}}\right)^{\frac{2}{n+2}}$; donc $\frac{dx\sqrt{X}}{\sqrt{\xi}}\int\left(\frac{dx\sqrt{X}}{\sqrt{\xi}}\right)^{\frac{-n}{n+2}}$ doit être conſtant. Il faut remarquer qu'à la quantité $\int\frac{dx\sqrt{X}}{\sqrt{\xi}}$, on peut évidemment ajouter une conſtante $+ A$.

(105.) Soit à préſent $d(z\xi) + Xzdx^2 + \rho z ddx = 0$, on aura, en faiſant $\zeta dx = dt$ & conſtant, $ddx = -\frac{d\zeta dt}{\zeta^2} = -\frac{d\zeta \times (\zeta^2dx^2)}{\zeta^3 dx}$; & ſuppoſant $z\xi = p$, on aura $ddp + \frac{Xp(\zeta dx)^2}{\zeta\zeta\xi} + \frac{\rho p}{\xi} \times -\frac{(\zeta dx)^2 \times d\zeta}{\zeta^3 dx} = 0$; il faut donc que $\frac{X}{\zeta\zeta\xi} - \frac{\rho d\zeta}{\xi\zeta^3 dx} = (\int\zeta dx)^n$, n étant $= -\frac{4\mu}{2\mu\pm 1}$: Soit $\int\zeta dx = t$, on aura $\zeta = \frac{dt}{dx}$, & $d\zeta = -\frac{dt\,ddx}{dx^2}$; donc $t^n = \frac{Xdx^2}{\xi dt^2} + \frac{\rho ddx}{\xi dt^2}$; on tirera de cette équation la valeur de x en t, lorſque cela ſera poſſible *(36)*.

(106.) Si l'on avoit $ddz + \xi dzdx + Xzdx^2$

$+ \frac{\rho d z^2}{z} + \sigma z d d x = 0$, & qu'on supposât $\zeta d x$ constant; on écriroit ainsi l'équation $d d z + \frac{\xi d z}{\zeta} \times \zeta d x + \frac{X z}{\zeta \zeta} (\zeta d x)^2$ $+ \frac{\rho d z^2}{z \zeta^2 d x^2} (\zeta d x)^2 - \frac{\sigma z d \zeta}{\zeta^3 d x} \times (\zeta d x)^2 = 0$; ensuite faisant $z = c^{\int q d t}$, on auroit une transformée de cette forme $dq + K q d t + \lambda q q d t + X' d t = 0$; & on connoîtra par les cas d'intégrabilité de cette équation, ceux de la proposée, ce qui donnera une équation finale pour ζ. Par exemple, si $X' = 0$, l'équation en q seroit intégrable, & on auroit $\frac{X}{\zeta \zeta} - \frac{\sigma d \zeta}{\zeta^3 d x} = 0$, d'où l'on tire aisément ζ.

Démonstration du Théorème XLIX.

(107.) Soit prise pour exemple l'équation $d d t + N^2 t d z^2 + \alpha t \omega d z^2 = 0$, & $d d \omega + a \omega d z^2 = 0$. Différentions successivement plusieurs fois la première équation, & mettons pour $d d t$ & $d d \omega$ leurs valeurs, il est clair que par ces différentiations & substitutions successives, on n'aura jamais que des termes de cette forme $\alpha t \omega$, $\alpha t d \omega$, $\alpha \omega d t$, $\alpha d \omega d t$, parmi ceux qui ne seront affectés que de α. Donc avec autant d'équations différentielles qu'il sera nécessaire, on fera évanouir tous ces termes, & il ne restera que des termes de la forme $A d^n t d z^p$, & des termes affectés de t & de ω, & de leurs différences, mais qui auront pour facteur α^2. Différentiant de nouveau l'équation, & substituant pour $d d t$ & $d d \omega$ leurs valeurs, on en trouvera une nouvelle où les termes affectés de t & de ω ne seront plus multipliés que par α^3; & ainsi de suite. On voit aisément comment cette méthode s'applique au cas général & plus compliqué que le *Théorème XLIX* renferme (37).

NOTES

NOTES relatives au Mémoire précédent.

(1) On peut encore démontrer ces Théorèmes en considérant que $\text{fin.}(na + a) = \text{fin.}\,na\,\text{cof.}\,a + \text{cof.}\,na\,\text{fin.}\,a = \text{fin.}\,na \times \sqrt{(1 - xx)} + \text{cof.}\,na \times x$. D'où, en faisant successivement $n = 1, 2, 3$, &c. il est aisé de déduire les valeurs de fin. $2a$, cof. $2a$, fin. $3a$, cof. $3a$, &c. On peut remarquer encore que $d\,(\text{cof.}\,pv)$, par exemple, $= -pdv \times \text{fin.}\,pv$, & que $d\,\text{fin.}\,pv = pdv\,\text{cof.}\,pv$; d'où il est aisé de trouver fin. pv, si cof. pv est connu, & réciproquement.

(2) On peut démontrer par ce moyen le Théorème précédent, en mettant au lieu des sinus & cosinus, leurs expressions connues en exponentielles imaginaires. L'intégrale totale (*Lem. 2 & 3*) se réduira toujours à une quantité de cette forme $M + N\sqrt{-1}$, M & N étant des intégrales de fractions rationnelles réelles; & si l'intégrale totale doit être réelle, il arrivera nécessairement que les imaginaires se détruiront, & qu'on aura $N = 0$. Mais la méthode de l'*article 6* est plus simple, & par conséquent préférable.

(3) En effet, l'intégrale de $\frac{dz\,c^{gz}}{(z+\alpha)^m}$ est $-\frac{c^{gz}}{(m-1)(z+\alpha)^{m-1}} + \int \frac{g\,dz\,c^{gz}}{(m-1)(z+\alpha)^{m-1}}$; donc, &c.

(4) La quantité $Vdv \times a^{g(v^m)+b}$ pourroit encore s'intégrer de la même manière quand même V contiendroit des exposans fractionnaires de v, pourvu que ces exposans fractionnaires eussent p pour dénominateur; & dans tous ces cas, si V étoit sans dénominateur, l'intégration se réduiroit au cas du *Théorème III*.

(5) Voici encore deux Théorèmes qui sont analogues à celui-ci.

I. Toute quantité de cette forme $x^m\,dx\,(\log. x)^p$ étant supposée intégrable, toute quantité de la forme $x^m\,dx\,(\log. x^r)^p$ l'est aussi, r étant un exposant quelconque, puisque $(\log. x^r)^p = r^p\,(\log. x)^p$. A l'égard de $x^m\,dx\,(\log. x)^p$, si on fait $\log. x = z$, elle se changera en $z^p\,dz \times c^{mz+z}$, dont l'intégration se réduit à celle de $dz\,c^{(m+1)z}$ si p est positif, & à celle de $\frac{dz}{z}\,c^{(m+1)z}$ si p est négatif.

II. Toute quantité de cette forme $a^{g(z^n)} dz \times z^q (\log. z^r)^p$, se transforme, en faisant $z^n = u$, en $a^{gu} u^{\frac{q}{n} + \frac{1}{n} - 1} du \times \frac{r^p}{n^p}$ $\times \frac{1}{n} (\log. u)^p$; donc elle dépend de l'intégration de $a^{gu} \times u^{\frac{q+1}{n} - 1}$ $\times du \times (\log. u)^p$.

Soit $p = 1$, & $\frac{q+1}{n} - 1 = k$, cette dernière différentielle sera $a^{gu} \times u^k du \log. u$, qui, lorsque k est un nombre entier positif, dépend de $\int \frac{Vdu}{u}$, V étant l'intégrale de $u^k du \times a^{gu}$; d'où il est clair que l'intégration dépend de $u^p du \times a^{gu}$, p étant positif ou zéro, & de $\frac{a^{gu} du}{u}$, ou de $\frac{dx}{\log. x}$.

(6) Si p étoit pair & s impair, $\sqrt{(1 - xx)}$ disparoîtroit, & l'intégration par logarithmes n'auroit aucune difficulté. On remarquera de plus que fin. $(rv + \alpha)$, si r est pair, peut toujours se changer en cof. (rk), en prenant $90^d - rk = rv + \alpha$, ou $k = \frac{90^d - \alpha}{r} - v$; & que de même cof. $(rv + \alpha)$, r étant impair, peut se changer en fin. (rk); ce qui donne le moyen d'étendre beaucoup le *Théorème X*.

(7) La même intégration par simples logarithmes auroit encore lieu, comme il est aisé de le voir, 1.° si on multiplioit le dénominateur par D (fin. $v)^\nu \times P$ (cof. $v)^\sigma$, &c. ν, σ, étant des nombres entiers positifs. 2.° Si le dénominateur étoit $(A \text{ cof. } rv + B)^\mu$ $\times (P \text{ cof. } \lambda v + S)^\sigma$, &c. $\times D$ (fin. $v)^\nu$, ou $(A \text{ fin. } rv + B)^\mu$ $\times (P \text{ fin. } \lambda v + S)^\sigma$, &c. $\times D$ (cof. $v)^\nu$. 3.° Si au lieu de pv & qv, on avoit $pv + \alpha$ & $qv + \beta$, α & β étant des angles constans quelconques. En effet, dans tous ces cas les facteurs du dénominateur de la transformée seront de cette forme $(x + a)^\mu$, $(x + h)^\sigma$, x^ν ou $(1 - x)^k$, $(1 + x)^k$: donc, &c.

Il en sera de même de la différentielle $\frac{Vdv}{[B + A \begin{smallmatrix}\text{fin.}\\\text{cof.}\end{smallmatrix} (rv + \alpha)]^\mu}$, r, p.

s, &c. étant supposés, comme dans le *Théorème I*, reductibles à la forme $\frac{m A'}{n}$, $\frac{m' A'}{n}$, $\frac{m'' A'}{n}$, &c. pourvu 1.° que A^2 soit $=$ ou $> B^2$. 2.° Que m', m'', &c. soient $< \mu m$. On pourra même, au lieu de pv & de sv, mettre $pv + \beta$, & $sv + \delta$. Cela posé, au lieu de $rv + \alpha$, il faudra mettre $\frac{m A' v}{n} + \frac{m B'}{n}$, ($B'$ étant $= \frac{n \alpha}{m}$); ensuite faisant $\frac{A'v + B'}{n} = x$, on aura $pv + \beta = m' x + \beta - \frac{m' B'}{n}$; $sv + \delta = m'' x + \delta - \frac{m'' B'}{n}$, &c. Et par conséquent les sinus & cosinus de ces angles se réduiront à la forme C sin. $m' x + D$ cos. $m' x$, E sin. $m'' x + F$ cos. $m'' x$, &c. Donc, &c.

(ε) Il est bon d'observer que dans toutes les quantités précédentes, on peut au lieu de sin. v^2 mettre cos. v^2, puisque cos. v^2 se transforme en $1 -$ sin. v^2, & qu'ainsi $a + b$ sin. $v + c$ sin. v^2, par exemple, peut se transformer en $a' + b$ sin. $v + c'$ cos. v^2.

En finissant ces nouvelles recherches sur les intégrales réductibles à des arcs d'ellipse & d'hyperbole, je crois devoir remarquer que le P. Riccati avance sans fondement dans ses *Institutions analytiques, tome II, p. 191,* que personne avant lui n'avoit donné l'intégration de la formule $\frac{dz \sqrt{(f + gzz)}}{\sqrt{(p + qzz)}}$ par des arcs de sections coniques. En effet, la quantité $\frac{du \sqrt{(f + gu)}}{\sqrt{u} \times \sqrt{(p + qu)}}$ s'intègre évidemment par nos formules des *Mémoires de Berlin, 1746,* & se réduit à des arcs de sections coniques, puisqu'elle est égale à $\frac{f du}{\sqrt{u} \times \sqrt{(f + gu)} \times \sqrt{(p + qu)}} + \frac{g du \sqrt{u}}{\sqrt{(f + gu)} \times \sqrt{(p + qu)}}$; or (*Mém. Berlin. 1748, p. 274. art. XXV*) la proposée $\frac{dz \sqrt{(f + gzz)}}{\sqrt{(p + qzz)}}$ se réduit évidemment à $\frac{du \sqrt{(f + gu)}}{\sqrt{u} \times \sqrt{(p + qu)}}$ en mettant zz pour u. On peut encore supposer $f + gzz = u$, ce qui donnera pour transformée $\frac{du \sqrt{u}}{\sqrt{(a + bu + cuu)}}$, intégrable par nos méthodes, & réductible à des arcs de sections coniques.

Non - ſeulement la quantité $\frac{dz\sqrt{(f+gzz)}}{\sqrt{(p+qzz)}}$ eſt intégrable par des arcs de ſections coniques, mais on peut, en général, intégrer de même, & par les mêmes transformations, la quantité $z^t dz(f+gzz)^{\frac{m}{2}} \times (p+qzz)^{\frac{n}{2}}$, t, m, n, étant des nombres entiers poſitifs ou négatifs.

On trouvera de même que $\frac{dz\sqrt{(h+lzz)}}{a\sqrt{(f+gzz)}+b\sqrt{(p+qzz)}}$ eſt intégrable par de tels arcs, pourvu que l'on ait $a^2 g - b^2 q = 0$ ou $a^2 f - b^2 p = 0$; car il n'y a pour lors qu'à multiplier le haut & le bas de la fraction par $a\sqrt{(f+gzz)} - b\sqrt{(p+qzz)}$, & faire enſuite $zz = u$.

Il en ſera de même de $\frac{z^t dz(h+lzz)^{\frac{s}{2}}}{a(f+gzz)^{\frac{1}{2}}+b(p+qzz)^{\frac{1}{2}}}$ pourvu que t ſoit un nombre pair poſitif ou négatif, & s un nombre entier quelconque, poſitif ou négatif. Si t eſt impair, l'intégrale eſt plus ſimple.

On peut ſuppoſer $a = 1$ & $b = 1$, ſans rendre ces différentielles moins générales; c'eſt pourquoi les conditions d'intégrabilité ſeront $g - q = 0$, ou $f - p = 0$; c'eſt-à-dire, $g = q$ ou $f = p$.

Il en ſera de même encore de $\frac{z^t dz(h+lz)^{\frac{s}{2}}}{a(f+rz+gzz)^{\frac{1}{2}}+b(p+\omega z+qzz)^{\frac{1}{2}}}$

pourvu qu'en multipliant haut & bas par $a(f+rz+qzz) - b(p+\omega z+qzz)^{\frac{1}{2}}$, le dénominateur ſe réduiſe à un ſeul terme Bz^n, & que t ſoit un nombre entier poſitif = ou > n.

Il en ſera de même encore de $\frac{z^t dz}{a\sqrt{(f+rz+gzz+mz^3)}+b\sqrt{(p+\omega z+qzz+nz^3)}}$ pourvu qu'en multipliant le haut & le bas par $a\sqrt{(f+rz+qzz+mz^3)} - b\sqrt{(p+\omega z+qzz+nz^3)}$, le bas de la fraction ſe réduiſe à *un ſeul terme*, & que t ſoit un nombre entier poſitif, = ou > que l'expoſant de z dans *ce ſeul terme;* ce qui peut arriver dans un très-grand nombre de cas, ſur-tout ſi r, g, ω, q, ſont = 0.

On voit aisément que ces formules pourroient encore être poussées plus loin, mais c'en est assez pour mettre les Géomètres sur la voie.

Nous avons aussi donné *dans le IV.e vol. de nos Opuscules p. 275 & suiv. & dans le V.e p. 231 & 506*, d'autres différentielles réductibles à des arcs de sections coniques; ce qui ajoute beaucoup au grand nombre de celles que nous avons trouvées *dans les Mém. de Berlin de 1746 & 1748*.

(9) On peut faire usage de la méthode employée dans ces deux Théorèmes pour réduire en plusieurs cas la quadrature des courbes à des intégrales connues. Si, par exemple, l'équation d'une courbe étoit telle que xx fut $= Y + Y'\sqrt{(a + by + cyy)}$, Y & Y' étant des fonctions rationnelles de y, il est visible que sa quadrature se réduiroit à des fractions rationnelles. Lors donc qu'on aura l'équation d'une courbe algébrique en x & en y, on fera $x = a + \epsilon x' + \gamma y'$, & $y = b + \varepsilon x' + \varphi y'$, & on tâchera de déterminer les constantes a, b, &c. à être telles que la valeur de $x'x'$ en y' ou de $y'y'$ en x' donne la quadrature de la courbe, ou absolument, ou par les fractions rationnelles, ou par les arcs de sections coniques.

Soit, par exemple, l'équation du 3.e degré $x^3 + Ax^2y + Bxy^2 + Cy^3 + Gx^2 + Hy^2 + Lxy + Mx + Ny + F = 0$. Il est certain que si l'équation peut se réduire à la forme $\alpha' x'^3 + \epsilon' x'^2 y' + kx'y'^2 + \pi y'^3 + n x' + \omega y' = 0$, la courbe sera quarrable par l'intégration des fractions rationnelles. Or, en substituant pour x & y leurs valeurs $a + \epsilon x' + \gamma' y'$ & $b + \varepsilon x' + \varphi y'$, on trouvera que pour que la transformée dont il s'agit en x' & y' soit possible, il faut 1.° que $a^3 + Aa^2b + Bb^2a + Cb^3 + Ga^2 + Hb^2 + Lab + Ma + Nb + F = 0$. 2.° Qu'on ait les trois équations $(3a + Ab + G) \times \frac{\epsilon^2}{\varepsilon^2} + (2Aa + 2Bb + L)\frac{\epsilon}{\varepsilon} + 3Cb + Ba + H = 0$; $(3a + Ab + G)\frac{\gamma^2}{\varphi^2} + (2Aa + 2Bb + L)\frac{\gamma}{\varphi} + 3Cb + Ba + H = 0$; $(6a + 2Ab + 2G)\gamma + (2Aa + 2Bb + L) \times (\gamma\varepsilon + \epsilon\varphi) + (6Cb + 2Ba + 2H)\varphi\varepsilon = 0$. Faisant donc $3a + Ab + G = \lambda$, $Aa + Bb + \frac{L}{2} = \mu$, $3Cb + Ba$

$H = \nu$, on aura les trois équations $\lambda \frac{\beta^2}{\varepsilon^2} + 2\mu \frac{\beta}{\varepsilon} + \nu = 0$; $\lambda \frac{\gamma^2}{\varphi^2} + 2\mu \frac{\gamma}{\varphi} + \nu = 0$, & $\lambda \frac{\beta\gamma}{\varepsilon\varphi} + \mu \left(\frac{\gamma}{\varphi} + \frac{\beta}{\varepsilon}\right) + \nu = 0$.

Les deux premières équations donnent les mêmes valeurs pour $\frac{\beta}{\varepsilon}$ & $\frac{\gamma}{\varphi}$, & la troisième fait voir que si on prend pour $\frac{\beta}{\varepsilon}$ la valeur $-\frac{\mu}{\lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu\mu}{\lambda\lambda} - \frac{\nu}{\lambda}\right)}$, il faut prendre pour $\frac{\gamma}{\varphi}$ la valeur absolument semblable, & non celle où le radical auroit un signe différent; sans quoi cette troisième équation ne seroit pas vraie.

Ce n'est pas tout; une figure très-simple fera voir aisément *(voyez l'Analyse des Courbes de M. Cramer)* que si on nomme c l'angle que font entr'elles les x & les y, on aura, par la transformation des axes, $x'x' = \beta^2 x'^2 + \varepsilon^2 x'^2 \pm 2\varepsilon\beta x'^2 \text{cos}.\, c$; & $y'^2 = \gamma^2 y'^2 + \varphi^2 y'^2 \pm 2\varphi\gamma y'^2 \text{cos}.\, c$; d'où l'on voit que $\frac{\beta^2 + \varepsilon^2 - 1}{2\beta\varepsilon}$ doit être $= \frac{\gamma^2 + \varphi^2 - 1}{2\gamma\varphi}$ & que le quarré de chacune de ces quantités doit être $=$ ou $<$ 1. C'est une remarque très-essentielle à faire lorsqu'on veut transformer les axes d'une courbe; & cette remarque donnera les limites entre lesquelles les quantités β, ε, γ, φ, doivent être renfermées.

(10) C'est d'après ce principe de l'égalité de $z + dz + \text{d}z$ avec $z + \partial z + \delta z$, dont j'avois fourni l'idée à feu M. Clairaut, qu'il a donné dans les *Mém. de l'Acad. de 1740*, l'équation de condition, pour qu'une équation différentielle à trois variables ait une intégrale possible. Mais ni lui, ni personne que je sache, n'avoit encore considéré les équations à trois variables, dans lesquelles dx, dy, dz, sont élevées à des puissances quelconques, & mêlées, comme on voudra, entr'elles & avec les variables x, y, z. Notre méthode s'étend à ces équations quelque compliquées qu'elles soient. Il n'est pas même nécessaire qu'elles soient délivrées de radicaux. Il est vrai que pour arriver aux deux équations finales entre σ, x, y, z, & θ, x, y, z, il faudra délivrer de radicaux les équations A & B, & leurs différences, mais on sait que cela est toujours possible.

On peut remarquer que dans la différentielle de l'équation A, p & σ ne montent qu'au 1.er degré, & que dans celle de l'équation B, ω & θ ne montent aussi qu'au 1.er degré. Donc l'équation (C) combinée avec l'équation (B) donnera d'abord une équation entre σ, ω, x, y, z, que j'appelle (E); & l'équation (D) combinée avec l'équation (A) donnera une équation entre θ, p, x, y, z, que j'appelle (F); on fera évanouir ω & p des équations (E) & (F) par le moyen des équations (A) & (B); & on arrivera aux deux équations finales entre θ, x, y, z, & σ, x, y, z, qui doivent être identiques.

L'identité absolue de ces deux équations est nécessaire pour que la proposée ait, comme je l'ai dit, une intégrale *générale* possible; par la raison que cette intégrale *générale* contient nécessairement une constante arbitraire qui ne se trouve point dans les deux équations entre θ, x, y, z, & σ, x, y, z; & que néanmoins ces deux équations doivent avoir lieu en même temps que l'intégrale générale; ce qui ne peut être à moins que les deux équations ne soient identiques, c'est-à-dire, à moins que les valeurs de θ & de σ ne soient exprimées de la même manière en x, y, z. Mais il ne me paroît pas démontré, que les valeurs de θ & de σ doivent aussi être nécessairement identiques, lorsqu'il est question d'une intégrale particulière. Il suffit, ce me semble, qu'en supposant les valeurs de θ & de σ égales entr'elles, l'équation en x, y, z, qui en résultera, s'accorde avec l'intégrale particulière supposée. J'ai traité ce point plus à fond dans une lettre à M. de la Grange, imprimée dans les *Mém. de Berlin de 1763, p. 272*. On va voir dans les deux Théorèmes suivans, en ne supposant que deux variables, des intégrales particulières qui satisfont à une équation différentielle, quoique la différentiation de ces intégrales ne donne pas l'équation différentielle proposée.

On pourroit objecter que quand même $\frac{d\omega}{dx}$ ne seroit pas $=$ $\frac{dp}{dy}$, les quantités $\left(\frac{d\omega}{dx}dx\right)dy$ & $\left(\frac{dp}{dy}dy\right)dx$ ne différeroient que d'un infiniment petit du second ordre; d'où l'on seroit porté à conclure qu'en prenant dx & dy finies, les valeurs totales de z répondantes à $x + dx$ & à $y + dy$ ou à $y + dy$ & $x + dx$, ne différeroient que d'un infiniment petit du premier ordre, & par

conféquent feroient égales. Mais il faut remarquer que quand les différentielles premières de deux quantités variables diffèrent d'une quantité infiniment petite du fecond ordre, c'eft une marque que la différence des intégrales eft finie : par exemple, les différentielles $dy = a\,dx$ & $dy = a\,dx + 2\,x\,dx$, ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite du fecond ordre, quand x eft infiniment petite ; cependant en prenant x finie, les intégrales $a\,x$ & $a\,x + x\,x$ diffèrent d'une quantité finie.

(11) Soit donc $\varphi\,(P + Q - a)$ une fonction de $P + Q - a$, qui devienne $= 0$ quand $P + Q - a = 0$, (P & Q étant des fonctions quelconques de x & de y); je dis que fi on prend N & M tels que $N\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dx}\right) + M\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ}{dy}\right)$ foit $= L\,\varphi\,(P + Q - a)$, L étant une fonction quelconque de P & Q, qui ne devienne pas infinie quand $P + Q - a = 0$; l'équation $Mdx - Ndy = 0$ aura $P + Q = a$ pour une de fes intégrales. On remarquera qu'une des deux quantités N ou M peut être telle qu'on voudra.

(12) Cette règle me paroît plus fimple, plus générale & plus rigoureufement démontrée que celle qui a été donnée par M. Euler dans le favant Ouvrage que j'ai cité ; plus fimple, parce que je n'ai befoin que de l'infpection des termes de l'équation & des expofans de t, fans avoir recours aux fubftitutions & aux différentiations employées par ce grand Géomètre ; plus générale, parce qu'elle s'applique aux équations où du & dt font élevées à des puiffances quelconques, & qu'elle peut même s'appliquer aifément, comme on le verra plus bas, à des équations différentielles d'un ordre quelconque ; enfin plus rigoureufement démontrée, non-feulement à caufe des réflexions que nous avons déjà faites ci-deffus fur la théorie de M. Euler, mais encore parce que ce grand Géomètre, après avoir remarqué & prouvé à fa manière que $t = 0$, rend u de valeur quelconque dans l'équation $du = \frac{dt}{T\,t^n}$, (T étant une fonction de t qui ne foit point $= 0$, ni infinie quand $t = 0$) étend cette règle fans la démontrer à toutes les équations de la forme $du = \frac{dt}{t^n\,\Delta\,(u,t)}$ n étant $=$ ou > 1, & $\Delta\,(u,t)$ une fonction quelconque de u & de t.

D'ailleurs

D'ailleurs, par la méthode que M. Euler propose, il semble n'avoir égard dans l'équation différentielle qu'aux termes où t, supposée infiniment petite, seroit élevée au plus petit exposant, par la raison, dit-il, que ces termes sont infiniment grands par rapport aux autres. Or cette considération ne paroît pas suffisante, parce qu'en supposant $u = 0$, lorsque $t = 0$, il peut se faire qu'un terme qui contiendroit, par exemple, $u^k t^\lambda$ soit plus grand qu'un terme qui contiendroit $u^q t^{\lambda - \mu}$, si la valeur initiale de u en t, que je suppose $A t^\sigma$, est telle que $\sigma k + \lambda$ soit $< \sigma q + \lambda - \mu$, ou $\sigma k < \sigma q - \mu$. Aussi, dans la règle du parallélogramme de Newton, pour avoir la valeur de u en t dans une courbe algébrique, lorsque $t = 0$, on ne se contente pas d'avoir égard aux termes où t est élevée à la moindre puissance; on a égard aussi aux termes où t & u se trouvent mêlées. La méthode de M Euler ne paroît donc pas suffisante pour trouver la vraie valeur de u en t.

Ce n'est pas tout. M. Euler remarque avec raison que si on a, par exemple, $\frac{du}{u} = \frac{n\,dt}{t}$, t sera $= 0$ quel que soit u, & $u = 0$ quel que soit t. Mais il semble passer sous silence, le cas où l'on auroit $\frac{du}{u^n} = \frac{A\,dt}{t^k}$, n & k étant > 1, & qui mérite un examen particulier. Car u étant $= 0$, lorsque $t = 0$, l'intégrale absolue & complette de cette équation paroît être $\frac{u^{-n+1}}{n-1} = \frac{A t^{-k+1}}{k-1}$, puisque $t = 0$ rend $u = 0$; or en ce cas $t = 0$ ne donneroit pas u quelconque. Mais il faut remarquer que l'intégrale absolue de l'équation est $\frac{n-1}{u^{n-1}} + C = \frac{A(k-1)}{t^{k-1}}$, & qu'en supposant C infinie, on a $t = 0$ lorsque $u = 0$, & $t = 0$ lorsque u est finie & quelconque, c'est-à-dire, $t = 0$ quelle que soit u. On trouvera de même dans ce cas $u = 0$ quel que soit t. C'est une chose assez remarquable (pour le dire en passant) que ces sortes d'équations soient également complettes, en ajoutant, ou en n'ajoutant pas de constante.

On peut conclure de-là que les équations de cette forme $\frac{A\,dt}{tk} = \frac{du}{u^n}$, k & n étant supposés $=$ ou > 1, donnent indifféremment,

1.° $u =$ à tout ce qu'on voudra lorsque $t = 0$, & $t =$ à tout ce qu'on voudra lorsque $u = 0$; ou seulement $u = 0$ lorsque $t = 0$, & $t = 0$ lorsque $u = 0$. 2.° Que dans ces mêmes équations on peut toujours avoir une autre valeur finie de u en t & de t en u. Par exemple, $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$, donne l'intégrale $t = Au$; dans laquelle $t = 0$ ne donne pas $u =$ à tout ce qu'on voudra, à moins que A ne soit $= 0$, ni $u = 0$ ne donne $t =$ à tout ce qu'on voudra, à moins que A ne soit infini. Ces deux suppositions de $A = 0$, & de $A = \infty$ sont l'une & l'autre permises. Mais si A est fini (supposition qui est permise aussi), on a une équation algébrique $t = Au$, où t dépend de u, & réciproquement. De même si on a $\frac{A\,dt}{t^k} = \frac{du}{u^n}$, & qu'on n'ajoute point en intégrant la constante infinie C, on aura une équation finie & algébrique entre t & u; savoir, $\frac{u^{-n+1}}{n-1} = \frac{At^{-k+1}}{k-1}$.

Il n'y a que les seuls cas analogues à celui de $\frac{A\,dt}{t^k} = \frac{du}{u^n}$, k étant $=$ ou > 1 & $n < 1$, dans lesquelles $t = 0$ rend toujours & nécessairement u de valeur quelconque. On en voit aisément la raison par la théorie exposée ci-dessus; car alors on a $(-n+1)\,u^{1-n} = -\frac{A(k-1)}{t^{k-1}} + C$, C étant une constante qui doit être nécessairement infinie, pour que $t = 0$ donne $u = 0$; donc t finie rend nécessairement u infinie. Donc, &c.

Il est clair, au reste, que la règle donnée plus haut pour trouver les cas où $t = 0$ rend u quelconque, servira de même pour trouver les cas où $u = 0$ rend t quelconque; comme il arrive à la fois dans les équations $\frac{A\,dt}{t^k} = \frac{du}{u^n}$, k & n étant plus grands ou égaux à 1.

J'ai indiqué dans les *Mémoires de Berlin de 1763, p. 276*, l'usage qu'on peut faire de la théorie précédente pour la solution du Problème des tautochrones. C'est surquoi je pourrai revenir dans une autre occasion, cette matière n'étant pas ici de mon sujet.

Avant que de finir cette note, nous ajouterons encore une réflexion d'après la remarque faite à la fin de l'*article 34*.

C'est un paradoxe singulier & digne de l'attention des Géomètres, que si on a, par exemple, $\frac{-du}{u^n} = dt$, u étant supposé $= 0$ lorsque $t = 0$, l'intégrale complette $\frac{u^{-n+1}}{n-1} - \frac{0^{-n+1}}{n-1} = t$, donne à la fois $t = 0$, & $t =$ à une grandeur quelconque finie ou infinie, u étant toujours $= 0$. Pour sentir en quoi consiste ce paradoxe, il faut remarquer que l'intégrale complette étant telle que $u = 0$ doit donner $t = 0$, on ne voit pas comment $u = 0$ peut encore donner d'autres valeurs de t, & même une infinité d'autres valeurs depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$. Supposons que u soit $= a$ lorsque $t = 0$, & faisons en général $u = a + \alpha$, on aura $\frac{1}{(n-1)(a+\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)a^{n-1}} = t$, qui se réduit à une série de cette forme $\frac{B\alpha}{a^n} + \frac{C\alpha^2}{a^{n+1}}$ &c. $= t$. Soit à présent $a = 0$, & $\alpha = 0$, on aura $t = \frac{0}{0}$, quantité indéterminée qui peut être ou zéro, ou finie, ou infinie.

Cette considération peut servir à expliquer le paradoxe jusqu'à un certain point, mais non pas à l'éclaircir pleinement. En effet, si on élève $a + a$ à la puissance $-p$, le rapport du $(n+1)^e$ terme au précédent sera $\frac{-p-n+1}{n}$; ou plutôt (abstraction faite du signe) $\frac{p+n-1}{n}$; d'où l'on voit que p étant (*hyp.*) $=$ ou > 1, la série sera divergente. Donc si $a = 0$, la quantité $\frac{1}{(a+\alpha)^{n-1}}$ ne paroît pas pouvoir se réduire en série convergente, même en supposant $\alpha = 0$; ainsi l'équation $\frac{B\alpha}{a^n} + \frac{C\alpha^2}{a^{n+1}}$ &c. $= t$ ne paroît pas alors représenter exactement l'équation $\frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(a+\alpha)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}}\right) = t$.

Quoi qu'il en soit, il est bien constaté par les réflexions & les démonstrations précédentes, répandues dans le texte du Mémoire & dans les Notes, que l'équation $\frac{A\,du}{u^n} = dt$, donne $t =$ à tout ce qu'on voudra

lorſque $u = o$, ſi $n =$ ou $>$ 1. C'eſt ce qu'on peut voir encore en conſtruiſant la courbe dont les ordonnées t répondantes aux abſciſſes u, ſoient $= \int \frac{A\,du}{u^n}$; c'eſt-à-dire, proportionnelles à l'aire des parties de la courbe qui auroit pour abſciſſes u & pour ordonnées $\frac{A}{u^n}$. Cette aire eſt $= o$, lorſque $u = o$, comme on le ſuppoſe, & pour lors $t = o$; mais elle eſt infinie, quelque petite que ſoit u; t eſt donc infinie, quelque petite que ſoit u. D'où il s'enſuit que $u = o$ donne $t =$ à ce qu'on voudra, depuis zéro juſqu'à l'infini.

A l'occaſion de ce paradoxe, je prie le Lecteur de me permettre ici une courte digreſſion ſur un autre paradoxe analogue, dans lequel l'infini entre auſſi. J'ai expoſé ce paradoxe dans le *tome IV de mes Opuſcules, page 62*, mais ſans en donner de ſolution. Voici celle que j'en ai trouvée depuis en repenſant à cette matière. Les Géomètres en jugeront.

Soit une hyperbole du 3.e degré, dont l'équation ſoit $y = \frac{1}{(a-x)^2}$, & dont l'aire ſoit ſuppoſée $= o$ lorſque $x = o$; le paradoxe conſiſte en ce que l'aire $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$ de cette hyperbole, priſe par les intégrations ordinaires, eſt finie & négative lorſque $x > a$, au lieu qu'elle eſt réellement infinie & poſitive.

Ce paradoxe aura lieu toutes les fois que y ſera $= \frac{1}{(a-x)^{\frac{n}{m}}}$, n étant pair & m impair, & $\frac{n}{m}$ étant > 1; mais il n'aura point lieu dans les autres cas.

Pour en trouver le dénouement, je ſuppoſe en général $y = \varphi\,(a-x)$, & $\int y\,dx = \int dx\,\varphi\,(a-x) = \psi\,(a-x) - \psi\,a$. Si x eſt ſuppoſé $= c$, l'aire correſpondante ſera $\psi\,(a-c) - \psi\,a$; & ſi x eſt ſuppoſé $= c + c'$, l'aire répondante à cette abſciſſe, & ſuppoſée $= o$ quand $x = c$, ſera $\psi\,(a-c-c') - \psi\,(a-c)$, en ſorte que l'aire *totale* répondante à l'abſciſſe $x = c + c'$, & ſuppoſée $= o$ quand $x = o$, ſera égale à la ſomme des deux aires précédentes, $\psi\,(a-c) - \psi\,a$, & $+ \psi\,(a-c-c') - \psi\,(a-c)$, ou $\psi\,(a-c-c') -$

$\psi\, a$, comme on l'eût trouvé directement en ne prenant pas l'aire à deux fois, c'eſt-à-dire, en intégrant $dx\,\varphi\,(a-x)$, & faiſant $x = c + c'$ dans l'intégrale abſolue $\psi\,(a-x) - \psi\, a$.

Cet accord des deux ſolutions tient, comme on voit, à ce que les quantités $\psi\,(a-c)$ & $-\psi\,(a-c)$ qui ſe trouvent dans l'intégrale priſe à deux fois, ſe détruiſent par des ſignes contraires. Or ſi cela n'arrivoit pas toujours, ſi, au contraire, il arrivoit que les deux quantités $\psi\,(a-c)$ dans l'intégrale priſe à deux fois, duſſent avoir le même ſigne, alors elles ne diſparoîtroient pas, & l'intégrale priſe à deux fois ſeroit différente de l'intégrale abſolue; & c'eſt ce qui arrive dans le cas préſent.

En effet, ſoit d'abord $x < a$, on aura pour l'intégrale $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$, qui eſt $= \frac{1}{+0} - \frac{1}{a}$ lorſque x devient $= a$.

Soit enſuite $x > a$, & ſoit priſe l'intégrale de manière qu'elle ſoit $= 0$ lorſque $x = a$, on aura pour différentielle $\frac{dx}{(x-a)^2}$, dont l'intégrale eſt $-\frac{1}{x-a} + \frac{1}{+0}$ ou $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{0}$. Ajoutant les deux intégrales partielles, on aura $+\frac{1}{0} - \frac{1}{a}$, & $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{0}$, dont la ſomme eſt $\frac{1}{a-x} + \frac{2}{0} - \frac{1}{a}$, qui n'eſt pas la même choſe que $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$.

Le Calcul intégral eſt donc en défaut dans ce ſeul cas, parce que dans ce ſeul cas l'intégrale totale n'eſt pas la même que la ſomme des deux intégrales partielles.

On ne doit pas objecter qu'en faiſant $x > a$, l'intégrale $-\frac{1}{x-a}$ ou $\frac{1}{a-x}$ de $\frac{dx}{(x-a)^2}$, donne pour conſtante $-\frac{1}{0}$ au lieu de $+\frac{1}{0}$. Car cette conſtante prétendue $-\frac{1}{0}$ donneroit une expreſſion très-fautive de la valeur générale de l'aire, puiſque cette valeur générale ſuppoſée $-\frac{1}{0} + \frac{1}{a-x}$ ou $-\frac{1}{0} - \frac{1}{x-a}$, ſeroit

infinie négative, au lieu d'infinie positive qu'elle est réellement. D'ailleurs x étant supposé ici $> a$, il saute aux yeux que $\frac{1}{a-x}$ est toujours négatif jusqu'à ce que x devienne $= a$, & que par conséquent la constante à ajouter est $\frac{1}{+0}$, & non $\frac{1}{-0}$ ou $\frac{-1}{0}$, pour que l'aire soit $= 0$ lorsque $x = a$.

Pour ne laisser aucun nuage sur la solution précédente, je remarquerai que les expressions $+\frac{1}{0}$ & $-\frac{1}{0}$, ou $\frac{1}{+0}$ & $\frac{1}{-0}$ ne sont point ici la même chose, quoique $+0 = -0$, parce que $\frac{1}{+0}$ est la limite infinie d'une fraction *positive* $\frac{1}{+\alpha}$, dans laquelle α peut être pris si petit qu'on voudra, & que $\frac{1}{-0}$ est la limite infinie d'une fraction *négative* $\frac{1}{-\alpha}$, dans laquelle α peut être pris aussi petit qu'on voudra; en sorte que $\frac{1}{+0}$ représente un infini *positif*, & $\frac{1}{-0}$ un infini *négatif*. Or comme x est supposé ici plus grand que a, tant que $a - x$ n'est pas $= 0$, il s'ensuit évidemment que la constante à ajouter pour rendre l'intégrale complette & nulle quand $x = a$, est $\frac{1}{+0}$ ou $+\frac{1}{0}$, & non pas $\frac{1}{-0}$ ou $-\frac{1}{0}$. J'ajoute que cette expression $\frac{1}{\pm 0}$ ne doit laisser dans l'esprit aucune obscurité, elle n'exprime, comme je viens de le dire, que la limite infinie de la quantité $\frac{1}{\pm\alpha}$, α étant finie & si petite qu'on voudra.

Le paradoxe proposé n'a point lieu lorsque $y = \frac{1}{(a-x)^{\frac{n}{m}}}$, si $\frac{n}{m}$ est < 1, m étant impair, & n pair, parce qu'alors, comme il est aisé de le voir, la quantité $\downarrow (a - c)$ qui doit entrer dans les deux intégrales partielles, est $= 0$ lorsque $x = a$, & qu'ainsi elle disparoît

absolument de la somme des deux intégrales, quelque signe qu'elle ait dans chacune.

Le paradoxe n'a pas lieu non plus lorsque $y = \frac{1}{(a - x)^k}$, k étant un nombre impair plus grand ou même égal à l'unité. Car, soit par exemple, $k = 3$, on aura pour la 1.re intégrale $\frac{1}{2(a - x)^2} - \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{0} - \frac{1}{2a^2}$ lorsque $x = a$; & pour la seconde $\int \frac{dx}{(a - x)^3}$ ou $\int \frac{- dx}{(x - a)^3} = \frac{1}{2(x - a)^2} - \frac{1}{0}$, ou $\frac{1}{2(a - x)^2} - \frac{1}{0}$; en sorte que la somme des deux est $\frac{1}{2(a - x)^2} - \frac{1}{2a^2}$, comme elle le doit être, l'aire qui répond à $x > a$, étant négative & devant être retranchée de la précédente.

On pourroit penser que la raison du paradoxe proposé est que lorsque $x = a$, $\frac{dx}{(x - a)^2}$ est infinie au lieu d'être infiniment petite, d'où il paroîtroit s'ensuivre que l'intégrale générale de $\frac{dx}{(x - a)^2}$, c'est-à-dire $\frac{-1}{x - a}$ ou en général $\frac{-1}{x - a} \pm C$ n'est plus exacte lorsque $x = a$. Cette solution ne seroit pas juste, ce me semble, par plusieurs raisons. Pour les faire bien sentir, mettons d'abord $\frac{b^3}{(x - a)^2}$ pour l'ordonnée, afin de garder la loi des homogènes, & supposons que bz soit l'aire correspondante à x, on aura $\frac{b^2 dx}{(x - a)^2} = dz$, ou $\frac{dz}{dx} = \frac{b^2}{(x - a)^2}$, ce qui signifie que la limite du rapport de dz à dx (*Voyez l'article* DIFFÉRENTIEL *de l'Encyclopédie*) au moins tant que x n'est pas $= a$, est $\frac{b^2}{(x - a)^2}$, limite d'autant plus grande que x diffère moins de a, & qui devient infinie quand $x = a$; ce qu'il est d'ailleurs facile de voir, puisque l'aire est certainement infinie, si on prend x tant soit peu plus grand que a.

En second lieu, puisque l'équation $\frac{dz}{dx} = \frac{b^2}{(x - a)^2}$ ou $\frac{dz}{dx} = \frac{b^2}{(a - x)^2}$

est exacte, au moins tant que x n'est pas égal à a, il est évident que l'intégrale rigoureuse & exacte de $\frac{dx}{(a-x)^2}$ tant que x est $< a$, est $\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a}$; or cette quantité qui exprime l'aire de l'hyperbole, a évidemment pour limite $\frac{1}{+0} - \frac{1}{a}$ lorsque $x = a$; cette limite infinie exprime donc évidemment l'aire de l'hyperbole lorsque $x = a$. Supposons de même $x > a$, l'intégrale exacte & rigoureuse de $\frac{dx}{(a-x)^2}$ ou $\frac{dx}{(x-a)^2}$ sera évidemment $\frac{-1}{a-x} + \frac{1}{c-a}$ ou $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{c-a}$, en supposant l'aire $= 0$ lorsque $x = c > a$; & la limite infinie de cette intégrale sera, lorsque $c = a$, $\frac{-1}{x-a} + \frac{1}{0}$, limite qui représente évidemment l'aire infinie répondante à $x - a$ finie & si petite qu'on voudra; quoique cette aire soit nulle quand $x = a$.

En troisième lieu, si on veut admettre cette métaphysique précaire de regarder dx comme *infiniment petite* en elle-même, & cependant comme infinie par rapport à $(a-x)^2$ lorsque $x = a$, cette quantité dx peut aussi, lorsque $x = a$, être regardée comme infinie par rapport à $a - x$, dans les expressions $\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$ & $\frac{dx}{(a-x)^3}$; cependant le paradoxe n'a plus lieu dans ces deux cas, & on trouve alors la vraie valeur de l'aire. La solution que nous examinons ne paroît donc pas exacte, & nous croyons devoir nous en tenir à celle que nous avons donnée.

Nous remarquerons à cette occasion qu'on auroit tort de croire le Calcul différentiel en défaut, dans certains cas où il paroît l'être. Soit, par exemple, $z = x^m$, & $dz = m x^{m-1} dx$; il semble que par les règles du Calcul différentiel, cette seconde équation ne soit vraie que dans les cas où dx peut être supposée infiniment petite par rapport à x; d'où il s'en suivroit qu'elle ne l'est pas lorsque $x = 0$. Pour lever cette difficulté, on considérera, 1.° que l'équation $\frac{dz}{dx} = m x^{m-1}$ qui représente (*article* DIFFÉRENTIEL *de l'Encyclopédie*) la limite du rapport de dz à dx, est exactement & rigoureusement vraie, tant que

que x n'est pas $= 0$, parce que prenant x si petite qu'on voudra, dx & dz, dont la limite est zéro, donneront exactement & rigoureusement dans tous les cas mx^{m-1} pour la limite du rapport de dz à dx. 2.° De-là il s'ensuit évidemment que quand $x = 0$, la quantité mx^{m-1} reste encore la limite du rapport de dz à dx; c'est-à-dire infinie, finie ou nulle, selon que m est ou < 1, ou $= 1$, ou > 1. 3.° Ce qui prouve bien que l'équation $dz = dx \times mx^{m-1}$ exprime la limite du rapport de dz à dx, & non l'accroissement dz de z qui répond à $x + dx$, c'est qu'en faisant $x = 0$, & supposant $x + dx = 0 + dx$, on doit avoir l'accroissement $dz = dx^m$, & non pas $mx^{m-1}dx$. Mais en voilà assez sur ce sujet. On voit que les paradoxes que nous venons d'exposer, tiennent en général à l'expression vague de l'infini par la formule $\pm \frac{1}{0}$; ces paradoxes paroissent mériter que les Géomètres cherchent à les éclaircir, en appliquant au calcul une métaphysique simple & lumineuse. Nous terminerons donc ici cette note, qui n'est déjà que trop longue.

(13) Outre la raison que nous avons apportée *art. 36*, pourquoi $t = 0$ donne u de valeur quelconque dans l'équation $t^k du = A dt$ si k est $=$ ou > 1, mais non pas si k est < 1, on peut encore en donner une autre qui servira à jeter un nouveau jour sur cette matière. Soit $k = \frac{n}{m}$, & $t^{\frac{1}{m}} = z$, ou $t = z^m$, on aura $z^n du = Amz^{m-1} dz$. Donc, 1.° si n est $=$ ou $> m$, on aura $z^{k'} du = B dz$, k' étant un nombre entier $=$ ou > 1. 2.° Si n est $< m$, on aura $du = Bz^r dz$, r étant $= 0$ ou positif. Or si z est continuellement $= 0$, dz, ddz, d^3z, &c. à l'infini devront aussi l'être, ce qui aura lieu en effet dans le premier cas, puisqu'en faisant du constant, on aura $ddz = kAz^{k-1} \times du dz = 0$, &c. & de même $d^3z = 0$, & ainsi à l'infini. Mais dans le second cas on aura $ddz = \infty$ si r est $=$ ou > 1, & $d^3z = \infty$, & ainsi de suite; & si r est $= 0$, on n'a qu'à faire $z = y^s$, s étant plus grand que 1; & on aura $ddy = \infty$, quoique z supposée toujours égale à zéro, rende y toujours égale à zéro, & par conséquent ddy, d^3y, &c. toujours égales à zéro.

(14) Si dans le cas de cet *article 46*, $t = 0$ donne u de valeur quelconque, & si $u = 0$ donne t de valeur quelconque, on aura deux intégrales algébriques de la proposée, sans qu'il soit nécessaire

que l'équation différentielle entre t, u, dt, du, soit séparée ou même séparable. Si $t = 0$ donne u de valeur quelconque, mais que $u = 0$ ne donne pas t de valeur quelconque, on n'aura qu'une seule intégrale algébrique, sans avoir besoin de séparer les indéterminées de l'équation entre u, t, du, dt.

Si en supposant $x = \alpha$, ou pour plus de simplicité $= 0$, on avoit plusieurs valeurs de y, savoir, ς, δ, &c. ce qui pourroit donner plusieurs valeurs a', a'', &c. de u, & plusieurs valeurs b', b'', &c. de t, on auroit alors différentes intégrales de cette forme $du' + \rho' dt' = 0$, dans lesquelles $t' = 0$ donneroit $u' = 0$; & si ces différentielles avoient la propriété que $t' = 0$ donnât u' de valeur quelconque, ou réciproquement, il en résulteroit plusieurs intégrales finies & algébriques qui donneroient la valeur de x en y.

(15) Ces deux derniers cas font voir qu'on peut aussi intégrer l'équation proposée dans le premier cas (savoir $y^2 d^3 y + b y dy ddy + a dy^3 = 0$), en la multipliant par y^p, & en supposant que l'intégrale soit $y^{p+2} ddy + k y^{p+1} dy^2 = C dx^2$, ce qui donne $p + 2 + 2k = b$, & $k(p+1) = a$; d'où l'on tire k & p. Ensuite on multipliera l'intégrale $y^{p+2} ddy + k y^{p+1} dy^2 = C dx^2$ par $2 y^m dy$, & on supposera que son intégrale soit $y^{m+p+2} dy^2 = \frac{2 C y^{m+1} dx^2}{m+1} + A dx^2$, ce qui donnera $m + p + 2 = 2k$; & on aura dx en y & dy, & par conséquent dy en x & dx.

(16) Si l'équation transformée $-\frac{du}{u} + B p^q u^{2-r} dp + k p^n u^{2-\omega} dp = 0$, n'a que trois termes, elle est encore intégrable dans d'autres cas que celui de la réduction à l'homogénéité; savoir 1.° si $2 - r = 0$. 2.° si $2 - r = 2 - \omega$, c'est-à-dire, si $\omega = r$. 3.° si $2 - r = -1$ & si $2 - \omega = 1$, ce qui tombe dans le cas de Riccati.

Maintenant, si dans tous les cas où l'équation proposée en ddp est intégrable, on met au lieu de p la quantité $\frac{dy}{y dx}$, on voit que toutes les équations de la forme $d^2\left(\frac{dy}{y dx}\right) + B\left(\frac{dy}{y dx}\right)^q \times$

$\left[d \left(\frac{dy}{y\,dx}\right)^r \right] dx^{2-r}$ &c. $= 0$, ſont intégrables, pourvu que $\frac{q+3-r}{2-r}$ ſoit une quantité conſtante dans chaque terme.

(17) L'équation transformée $x\,dz + z^2\,dx\,(1+a) + z\,dx \times (b-1) + C\,dx = 0$ ſeroit encore intégrable, ſi on y ajoutoit tant de termes qu'on voudroit, de la forme $g\,x^n\,dz$ ou de la forme $B\,x\,z^k\,dz$; or $z = x\,p = \frac{x\,dy}{y\,dx}$; d'où il eſt aiſé de voir que l'équation propoſée en ddy ſera encore intégrable, ſi on y ajoute tant de termes qu'on voudra de la forme $g\,y\,x^{n-1} \times d\left(\frac{dy}{y}\right) + \frac{g\,x^{n-1}\,dy\,dx}{x} = g\,x^{n-1}\,ddy - \frac{g\,x^{n-1}\,dy^2}{y} + \frac{g\,x^{n-1}\,dy\,dx}{x}$, ou de la forme $\frac{B\,y\,x^n\,dy^n\,dx}{y^n\,dx^n}\left[d\left(\frac{dy}{y\,dx}\right) + \frac{dy}{y\,x}\right] = \frac{B\,x^n\,dy^n\,dx}{y^n\,dx^n} \times \left(ddy - \frac{dy^2}{y}\right) + \frac{B\,x^{n-1}\,dy^{n+1}}{y^n\,dx^{n-1}}$; n étant un expoſant tel qu'on voudra.

En général, ſoit l'équation $x\,d\,(p\,x^\lambda) + dx\,[A\,(p\,x^\lambda)^q + B \times (p\,x^\lambda)^r +$ &c. $+ C] = 0$, il eſt viſible qu'elle ſera intégrable; elle eſt de plus réductible à la forme $x^{\lambda+1}\,dp + dx\,[A'p\,x^\lambda + A(p\,x^\lambda)^q +$ &c.$] = 0$; donc en mettant $\frac{dy}{y\,dx}$ pour p, on voit que toute équation de la forme $\frac{ddy}{y} - \frac{dy^2}{y^2} + dx^2 \times \left[\frac{A'dy}{x\,y\,dx} + \frac{A\,dy^q}{y^q\,dx^q} \times x^{\lambda q - \lambda - 1} + \frac{B\,dy^r}{y^r\,dx^r} \times x^{\lambda r - \lambda - 1}\right.$ &c.$\left.\right] = 0$, eſt toujours intégrable.

On voit encore que puiſque l'équation $d\,dy + \frac{a\,dy^2}{y} + \frac{b\,dy\,dx}{x} + \frac{c\,dx^2}{x^2} = 0$, eſt intégrable, l'équation $d\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{a\,dy^2}{y\,dx} + \frac{b\,dy}{x} + \frac{c\,dx}{x^2} = 0$, l'eſt auſſi, en ne

faisant plus dx constant ; ou, ce qui revient au même, l'équation $ddy - \frac{dyddx}{dx} + \frac{ady^2}{y} + \frac{bdydx}{x} + \frac{cdx^2}{x^2} = 0$; donc faisant $\frac{dx}{x} = kdz$, & prenant dz constant, on voit que l'équation $ddy - kdydz + \frac{ady^2}{y} + kbdydz + k^2 c dz^2 = 0$, est intégrable, ou simplement l'équation $ddy + \frac{ady^2}{y} + hdydz + gdz^2 = 0$, en faisant $g = k^2 c$, & $h = -k + kb$, ce qui donne en supposant $k = \pm 1$, $c = g$, & $b = \frac{h}{k} + 1 = \pm h + 1$. On voit encore, en prenant $x = Az^k$, que l'équation $ddy - \frac{(k-1)dydz}{z} + \frac{ady^2}{y} + \frac{bkdydz}{z} + \frac{ck^2dz^2}{z^2} = 0$, est intégrable, ou simplement $ddy + \frac{ady^2}{y} + \frac{hdydz}{z} + \frac{gdz^2}{z^2} = 0$, en supposant $bk - k + 1 = h$, & $1 = \frac{ck^2}{g}$, ce qui donne $c = \frac{g}{k^2}$, & $b = \frac{h+k-1}{k}$.

(18) Soit en général $ddy + \frac{\xi dy^2}{y} + \zeta dydx + Xydx^2 = 0$; on aura $dp + pp(dx + \xi dx) + \zeta pdx + Xdx = 0$. Soit $p = \rho\chi$, ρ étant une indéterminée, & χ une fonction indéterminée de x, la transformée sera $\frac{\chi d\rho}{X} + dx\left[\frac{\rho\rho\chi\chi(\xi+1)}{X} + \rho\left(\frac{d\chi}{Xdx} + \frac{\zeta\chi}{X}\right) + 1\right] = 0$.

Cette transformée sera intégrable, si on a, par exemple $\frac{d\chi}{Xdx} + \frac{\zeta\chi}{X} = A'$ & $\frac{\chi\chi(\xi+1)}{X} = B'$, A' & B' étant des constantes. C'est le cas de l'équation $ddy + \frac{ady^2}{y} + \frac{bdydx}{x} + \frac{cdx^2}{x^2} = 0$, intégrée plus généralement *art.* 51 ; car on a $\xi = a$, $\zeta = \frac{b}{x}$

$X = cx^{-2}$, & il n'y aura qu'à prendre $\chi = x^{-1}$. Ce même cas de $\chi\chi(\xi + 1) = A' \times X$, & de $\frac{d\chi}{dx} + \zeta\chi = B' \times X$, eſt encore celui de l'équation de l'*article 52*, en faiſant $\xi = a$, $\zeta = Gx^n + \frac{H}{x}$, $X = Bx^{2n}$, & en ſuppoſant $\chi = Fx^n$, de manière que $Fn + H = 0$.

La condition que $\chi\chi(\xi + 1) = A' \times X$, & que $\frac{d\chi}{dx} + \zeta\chi = B' \times X$, donne $d\chi + \zeta\chi dx + E\chi\chi dx(\xi + 1) = 0$, E étant une conſtante quelconque; d'où l'on voit que ſi l'on peut intégrer l'équation $dp + p\zeta dx + Eppdx(\xi + 1) = 0$, E étant une conſtante quelconque, ou plus ſimplement $dp + p\zeta dx + pp\xi' dx + Edx = 0$, on pourra intégrer auſſi $dp' + p'\zeta dx + Fp'p'\xi' dx + GXdx = 0$, F & G étant conſtantes, & $X = pp\xi$.

(19) Si l'équation $ddy + \xi dydx + Xydx^2 = 0$ eſt intégrable, l'équation $ddy + \xi dydx + yXdx^2 + \frac{Edx^2}{y^3} c^{-2\int\xi dx} = 0$, le ſera auſſi; car en faiſant $y = zu$, on aura la transformée $2dudz + zddu + \xi zdudx + \frac{Edx^2}{z^3u^3} c^{-2\int\xi dx} = 0$, dont l'intégrale, en multipliant par $zc^{\int\xi dx}$, ſera celle de $d(zzduc^{\int\xi dx}) + \frac{Edx^2}{z^2u^3} c^{-\int\xi dx} = 0$; donc $\frac{(zzduc^{\int\xi dx})^2}{2} + Edx^2(A - \frac{1}{2u^2}) = 0$. Donc, &c.

Puiſque l'équation $ddy + \xi dydx + Xydx^2 = 0$ ſe change (en faiſant $y = zu$) en $ddz + \xi dzdx + Xzdx^2 + \frac{2dzdu}{u} + \frac{zddu}{u} + \frac{\xi zdudx}{u} = 0$, il s'enſuit que ſi on fait $u^2 = c^{\int\zeta dx}$, l'équation $ddz + dz(\xi + \zeta)dx + zdx^2(X + \frac{\xi\zeta}{2} + \frac{d\zeta}{2dx} + \frac{\zeta\zeta}{4}) = 0$, eſt intégrable, dans les cas où $ddy + \xi dydx + Xydx^2 = 0$ le ſera.

(20) Soit en général l'équation $\frac{ddy}{dy} + Y'dy + \xi dx + \frac{Y''\xi' dx^k}{dy^{k-1}} = 0$, & soit mis $\frac{dY}{Y} + \frac{dX'}{X'}$ à la place de $Y'dy + \xi dx$, nous aurons d log. $\left(\frac{Y \times X' dy}{dx}\right) + \frac{Y''\xi' dx^k}{dy^{k-1}} = 0$; faisant donc $\frac{Y \times X' dy}{dx} = p$, nous aurons $p^{k-1} dp + Y''\xi' dy \times Y^k X'^k = 0$, ou $p^{k-2} dp + Y''\xi' dx \times Y^{k-1} X'^{k-1} = 0$; équations dont la première est intégrable si $\xi' X'^k$ est égal à une quantité constante, & la seconde si $Y'' Y^{k-1}$ est égale à une quantité constante.

(21) On voit, par exemple, que toute équation de cette forme $ddy + \frac{a dy^2}{x^2} + \frac{b dy dx}{x} + \frac{C x dx^3}{dy} = 0$ est intégrable, puisqu'elle se réduit à $ddy + dx^2 \left[\frac{a dy^2}{x^2 dx^2} + \frac{b dy}{x dx} + \frac{C x dx}{dy}\right] = 0$; & ainsi d'une infinité d'autres, beaucoup plus générales & plus compliquées que celle-ci.

On peut former par cette méthode une grande quantité d'autres équations différentielles du second ordre qui soient intégrables. Par exemple, on sait que $dp + p\xi dx + Xp^k dx = 0$, ou $\frac{dp}{p} + \xi dx + Xp^n dx = 0$ est intégrable, ξ & X étant des fonctions de x; soit donc $p = X' dx^m \times Y' dy^{-m}$, & soit fait dx constant, on aura $-\frac{m ddy}{dy} + \frac{dX'}{X'} + \frac{dY'}{Y'} + \xi dx + \frac{X \times X'^n dx^{mn+1} \times Y'^n}{dy^{mn}} = 0$, ou, ce qui revient au même, en faisant $\frac{dY'}{mY'} = Y''dy$; $\frac{ddy}{dy} + \zeta dx + Y''dy + \frac{X'' c^{k \int Y'' dy} dx^{k+1}}{dy^k} = 0$; & si on faisoit dy constant, on auroit $\frac{ddx}{dx} + \zeta dx + Y''dy + X'' c^{\int k Y'' dy} \times \frac{dx^{k+1}}{dy^k} = 0$. Ce qui renferme le Théorème de l'*article 58* ci-dessus.

(22) On parviendroit par cette méthode à trouver l'intégrale de $d\theta' + \theta' Z dz = 0$ par celle de $d + \theta Z dz + \zeta dz = 0$, si

on n'avoit pas d'ailleurs des méthodes directes pour intégrer chacune de ces équations. En effet, on sait que l'intégrale de $d\theta + \theta Z dz + \zeta dz = 0$, est $\theta c^{\int Z dz} + \int \zeta dz c^{\int Z dz} - A = 0$, ou $\theta = A c^{-\int Z dz} - c^{-\int Z dz} \int \zeta dz c^{\int Z dz}$; donc en faisant $\alpha = A c^{-\int Z dz} - c^{-\int Z dz} \int \zeta dz c^{\int Z dz}$, & $\beta = A' c^{-\int Z dz} - c^{-\int Z dz} \int \zeta dz c^{\int Z dz}$, on aura $\alpha - \beta$, que j'appelle θ', $= (A - A') c^{-\int Z dz}$; ce qu'on sait d'ailleurs, puisque l'intégrale de $d\theta' + \theta' Z dz = 0$ est $\theta' = B c^{-\int Z dz}$, B représentant une constante quelconque égale à la différence des deux constantes quelconques A & A'.

(23) Je ferai remarquer à cette occasion, comme on le verra encore plus bas, que l'intégrale d'une équation peut quelquefois paroître renfermer plus de constantes qu'elle n'en renferme réellement. Soit, par exemple, $d\theta + \theta Z dz + \zeta dz = 0$, il est constant que l'intégrale de cette équation ne doit renfermer qu'une constante. Cependant, supposons $\theta = ut$, on aura $udt + tdu + utZdz + \zeta dz = 0$, & faisant $udt + utZdz = 0$, ce qui est permis, on aura les deux équations $dt + tZdz = 0$, & $tdu + \zeta dz = 0$, qui doivent, étant intégrées, donner chacune une constante, ce qui en produira deux en apparence, dans la valeur de $\theta = ut$. Pour résoudre cette difficulté, on remarquera que $dt + tZdz = 0$, donne $t = A c^{-\int Z dz}$, & que $du + \frac{\zeta dz}{t} = 0$ donne $u = B - \frac{\int \zeta dz c^{\int Z dz}}{A}$; donc θ ou $ut = B \times A c^{-\int Z dz} - c^{-\int Z dz} \times \int \zeta dz c^{\int Z dz}$; où l'on voit que le produit des deux constantes B, A, n'en représente réellement qu'une seule.

Voici une autre difficulté du même genre, qui paroît mériter d'être résolue. Soit $ddy + yXdx^2 = 0$, & supposons $y = tz$, on aura $ddt + Xtdx^2 = 0$, & $2dtdz + tddz = 0$, ce qui donne $dz = \frac{Bdx}{t^2}$ & $z = \int \frac{Bdx}{t^2} + A$; donc y ou $tz = t\int \frac{Bdx}{t^2} + At$; cependant l'équation $ddt + Xtdz^2 = 0$ étant aussi générale que $ddy + yXdx^2$, l'intégrale de la première doit être la même que celle de la seconde; il faut donc que t soit la même que y; c'est-à-dire, que t & $t\int \frac{Bdx}{t^2} + At$ reviennent à la même valeur, ce qui paroît ne pas être.

Pour résoudre cette difficulté, je remarque que l'intégrale $t\int\frac{Bdx}{t^2}$ $+ At$ doit être en effet $= t'$, t' étant telle que $ddt' + t'Xdx^2 = 0$. En effet, puisque $ddt + tXdx^2 = 0$, & que (*hyp.*) $ddt' + t'Xdx^2 = 0$; donc $\frac{ddt}{t} = \frac{ddt'}{t'}$, & $t'ddt - tddt' = 0$, & $tdt' - t'dt = Bdx$, & $\frac{t'}{t} = \int\frac{Bdx}{t^2} + A$, ou $t' = t\int\frac{Bdx}{t^2} + At$. Il en sera de même des autres cas semblables.

Pour confirmer le calcul précédent par des exemples très-simples, soit $ddy = 0$, on aura $y = a + bx$, & en faisant $y = tz$, on aura $ddt = 0$, & $z = \int\frac{Bdx}{t^2} + A$, d'où l'on tire $t = e + fx$; & tz ou $y = (e + fx)\left[\int\frac{Bdx}{(e+fx)^2} + A\right] = \left[-\frac{B}{f(e+fx)} + A\right] \times (e + fx) = -\frac{B}{f} + Ae + Afx$; valeur aussi générale que $y = a + bx$. Soit de même $ddy + ydx^2 = 0$, on aura $y = a\,\text{fin.}\,x + b\,\text{cof.}\,x$, $t = e\,\text{fin.}\,x + f\,\text{cof.}\,x$; $\int\frac{Bdx}{t^2} = \frac{B}{-ee-ff} \times \left(\frac{e\,\text{cof.}\,x - f\,\text{fin.}\,x}{e\,\text{fin.}\,x + f\,\text{cof.}\,x} + A\right)$, d'où il est aisé de voir que zt ou $y = g\,\text{fin.}\,x + h\,\text{cof.}\,x$, même valeur que $a\,\text{fin.}\,x + b\,\text{cof.}\,x$.

(24) Pour rendre cette démonstration conforme à l'énoncé du *Théorème XLV*, il faut remarquer qu'il s'est glissé dans l'énoncé de ce Théorème une faute d'impression, & qu'au lieu de ces mots : *si on a* m *valeurs de* ,&c. il faut lire, *si on a* $m - 1$ *valeurs de* θ, &c.

(25) M. de la Grange, dans les *Mémoires de Turin, tome III, page 184*, trouve qu'en faisant $\sigma' = \frac{\theta' dz}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}$ & $\sigma'' = \frac{\theta'' dz}{\theta' d\theta'' - \theta'' d\theta'}$, la valeur générale & absolue de θ revient à celle-ci $\theta = \frac{\sigma'\int Z\sigma'' dz - \sigma''\int Z\sigma' dz}{\sigma' d\sigma'' - \sigma'' d\sigma'}$. Or pour faire voir que cette expression revient à la nôtre, il suffit de prouver que $\frac{\sigma'}{\sigma' d\sigma'' - \sigma'' d\sigma'} = \theta'$, & $\frac{\sigma''}{\sigma' d\sigma'' - \sigma'' d\sigma'} = \theta''$. On voit

d'abord

d'abord aisément, par les valeurs ci-dessus de σ' en θ' & de σ'' en θ'', que $\frac{\sigma'}{\theta'} = \frac{\sigma''}{\theta''}$; ensuite on a $\theta'' = \frac{\sigma''\,\theta'}{\sigma'}$ & $d\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right) = d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)$ $= \frac{\theta'\,d\theta'' - \theta''\,d\theta'}{\theta'\,\theta'} = \frac{dz}{\sigma'\,\theta'}$, à cause de $\sigma' = \frac{\theta'\,dz}{\theta'\,d\theta'' - \theta''\,d\theta'}$. Donc θ' $= \frac{dz}{\sigma'\,d\left(\frac{\sigma''}{\sigma'}\right)} = \frac{\sigma'\,dz}{\sigma'\,d\sigma'' - \sigma''\,d\sigma'}$; & θ'' ou $\frac{\theta'\,\sigma''}{\sigma'} = \frac{\sigma''\,dz}{\sigma'\,d\sigma'' - \sigma''\,d\sigma'}$.

Il me semble que l'expression de θ donnée dans l'*article 72*, a cela d'avantageux, qu'elle renferme les valeurs immédiates de θ', θ'', & qu'elle donne d'ailleurs aisément les valeurs de θ dans les équations plus élevées, comme on le va voir. En effet, si l'équation est du troisième ordre, & que les trois valeurs de θ, soient θ', θ'', θ''', on fera $\theta = \theta'\,\omega$, & on remarquera, 1.° qu'on aura une transformée dans laquelle ω ne se trouvera point, & dont le premier terme sera $ddd\omega$, & le dernier $\frac{\xi\,dz^2}{\theta'}$. On aura donc *(art. 72)* la valeur générale & complette de $\frac{d\omega}{dz}$; car en supposant $\xi = 0$, on a deux valeurs de $\frac{d\omega}{dz}$; savoir, $\frac{d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)}{dz}$ & $\frac{d\left(\frac{\theta'''}{\theta'}\right)}{dz}$; donc, en mettant ϑ' & ϑ'' pour ces valeurs, on aura, par l'*art. 72*, la valeur générale de $\frac{d\omega}{dz}$ égale à $A\vartheta' + D\vartheta'' - \vartheta''\int\frac{\vartheta'\,\xi\,dz}{\vartheta'\,d\vartheta'' - \vartheta''\,d\vartheta'} + \vartheta'\int\frac{\xi\,\vartheta''\,dz}{\vartheta'\,d\vartheta'' - \vartheta''\,d\vartheta'}$; donc la valeur générale de ω, en mettant pour $\vartheta'dz$ & $\vartheta''dz$ leurs valeurs $d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)$ & $d\left(\frac{\theta'''}{\theta'}\right)$, est $C + \frac{A\theta''}{\theta'} + \frac{D\theta'''}{\theta'} - \frac{\theta'''}{\theta'}\int\frac{\vartheta'\,\xi\,dz}{\vartheta'\,d\vartheta'' - \vartheta''\,d\vartheta'}$ $+ \int\frac{\theta'''\,\xi\,\vartheta'\,dz}{\theta'\,(\vartheta'\,d\vartheta'' - \vartheta''\,d\vartheta')} + \frac{\theta''}{\theta'}\int\frac{\vartheta''\,\xi\,dz}{\vartheta'\,d\vartheta'' - \vartheta''\,d\vartheta'}$ $- \int\frac{\theta''\,\vartheta''\,\xi\,dz}{\theta'\,(\vartheta'\,d\vartheta'' - \vartheta''\,d\vartheta')}$; & par conséquent θ ou $\theta'\,\omega = C\theta'$ $+ A\theta'' + D\theta''' - \theta'''\int\frac{\vartheta'\,\xi\,dz}{\vartheta'\,d\vartheta'' - \vartheta''\,d\vartheta'}$ + &c. On peut même

ſupprimer les trois termes $C\theta' + A\theta'' + D\theta'''$, en ſuppoſant les conſtantes C, A, D, renfermées dans les quantités affectées du ſigne $\int$, ce qui eſt permis, & ſimplifiera beaucoup l'expreſſion précédente, en la réduiſant à celle-ci $-\theta'''\int\frac{\vartheta'\xi dz}{\vartheta' d\vartheta'' - \vartheta'' d\vartheta'} + \theta'\int\frac{\theta'''\xi\vartheta' dz}{\theta'(\vartheta' d\vartheta'' - \vartheta'' d\vartheta')}$ $+ \theta''\int\frac{\vartheta''\xi dz}{\vartheta' d\vartheta'' - \vartheta'' d\vartheta'} - \theta'\int\frac{\theta''\xi\vartheta'' dz}{\theta'(\vartheta' d\vartheta'' - \vartheta'' d\vartheta')}$; & on remarquera encore qu'à cauſe de $\vartheta' dz = d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)$ & $\vartheta'' dz = d\left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)$, le ſecond & le quatrième terme ſe réduiſent à $\theta'\int\left[\frac{\xi}{\vartheta' d\vartheta'' - \vartheta'' d\vartheta} \times \left(\frac{\theta'''}{\theta'} d\frac{\theta''}{\theta'} - \frac{\theta''}{\theta'} d\frac{\theta'''}{\theta'}\right)\right]$. Il eſt viſible que par cette formule pour le troiſième ordre, on trouvera aiſément celle du quatrième, comme on a trouvé celle du troiſième par celle du ſecond, & ainſi de ſuite.

(26) Au reſte, pour que les ſéries ſe terminent, il eſt néceſſaire, non-ſeulement que le numérateur d'un des coëfficiens devienne enfin $= 0$, mais encore que le dénominateur ne ſoit pas zéro avant que le numérateur le ſoit. Il faut donc, avant de prononcer ſi la ſérie eſt finie, examiner ſi l'inconvénient dont il s'agit, ne peut pas avoir lieu.

Suppoſons, dans le cas de l'*article 76*, $r = 0$, le numérateur ſera évidemment $bp\,[k - 1 - (1 + \omega)]$, ω étant un nombre entier poſitif (en y comprenant zéro) égal à $\frac{-e}{bp}$; & le dénominateur ſera $p\,(k - 1) \times p\left[k - 1 - \left(\frac{1 - a}{p}\right)\right]$. Or il eſt viſible 1.° que le facteur $k - 1$ du dénominateur ne peut devenir $= 0$; puiſque k ne ſauroit être < 2. 2.° que ſi $\frac{1 - a}{p}$, ou, ce qui eſt la même choſe, $\frac{1 - a}{q + 1}$ eſt un nombre entier poſitif $= 1 + \rho$, ρ pouvant être $= 0$, & ρ étant $< \omega$, $k - 1 - (1 + \rho)$ ſera $= 0$, lorſque $k - 1 - (1 + \omega)$ ne pourra pas encore l'être, étant encore un nombre négatif. Donc ſi $\frac{1 - a}{q + 1}$ eſt un nombre entier poſitif $< 1 - \frac{e}{bp}$ ou $1 - \frac{e}{b(q + 1)}$, alors la ſérie ne ſe terminera pas; $\frac{-e}{bp}$ ou

$\frac{-e}{b(q+1)}$, étant toujours ſuppoſé un nombre entier poſitif.

Maintenant, ſuppoſons dans ce même cas de l'*article 76*, $r = 1 - a$, on aura pour lors $\frac{-e}{b} = p\,\omega + 1 - a$; en ce cas le numérateur deviendra $b\,p\,[(k-1) - (1+\omega)]$, & le dénominateur $[p\,(k-1) + 1 - a]\,p\,(k-1)$, d'où il eſt encore évident que ſi $\frac{a-1}{q+1}$ eſt $=$ à un nombre entier poſitif $1+\rho$, & que ρ ſoit $< \omega$, le dénominateur ſera $= 0$, avant que le numérateur puiſſe le devenir. Donc ſi $\frac{a-1}{q+1}$ eſt égal à un nombre entier poſitif, & $< 1 - \frac{e}{b(q+1)} + \frac{a-1}{q+1}$; c'eſt-à-dire, ſi $\frac{a-1}{q+1}$ eſt un nombre entier poſitif, & que $\frac{e}{b(q+1)}$ ſoit > 1, la ſérie ne ſe terminera pas; $\frac{-e}{b(q+1)} + \frac{a-1}{q+1}$ étant toujours ſuppoſé un nombre entier poſitif.

Dans ces deux cas où ρ eſt $< \omega$, non-ſeulement la ſérie ne ſe termine pas, mais elle a pour un de ſes coëfficiens une quantité infinie, & par conſéquent elle ne peut repréſenter la valeur de y.

Si dans le cas de l'*article 76* & dans celui de l'*article 77*, ρ étoit $= \omega$, alors le coëfficient du terme, dont l'expoſant eſt k, feroit $= \frac{0}{0}$, & par conſéquent pourroit être ſuppoſé tout ce qu'on voudroit. On peut donc le ſuppoſer $= 0$, & en ce cas la ſérie ſe termineroit. Mais on peut auſſi lui donner une valeur arbitraire, & en ce cas la ſérie ira à l'infini, & il y aura deux coëfficiens indéterminés, ſavoir celui du premier terme, & celui du terme dont l'expoſant $k = 2 + \omega$.

Enfin ſi ρ eſt un nombre entier $> \omega$, alors il eſt viſible qu'il y aura encore dans la ſérie un coëfficient $= \frac{0}{0}$, puiſqu'il y en a déjà précédemment un égal à zéro, que tous les coëfficiens ſuivans dépendent de celui-là, & que *(hyp.)* il y a un coëfficient qui eſt égal

au précédent multiplié par $\frac{\mu}{o}$, μ étant le numérateur de la fraction qui exprime ce rapport. Donc alors ce coëfficient pourra être supposé ou zéro, ce qui ne donne point de nouveaux termes à la série; ou indéterminé, ce qui donne une nouvelle série illimitée. L'équation indiquée par M. de la Grange dans les *Mémoires de Turin, tome III, pages 187 & 188*, peut tomber dans ce dernier cas, & j'ai cru que cette remarque, qui n'a point, ce me semble, été faite encore, ne paroîtroit pas inutile aux Géomètres.

Il est à remarquer encore que $\frac{a - 1}{q + 1}$ & $\frac{1 - a}{q + 1}$ ne sauroient être à la fois des nombres entiers positifs; d'où il s'ensuit que, si dans le cas, par exemple, de $r = 0$, un des termes de la série devient infini, il ne le sera pas dans le cas de $r = 1 - a$; & réciproquement. On se servira donc de l'hypothèse où aucun des termes de la série n'est infini, s'il arrivoit qu'il fût infini dans une des deux.

Il est aisé de former une équation différentielle du troisième ordre, analogue à l'équation $\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{b x^q dy}{dx} + \frac{a d y}{x d x} + e y x^{q-1} = 0$, & qui s'intègre de la même manière par une série finie en certains cas. On peut même étendre cette méthode à des différentielles d'un ordre plus élevé. Mais ce que nous en avons dit suffit pour ouvrir la route à ceux qui voudront aller plus loin.

(27) Si dans l'équation différentielle donnée, $\frac{dy}{dx}$ monte à différentes puissances; alors nommant $\frac{dy}{dx}$, ζ, on auroit une équation entre ζ, x, y; on auroit de même *(art. 81)* une équation entre C, ζ, x, y; d'où l'on tirera par les méthodes connues, une équation linéaire de ζ en C, x, y. On mettra cette valeur dans l'équation entre C, ζ, x, y, & on aura une équation entre C, x, y, qui, avec l'intégrale donnée, servira à trouver la valeur linéaire de C; d'où l'on aura celle de ζ ou $\frac{dy}{dx}$, & l'équation finale devra être identique.

Quand même la quantité $\varphi(x, y) = 0$ qu'on suppose exprimer l'intégrale absolue, renfermeroit des expressions algébriques transcendantes, on pourroit toujours parvenir, par la même méthode, à l'équation $C = \Delta(x, y)$.

(28) Il faut donc bien prendre garde, quand une équation intégrale paroît renfermer plusieurs constantes arbitraires qui ne se trouvent point dans la différentielle, si ces constantes n'en représentent pas réellement une seule. C'est de quoi on s'assurera en différentiant l'intégrale, & mettant pour dx sa valeur $-\alpha dy$. Car l'équation résultante doit être identique, ou réductible à une équation identique, en faisant disparoître toutes les constantes successivement.

(29) On prouvera de même que si l'on a une équation différentielle d'un degré quelconque n, & une intégrale qui renferme n constantes arbitraires, ce sera l'intégrale complette de la proposée. Il faut cependant modifier cette assertion par les restrictions énoncées *art. 64*.

(30) Donc toute équation de cette forme, $ddy + \sigma dydx + \xi dy^2 + Xdx^2 = 0$ peut se réduire à la forme $ddz + \rho dzdx + z\vartheta dx^2 = 0$, puisqu'il n'y a qu'à faire $dy = pdx$, & $p = \frac{dz}{z\xi dx}$; c'est-à-dire, $dy = \frac{dz}{z\xi}$.

De même, toute équation de cette forme, $yddy + \xi ydydx + \zeta dy^2 + Xy^2dx^2 = 0$, ($\xi$, ζ, X étant des fonctions de x) peut se réduire à la forme $ddz + \rho dzdx + \vartheta z dx^2 = 0$; car en faisant $y = c^{\int pdx}$, la transformée est $dp + p^2(\zeta + 1)dx + p\xi dx + Xdx = 0$. On fera donc $p = \frac{dz}{z(\zeta + 1)dx}$; c'est-à-dire $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z(\zeta + 1)}$.

(31) Puisque l'équation $dp + \sigma pdx + p^2\xi dx + Xdx = 0$ se réduit à la forme $\frac{ddz}{z\xi} + \frac{dzdx}{z\xi}\left(\frac{\sigma - d\xi}{\xi dx}\right) + Xdx^2 = 0$, & que cette dernière équation étant supposée intégrable, l'équation $\frac{ddz}{z\xi} + \frac{dzdx}{z\xi}\left(\frac{\sigma - d\xi}{\xi dx}\right) + Xdx^2 + \frac{X''}{z}dx^2 = 0$ l'est aussi, X'' étant telle fonction de x qu'on voudra, il s'ensuit que si $dp + \sigma pdx + p^2\xi dx + Xdx^2 = 0$, est intégrable, $dp + \sigma pdx + p^2\xi dx + Xdx^2 + X''c^{-\int p\xi dx} = 0$, le sera aussi.

(32) Comme la valeur particulière $X + Y\sqrt{-1}$, qu'on suppose à y, renferme des imaginaires, on ne sera peut-être pas fâché de voir

comment ces imaginaires peuvent disparoître de l'intégrale générale. Il est d'abord évident que y doit avoir quelques valeurs réelles qui satisfassent à l'équation $dy + yydx + dx(YY - XX) - dX = 0$, puisqu'il y a évidemment une ligne (droite ou courbe) dont les coordonnées x & y satisferont à cette équation, X & Y étant supposées réelles. Car toute équation $dx + \alpha dy = 0$ a toujours une intégrale possible, α étant réelle (*Voy. Tome IV de nos Opuscules, p. 255*). Pour trouver donc dans le cas présent la valeur réelle de y, soit $y = X + Y\sqrt{-1} - z$, & en supposant $X + Y\sqrt{-1} = V$, on aura la transformée $\frac{dz}{zz} + \frac{2Vdz}{z} + dx = 0$ qui donne $z = \frac{c^{-2\int Vdx}}{B + \int c^{-2\int Vdx}dx}$; B étant une constante arbitraire. Faisons $c^{-2\int Vdx} = \xi + \zeta\sqrt{-1}$; & $B = A + C\sqrt{-1}$, & nous aurons $z = \frac{\xi + \zeta\sqrt{-1}}{A + C\sqrt{-1} + \int\xi dx + \int\zeta dx\sqrt{-1}}$; expression qui renfermera une quantité imaginaire de cette forme $\frac{\zeta A - C\xi + \zeta\int\xi dx - \xi\int\zeta dx}{(A + \int\xi dx)^2 + (C + \int\zeta dx)^2} \times \sqrt{-1}$. Il faudra donc que dans l'expression générale $X + Y\sqrt{-1} + z$ de y, on ait $-Y$ égal à $\frac{\zeta A - C\xi + \zeta\int\xi dx - \xi\int\zeta dx}{(A + \int\xi dx)^2 + (C + \int\zeta dx)^2}$. Or, 1.° on a $V = X + Y\sqrt{-1} = X + Ac^{-2\int Xdx}\sqrt{-1}$; par conséquent on trouvera $2\int Vdx$ égal à $2\int Xdx + 2Ydx\sqrt{-1}$, & $c^{-2\int Vdx} = c^{-2\int Xdx} \times c^{-\int 2Ydx\sqrt{-1}} = \frac{Y}{A}c^{-2\int Ydx\sqrt{-1}}$. 2.° Soit $\omega = -2\int Ydx$, on aura $c^{\omega\sqrt{-1}}$ égal à $\text{cos.}\,\omega + (\text{sin.}\,\omega)\sqrt{-1}$, & par conséquent $c^{-2\int Vdx}$ ou $\xi + \zeta\sqrt{-1} = \frac{Y}{A} \times [\text{cos.}\,\omega + (\text{sin.}\,\omega)\sqrt{-1}]$; donc $\xi = \frac{Y}{A}\text{cos.}\,\omega$, & $\zeta = \frac{Y}{A}\text{sin.}\,\omega$, donc $\xi dx = \frac{Ydx}{A} \times \text{cosin.}(-2\int Ydx)$, & $\zeta dx = \frac{Ydx}{A}\text{sin.}(-2\int Ydx)$; donc $\int\xi dx = \frac{1}{2A}\text{sin.}(2\int Ydx)$, & $\int\zeta dx = \frac{1}{2A}[\text{cos.}(2\int Ydx) - 1]$. Donc la partie imaginaire de la valeur de z sera

$= Y$ sin. $-2\int Ydx - \frac{YC}{A}$ cos. $-2\int Ydx - \frac{Y}{2A^2}$ (sin. $2\int Ydx)^2$ $- \frac{Y}{2A^2}$ (cos. $-2\int Ydx)^2 + \frac{Y}{2A^2}$ cos. $-2\int Ydx$, le tout multiplié par $\sqrt{-1}$, & divisé par $AA +$ sin. $2\int Ydx + \frac{(\text{sin. } 2\int Ydx)^2}{4A^2}$ $+ CC + \frac{C}{A}$ cos. $2\int Ydx - \frac{C}{A} + \frac{1}{4A^2}$ (cos. $2\int Ydx)^2 - \frac{2 \text{ cos. } 2\int Ydx}{4A^2} + \frac{1}{4A^2}$; c'est-à-dire, $- Y$ sin. $2\int Ydx - \frac{YC}{A} \times$ cos. $2\int Ydx - \frac{Y}{2A^2} + \frac{Y}{2A^2}$ cos. $2\int Ydx$, multiplié par $\sqrt{-1}$ & divisé par $AA + CC - \frac{C}{A} +$ sin. $2\int Ydx + \frac{C}{A}$ cos. $2\int Ydx + \frac{1}{2A^2} - \frac{1}{2A^2}$ cos. $2\int Ydx$. D'où il est clair que si $AA + CC - \frac{C}{A} = 0$, cette quantité se réduit à $-Y\sqrt{-1}$ & que par conséquent y ou $X + Y\sqrt{-1} + z$ deviendra une quantité absolument réelle, puisque les imaginaires s'y détruiront. C'est pourquoi supposant C réelle & quelconque, si on prend A égale à une des racines de l'équation cubique $A^3 + CCA - C = 0$, qui en a toujours au moins une réelle, on aura l'expression de y en quantités réelles. Cet essai suffit pour faire voir comment les imaginaires peuvent disparoître dans des cas plus compliqués.

(33) Donc la formule $dy + yydx + \frac{adx}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} = 0$, est intégrable, comme M. Euler l'a déjà fait voir dans les *Mémoires de Péterbourg, tome VIII.*

Par la même raison, on pourra intégrer l'équation $dy + byydx + \frac{a.dx}{(\alpha + \beta x + \gamma xx)^2} = 0$, puisqu'il n'y a qu'à la multiplier par b, & faire $by = y'$, ce qui la réduira au cas précédent.

Soit $u = A(\alpha + \gamma x^n)$, on aura $X' = [-2\alpha\gamma n \times (n-1) \times x^{n-2} + (2\gamma\gamma n - \gamma\gamma nn) x^{2n-2} + 4A^{-2}] : [4(\alpha + \gamma x^n)^2$; donc l'équation $dy + yydx + \frac{Bx^{n-2}dx + Cdx + Ex^{2n-2}dx}{(\alpha \pm \gamma x^n)^2}$

$= 0$, eſt intégrable, pourvu que $B = -\frac{\alpha\gamma n(n-1)}{2}$ & $E = \frac{2\gamma\gamma n - \gamma\gamma n^2}{4}$; C étant d'ailleurs tout ce qu'on voudra.

(34) Soit ſuppoſé $\xi' = \frac{p\,d\xi}{dx}$, p étant une conſtante quelconque; on aura $\left(\text{à cauſe de } X\xi' = \frac{a\,d(X\xi)}{dx}\right)$, $\frac{dX}{X} = \frac{(-a+p)\,d\xi}{a\xi}$; & $X = B\xi^{\frac{p-a}{a}}$; B étant une conſtante quelconque; enſuite l'équation $d(X\zeta) + (a-1)X\xi\,dx + b\,dx = 0$, donnera $X\zeta + (a-1)\int X\xi\,dx + bx + e = 0$, c'eſt-à-dire, $B\zeta \times \xi^{\frac{p-a}{a}} + (a-1)\int B\xi^{\frac{p}{a}}\,dx + bx + e = 0$. Soit enfin ſuppoſé $\xi = Cx^n$, on aura $B\zeta C^{\frac{p-a}{a}} x^{\frac{np-na}{a}} + \frac{(a-1)BC^{\frac{p}{a}} x^{\frac{np}{a}+1}}{\frac{np}{a}+1} + bx + e = 0$; donc toute équation de cette forme, $\zeta\,ddu + Cx^n\,du\,dx + pn \times Cx^{n-1}u\,dx^2 = 0$, ſera intégrable, ſi $\zeta = \frac{(1-a)Cx^{n+1}}{\frac{np}{a}+1} - \frac{bx^{\frac{-np}{a}+n+1}}{BC^{\frac{p-a}{a}}} - \frac{ex^{\frac{-np}{a}+n}}{BC^{\frac{p-a}{a}}}$; c'eſt-à-dire, qu'en général ſi on a $\zeta\,ddu + Cx^n\,du\,dx + Kx^{n-1}u\,dx^2 = 0$; l'équation ſera intégrable, en ſuppoſant $\zeta = Mx^{n+1} + Nx^{\frac{-np}{a}+n+1} + Fx^{\frac{-np}{a}+n}$ N, F étant des conſtantes quelconques, $\frac{-np}{a}$ étant un nombre λ tel qu'on voudra;

voudra, $n\,p$ étant $= \frac{K}{C}$, ce qui donne $a = \frac{-K}{\lambda C}$, & M étant tel que $\frac{(1-a)C}{\frac{K}{Ca}+1} = M$, ou $M = \frac{\lambda C + K}{\lambda - \lambda\lambda}$.

On trouveroit de même d'autres cas d'intégration encore plus compliqués, en faisant $\xi = C x^n + D x^p +$ &c. On en trouveroit encore d'autres en supposant $\xi = A c^{qx} + B c^{rx}$ &c. Et ainsi du reste.

(35) Il semble d'abord que l'intégration de $ddX - \xi dXdx + X\left(\xi' - \frac{d\xi}{dx}\right) dx^2 = 0$, puisse se réduire de même à l'intégration d'une autre équation $ddz + \zeta' dz dx + z X' dx^2 = 0$; dans laquelle les coëfficiens seront encore différens, & que par conséquent on puisse ainsi transformer la différentielle proposée $ddu + \xi du dx + \xi' u dx^2 = 0$ en une infinité d'autres de même forme & de coëfficiens différens, ce qui faciliteroit l'intégration en plusieurs cas. Mais on aperçoit bientôt que comme $ddu + \xi du dx + \xi' u dx^2 = 0$ a donné $ddX - \xi dX dx + X dx^2 \left(\xi' - \frac{d\xi}{dx}\right) = 0$, cette dernière donnera $ddz + \xi dz dx + \xi' z dx^2 = 0$, ce qui retombe dans l'équation donnée.

(36) Soit dans l'équation $t^n = \frac{X dx^2}{\xi dt^2} + \frac{\rho ddx}{\xi dt^2}$, $dx = T dt$, on aura $t^n \xi dt = X T^2 dt + \rho dT$, & en mettant dans X, ξ, ρ, au lieu de x sa valeur $\int T dt$, on aura une équation où il ne se trouvera plus que deux inconnues, T, t, avec leurs différences.

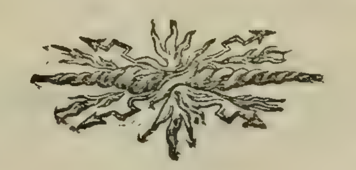
(37) Si on avoit simplement $ddt + N^2 t dz^2 + \alpha T dz^2 = 0$, T ne contenant point ω, mais une suite de puissances de t, il est clair qu'on pourroit employer la même méthode.

Quand on aura réduit le problème à intégrer une équation de cette forme, $d^n t + A d^{n-1} t dz + B d^{n-2} t dz^2 \ldots + F t dz^n = 0$, en négligeant les termes $\alpha^p dz^n \varphi(t, \omega)$ on supposera $t = c^{fz}$; & il faudra, pour que la valeur de t ne renferme point d'arcs de cercle, que

l'équation en f soit paire, qu'elle manque de ses termes pairs, & que toutes ses racines soient réelles & négatives.

Dans les autres cas, l'intégrale approchée qu'on trouvera, ne pourra servir que pour un certain nombre de révolutions, qui pourra être d'autant plus grand que α sera plus petit.

Les Recherches sur le Calcul intégral, que nous avons données dans ce Mémoire & dans les Notes, non-seulement renferment la démonstration des *XLIX Théorèmes*, la plupart assez généraux, énoncés dans le Volume des *Mém. de 1767, pages 573 & suivantes*, mais contiennent encore beaucoup d'autres Théorèmes sur l'intégration des quantités & des équations différentielles; Théorèmes qui pourront être utiles dans un très-grand nombre de cas. Nous aurions pu même étendre encore davantage ces différens Théorèmes, comme il n'est pas difficile de le voir, si on a bien saisi l'esprit de nos méthodes dans les différentes solutions que nous avons données. Pour n'en citer qu'un seul exemple, il est aisé de voir que les différentielles, dont nous avons réduit l'intégrale, *p. 116*, à la rectification des Sections coniques, y seront encore réductibles, si le dénominateur de ces différentielles, composé de deux membres radicaux, est élevé à un exposant quelconque p, qui soit un nombre entier impair & positif, pourvu que l'exposant t de z dans le numérateur, ait les conditions que nous avons indiquées. C'est un objet sur lequel nous pourrons revenir dans une autre occasion; la longueur déjà trop grande de ce Mémoire nous obligeant de le terminer ici.



OBSERVATIONS

De l'OPPOSITION DE JUPITER, du 8 Mai; du PASSAGE DE VÉNUS au-devant du Soleil, du 3 Juin; & de l'ÉCLIPSE DE SOLEIL, du 4 Juin 1769.

*Faites à l'École Royale Militaire.**

Par M. JEAURAT.

CES Obſervations ſont les premières que j'ai faites dans l'Obſervatoire que le Conſeil de l'École Royale Militaire m'a fait conſtruire, avec une généroſité d'autant plus digne des éloges & de la reconnoiſſance des Savans, que les Sciences ont plus beſoin de pareils ſecours, & les trouvent plus rarement. 7 Juin 1769.

Cet Obſervatoire eſt conſtruit avec toute l'attention & la ſolidité deſirables. J'y avois une muraille de deux pieds d'épaiſſeur, dirigée exactement dans le plan du méridien, & deſtinée à recevoir un quart-de-cercle mural de dix pieds de rayon; il y a une plate-forme, & ſpécialement une tourelle de dix pieds dans œuvre, dont la conſtruction eſt auſſi ingénieuſe que nouvelle: elle eſt de l'invention de M. Taboureux, maître Charpentier.

Comme cet habile Artiſte en a préſenté la deſcription à l'Académie, je dirai ſeulement ici, que le toit tournant qui la couvre, n'eſt point porté ſur un pivot, qu'on ſoulève ordinairement avec difficulté, à l'aide d'une vis qui traverſe un écrou fixé à quatre conſoles, fixées elles-mêmes ſur le mur circulaire de la tourelle. Ici la totalité du toit tournant eſt aſſemblée dans une ſablière ſupérieure, dont le pendentif s'enclave dans la rainure d'une ſablière inférieure & immobile. C'eſt dans cette rainure que ſe meut horizontalement, ſur des roulettes, la

* Les Obſervations que fera par la ſuite M. Jeaureat, ſeront faites à l'Obſervatoire Royal même, car il va y occuper le logement de feu M. l'Abbé Chappe d'Auteroche.

ſablière ſupérieure, & par conſéquent la totalité du comble, & cela à l'aide d'un engrénage ſi aiſé, qu'un enfant ſeroit faire au toit un tour entier en moins de cinq minutes.

Dans les premiers jours de Mai, j'ai fait tranſporter à mon nouvel Obſervatoire mes inſtrumens : ſavoir, mon ſecteur de quatre pieds de rayon, de la conſtruction du ſieur Canivet; mon inſtrument des paſſages, de la conſtruction du ſieur Paris; une lunette ordinaire de huit pieds, & une lunette achromatique de vingt-un pouces. *

Oppoſition de Jupiter du 8 Mai 1769.

J'ai obſervé Jupiter avec la lunette de mon inſtrument des paſſages, & comme je n'avois pas encore eu le temps de rectifier avec exactitude la première poſition de mon inſtrument des paſſages dans le plan du méridien, cet inſtrument s'eſt trouvé éloigné du méridien de 13 ſecondes de temps; ce qui, comme on ſait, n'eſt point ſuſceptible d'inconvéniens, ſur-tout quand il n'eſt queſtion que de déterminer des différences d'aſcenſions droites & de déclinaiſons. C'eſt donc 13 ſecondes avant les vrais paſſages au méridien, que Jupiter a été comparé, les 5, 7, 10, 11 & 12 Mai, avec l'étoile *y* du Corbeau. Voici la poſition apparente de cette étoile.

Aſcenſion droite apparente.......	181^d 0′ 13″	
Déclinaiſon apparente.............	16. 15. 52	Auſtrale.

Une remarque favorable aux obſervations que j'ai faites de l'oppoſition de Jupiter, c'eſt que mes différences d'aſcenſion droite ſe ſont trouvées exactement conformes à celles qu'a obſervées M. Caſſini, & que mes différences en déclinaiſons ne diffèrent de celles de M. Caſſini que d'environ quatre à cinq ſecondes.

De mes obſervations de Jupiter, il réſulte que ſon oppoſition

* Dans le volume de 1770, qui ſuivra celui-ci, on trouvera un Mémoire de M. Jeaurat, contenant les dimenſions qu'il a trouvé pour les objectifs achromatiques, compoſés de cinq, de quatre, de trois & de deux lentilles, calculée depuis deux pouces de foyer juſqu'à vingt pieds.

avec le Soleil est arrivée le 8 Mai 1769 à $1^h 7' 4''$, temps vrai, & à $1^h 3' 16''$, temps moyen.

La longitude héliocentrique observée de Jupiter étoit pour cet instant,				
Dans l'écliptique, de	7^f	18^d	$7'$	$17''$
Dans l'orbite, de	7.	18.	6.	49
De plus, la latitude géocentrique de Jupiter étoit de $1^d 14' 15''$ Boréale; & la longitude calculée avec les Tables de M. Cassini, étoit de	7.	18.	7.	34
Calculée avec mes Tables, de	7.	18.	11.	0
D'où il suit que l'Anomalie moyenne de Jupiter étant, selon M. Cassini, de	1.	11.	2.	17
Et selon moi, de	1.	10.	55.	2
L'erreur des Tables de M. Cassini est de		+	0.	45
Et l'erreur de mes Tables, de		+	4.	11

D'où l'on voit que cette observation est favorable aux Tables de M. Cassini, & qu'elle est au contraire défavorable aux miennes.

ANNÉE 1769.	TEMPS DE LA PENDULE.		TEMPS VRAI.	DIFFÉRENCES	
	γ du CORBEAU.	JUPITER.	JUPITER.	des ASCENS. DROITES.	des DÉCLINAIS.
5 Mai.	$9^h 10' 18''$	$12^h 11' 6''$	$12^h 12' 26''$	$+45^d 19' 21''$	
7 Mai.	9. 2. 21	12. 2. 10	12. 3. 38	+45. 4. 43	$-11' 5''$
10 Mai.	8. 50. 25	11. 48. 42	11. 50. 27	+44. 41. 37	−17. 30
11 Mai.	8. 46. 28	11. 44. 14	11. 46. 1	+44. 33. 49	−19. 40
12 Mai.	8. 42. 31	11. 39. 47	11. 41. 37	+44. 26. 19	

CALCUL des Observations précédentes.

	TEMPS VRAI.	ASCENSION DROITE de JUPITER.	DÉCLINAISON de JUPITER.
5 Mai...	$12^h 12' 26''$	$226^d 19' 34''$	
7 Mai...	12. 3. 38	226. 4. 56	$16^d 4' 47''$ A.
10 Mai...	11. 50. 27	225. 41. 50	15. 58. 22 A
11 Mai...	11. 46. 1	225. 34. 2	15. 56. 22 A.
12 Mai...	11. 41. 37	225. 26. 32	

Paſſage de Vénus ſur le diſque du Soleil, du 3 Juin 1769.

Quant à l'obſervation du paſſage de Vénus, il ne m'étoit pas poſſible de la faire dans mon obſervatoire, car on n'y découvre pas l'horizon au couchant; & ce phénomène ſi rare & ſi important pour la détermination de la parallaxe du Soleil, ne devoit commencer qu'environ 42 minutes avant le coucher du Soleil. J'ai donc tranſporté mes inſtrumens dans une chambre d'un des nouveaux pavillons de l'hôtel: j'y étois on ne peut pas plus commodément pour cette obſervation; mais le temps a été ſi fâcheux, qu'il s'en eſt peu fallu que mes peines ne devinſſent entièrement inutiles. Il pleuvoit à-verſe à 7 heures 20 minutes; & le premier bord de Vénus entroit vraiſemblablement alors ſur le Soleil. A 7 heures 30 minutes, le Soleil s'eſt montré; Vénus étoit à peu près entrée ſur le diſque du Soleil des trois quarts de ſon diamètre. Le Soleil s'étant encore caché, il ne s'eſt montré de nouveau qu'à 7 heures 40 minutes; alors l'entrée du ſecond bord du diſque de Vénus étoit faite, & il ne reſtoit plus que 11 minutes de temps pour obſerver; car la montagne, & ſur-tout l'égliſe des Bons-hommes, a maſqué le Soleil environ 6 minutes avant ſon coucher.

Le parti que j'ai pris a été d'obſerver aux fils vertical & horizontal de ma lunette, les paſſages des bords inférieurs & ſupérieurs, & ceux des bords orientaux & occidentaux du Soleil & de Vénus: j'ai donc trouvé qu'à $7^h\ 41'\ 25''$, temps vrai à l'École Militaire, le centre de Vénus étoit à droite de celui du Soleil, de $1'\ 15''$; & plus bas que le bord ſupérieur du Soleil, de $1'\ 9''$.

De cette obſervation, il réſulte qu'à $7^h\ 21'\ 25''$, temps vrai, Vénus avoit

Pour aſcenſion droite.	$72^d\ 5'\ 18''$
Pour déclinaiſon boréale.	22. 38. 54

Lorſque Vénus étoit entrée aux trois quarts de ſon diamètre ſur le Soleil, j'ai aperçu la partie de Vénus qui étoit au-dehors du

Soleil; mais je n'ai point vu d'anneau lumineux qui entourât la Planète, quoique les extrémités de son disque ne m'aient pas paru être bien exactement tranchées: & après l'entrée totale de Vénus sur le disque du Soleil, j'ai vu autour de la Planète une espèce de cercle rougeâtre, que je crois avoir été occasionné par l'effet de la réfraction qui est considérable dans les approches de l'horizon.

Observations de Vénus, faites aux fils vertical & horizontal de ma lunette.

	TEMPS VRAI DES PASSAGES	
	au fil horizont.	au fil vertical.
Bord inférieur du Soleil............	7h 41′ 54″	
Bord occidental du Soleil...........	....	7h 43′ 4″
Bord occidental de Vénus............	....	7. 44. 23
Bord oriental de Vénus..............	....	7. 44. 27
Bord inférieur de Vénus.............	7. 45. 22	
Bord supérieur de Vénus.............	7. 45. 28	
Bord supérieur du Soleil............	7. 45. 33	
Bord oriental du Soleil.............	....	7. 45. 56
Bord occidental du Soleil...........	....	7. 47. 58
Bord occidental de Vénus............	....	7. 49. 10
Bord oriental de Vénus..............	....	7. 49. 15
Bord oriental du Soleil.............	....	7. 50. 51
Coucher du Soleil (derrière l'église des Bons-hommes)...		7. 51. 18

Éclipse de Soleil du 4 Juin 1769.

Le 4 Juin au matin le temps a été très-favorable pour observer l'éclipse de Soleil; mais le prompt déménagement qu'il m'a fallu

faire de mes instrumens, pour les replacer dans mon observatoire; ne m'a pas permis de me disposer comme il auroit convenu pour cette observation; cependant on peut compter sur ceci.

Commencement de l'Éclipse à.....	6^h	46′	40″	Temps vrai à l'École Royale militaire.
Grandeur, 5 doigts $\frac{1}{3}$ ou 14′ 0″ à...	7.	7.	0	
Fin de l'Éclipse à..............	8.	27.	4	
Durée totale	1.	40.	24	

Cette Éclipse a commencé 3′ 7″ & a fini 2′ 49″ plus tôt que le calcul ne l'avoit donné *(Connoissance des Temps de 1769)*.



MÉMOIRE

MÉMOIRE

Sur la néceſſité qu'il y a, dans les Eſſais ordinaires des matières d'Argent, d'extraire des coupelles la particule d'Argent fin qu'elles retiennent toujours, pour écarter les variations auxquelles cette opération eſt ſujette, & connoître ſûrement le titre intrinsèque de ces matières.

Par M. TILLET.

SI les connoiſſances d'un certain ordre, & principalement celles dont l'intérêt public eſt le grand objet, méritent que l'eſprit s'y porte par choix, & s'en occupe tout entier, il ſemble auſſi qu'il ſoit attaché à ces connoiſſances, qu'on ne puiſſe les acquérir que par des degrés inſenſibles, & en revenant quelquefois ſur ſes pas pour prendre des voies différentes de celles qui avoient d'abord paru conduire directement au but. On eſt encore trop heureux, dans les pénibles recherches qu'exigent les vérités phyſiques, d'avoir ſaiſi des faits qui portent la lumière avec eux, ſur leſquels des expériences multipliées ne laiſſent aucun doute, & qui ſont comme autant de points fixes qu'il n'eſt plus poſſible de perdre de vue à meſure qu'on avance dans le travail qu'on a entrepris. Alors ces points fixes dont je parle empêchent qu'on ne tombe dans des écarts importans; & ſi l'on ne tire pas de ſes recherches toute l'utilité qu'on ſe propoſe, au moins en obtient-on quelques avantages certains. D'ailleurs, ne doit-on pas compter pour beaucoup d'avoir aplani une route dans laquelle des hommes plus éclairés & moins diſtraits par les obſtacles, peuvent marcher facilement dans la ſuite, & toucher enfin au terme où il s'agiſſoit d'aboutir? Ceux qui ont frayé cette route, ne ſont pas parvenus au but, il eſt vrai, mais ils y ont aſpiré; ils y ont dirigé leur

travail ; & si les bornes de leurs lumières les ont forcés de laisser à des hommes de génie l'honneur d'atteindre au point de perfection, ils partagent au moins avec eux la satisfaction plus solide d'avoir concouru au bien de la société.

Cette réflexion s'est présentée à mon esprit, dès le moment où j'ai pris la plume pour rendre compte à l'Académie des nouvelles expériences que j'ai faites sur la manière de fixer le titre des matières d'argent. Je suis sans doute plus instruit aujourd'hui que je ne l'étois dans le temps où j'ai publié plusieurs Mémoires sur ce sujet; mais je n'en deviens que plus réservé dans les assertions dont il est susceptible. Je n'y avois vu d'abord qu'une certaine perfection à donner aux opérations que les Métallurgistes connoissent, & je comptois qu'elle n'étoit pas absolument difficile à procurer; mais de bonne foi avec moi-même, & sentant toute l'importance de la matière dont il s'agit, j'ai reconnu & j'avoue que la méthode ordinaire de faire les essais, avec quelqu'attention qu'on la suive, laisse encore des incertitudes sur le véritable titre des matières. Il n'y a qu'un moyen de le fixer rigoureusement, si l'on suit la méthode usitée; j'en ai parlé dans mes précédens Mémoires: j'ai eu pour but, sur-tout dans le dernier qui fait partie du Recueil de l'Académie pour l'année 1763, de prouver que ce moyen réuni à la méthode ordinaire, est le meilleur qu'on puisse choisir, & j'espère que le compte que je vais rendre de mes nouvelles expériences, ne laissera subsister aucun doute à cet égard. J'aurois insisté précédemment sur la nécessité de recourir à ce moyen, pour obtenir le titre des matières dans toute sa justesse, s'il ne rendoit pas l'opération des Essayeurs plus longue, plus délicate, & si, d'un autre côté, elle n'intéressoit pas l'ordre politique: j'ai donc cru devoir examiner d'abord si une exactitude constante pouvoit naître de la méthode ordinaire, prise dans toute sa perfection, mais restreinte aux procédés que les meilleurs Chimistes ont prescrits jusqu'ici. Cette exactitude ne s'étant point annoncée dans une multitude d'expériences variées de toutes les manières où je tâchois de l'obtenir, j'ai conclu qu'il falloit, quelque peine qu'il en coûtât, recourir au moyen qui procure seul la certitude, le publier comme tel,

ſauf à la ſageſſe du Gouvernement à l'adopter, après qu'il auroit été convaincu de la préciſion qui réſulte de ce moyen, & qu'il ſe ſeroit occupé enſuite des intérêts du Commerce ſur leſquels une manière nouvelle de fixer le titre des matières influeroit eſſentiellement.

Je commencerai par expoſer dans ce Mémoire les expériences que j'ai faites pour tâcher de découvrir la cauſe des variations des Eſſayeurs dans les rapports qu'ils donnent journellement du titre d'une même matière, & pour y remédier ſi l'art pouvoit aller juſque-là. Je prouverai en ſecond lieu que les opérations ordinaires en ce genre, & qui paroiſſent bien faites, ſont encore vicieuſes radicalement; qu'elles ne ſauroient conduire ſeules à l'exactitude qu'on y ſuppoſe cependant comme attachée & comme formant la règle déciſive du prix des matières d'argent. Je rappellerai enſuite le moyen certain de déterminer leur titre, & de le retrouver toujours le même, quand une fois il aura été bien établi: je parlerai de l'utilité que le Commerce tireroit de cette manière nouvelle d'opérer; & je finirai par quelques réflexions ſur la néceſſité qu'il y auroit qu'on l'adoptât généralement, pour qu'elle produisît les effets avantageux qui s'y trouvent joints.

Les variations qu'on remarque aſſez ſouvent dans des opérations correſpondantes que font quelquefois pluſieurs Eſſayeurs, tandis qu'il ſemble que l'uniformité devroit toujours s'y trouver, puiſque leur méthode eſt la même; les variations qu'éprouve un Eſſayeur en particulier, lorſqu'il répète ſes expériences pour en être plus certain, peuvent avoir pluſieurs cauſes différentes: leurs balances n'ont pas toujours la ſenſibilité & la préciſion néceſſaires; leurs poids manquent quelquefois de juſteſſe; les matières qu'ils eſſaient, & qui communément ne ſont pas pures, peuvent avoir été mal fondues; l'alliage peut s'y trouver inégalement répandu; le plomb dont ils font uſage contient quelquefois des matières étrangères qui nuiſent à leurs opérations. Ce même plomb n'eſt preſque jamais dépouillé totalement d'argent; il peut arriver, lorſqu'il en contient, que cet argent ne ſoit pas également diſtribué dans toute la maſſe de plomb d'où les Eſſayeurs tirent les parties qu'ils emploient journellement, & dès-lors leurs boutons d'eſſais s'en

trouveront plus ou moins enrichis. Si les Essayeurs tiennent d'ailleurs au préjugé que les doses de plomb plus ou moins fortes ne nuisent point à la perfection des essais, ils ne s'astreindront pas peut-être aux règles prescrites sur ce point, & ils ajouteront par-là de nouvelles causes de variation à celles qui sont attachées à leur art. La conduite du feu, & ceci est le principal, n'aura pas été souvent l'objet de toute leur attention; il leur aura suffi que les boutons d'essais soient sortis des coupelles avec toutes les apparences d'un affinage complet, pour qu'ils aient compté sur l'exactitude de leur travail, tandis que ces mêmes boutons d'essais, ou contiendront encore une petite portion d'alliage, ou poussés trop vivement, auront plus perdu en matière précieuse que les essais bien conduits n'en perdent communément. Il n'est pas rare, d'un autre côté, que les Essayeurs, après avoir ôté des coupelles les boutons d'essais, négligent d'en examiner le bassin & de recueillir les petits globules d'argent fin qui y restent quelquefois adhérens & font partie du bouton qui détermine le titre. La perte sur ce bouton d'essai deviendra de toute une autre conséquence, & occasionnera une plus grande erreur si la matière, en fusion dans la coupelle, a éprouvé quelque pétillement auquel l'Essayeur ne se soit pas rendu attentif; il ne lui est plus possible alors de compter ni sur l'essai où ce pétillement a eu lieu, ni sur ceux qui pouvoient être à côté, puisque l'un a perdu quelques parties de sa matière propre, & les autres en ont reçu qui leur sont étrangères.

A ces causes ordinaires d'incertitude dans l'opération des essais, il faut ajouter celles qui peuvent naître du calcul & de la confusion des poids, dont quelques-uns échappent presqu'aux yeux, & qui, trop foibles pour porter le plus petit numéro, ne sauroient être distingués les uns des autres que par une légère différence dans leur dimension & par la grande habitude de les voir. On sent en effet que le rapport des Essayeurs peut varier quelquefois par cette dernière raison seule, & malgré toutes les précautions qu'ils auroient prises pour que leurs opérations eussent d'ailleurs toute l'exactitude dont elles sont susceptibles.

Ces différentes causes d'erreur n'y influent que trop ordinairement, mais il est possible de les écarter: d'excellens instrumens,

la connoiſſance des bons principes, une longue pratique & une attention ſcrupuleuſe peuvent mettre un Eſſayeur en état de n'avoir point à ſe reprocher la plupart des variations qu'il éprouve dans ſon art. La méthode uſitée d'eſſayer n'auroit même rien de défectueux, s'il ne s'agiſſoit que de ſaiſir le point de perfection qu'on y connoît pour obtenir l'exactitude conſtante du travail: on eſt trop heureux en effet d'aboutir toujours à la vérité, ſur-tout en matière importante, quelque difficile que ſoit le ſentier qui nous y conduit. Ainſi il ne ſera point queſtion dans ce Mémoire des cauſes d'incertitude dans les eſſais qu'il eſt au pouvoir d'un Artiſte d'éviter; ce n'eſt point de ce côté qu'il eſt eſſentiel de porter ſa vue: je prie même l'Académie d'être perſuadée que j'ai pris dans les expériences dont je vais lui rendre compte, toutes les précautions qui étoient néceſſaires pour qu'on ne pût attribuer à aucune des cauſes que j'ai rapportées plus haut, les variations que j'aurai lieu de faire obſerver, lorſque mes opérations ſe trouveront bornées aux procédés ſeuls que les Eſſayeurs emploient. Au ſurplus l'expoſé de mon travail & les réſultats feront aſſez connoître que les variations qu'on y remarquera ont toute une autre cauſe que celles dont j'ai parlé, ou que ſi elle tient à une d'entr'elles, je veux dire la difficulté qu'il y a dans le régime du feu, cette cauſe eſt tellement enveloppée, qu'il ne ſera peut-être jamais poſſible de l'écarter entièrement.

Dès que l'on voudra bien ſuppoſer par conſéquent que les balances dont je fais uſage ſont ce qu'il y a de plus parfait en ce genre; que mes poids vérifiés dans ces mêmes balances, ont toute la préciſion requiſe; que le plomb que j'emploie eſt très-pauvre, & que la particule d'argent qu'il contient eſt également diſtribuée dans toute la maſſe de laquelle je tire les portions dont j'ai beſoin; ſi l'on veut bien ſuppoſer encore que les coupelles qui me ſervent ſont de la nature de celles que des expériences ſans nombre ont autoriſé à regarder comme les meilleures & dont l'uſage a été ordonné par un règlement authentique, je n'aurai plus qu'à m'expliquer ſur deux points eſſentiels & relatifs aux cauſes d'incertitude dans les eſſais; j'entends premièrement la matière d'argent alliée qui ſera la baſe des expériences, & en ſecond lieu la manière de

conduire le feu pendant l'opération : les difficultés se trouveront resserrées par-là dans un cercle plus étroit ; l'attention moins partagée se portera d'elle-même vers les objets dont il importe le plus de s'occuper, & il deviendra évident que la méthode ordinaire d'essayer, avec quelque soin qu'on la suive, ne conduit point à une exactitude constante, à moins qu'on n'y ajoute le procédé dont j'ai donné les détails en 1763 *.

* Mém. Acad. p. 58.

Les matières d'argent alliées qui circulent dans le commerce, soit en lingots, soit en vaisselle, sont regardées communément comme assez bien fondues pour que l'essai d'une très-petite portion de ces matières donne lieu d'assurer que le cuivre dont elles sont plus ou moins chargées est distribué également dans toute la masse, & pour que cette opération décide de la valeur intrinsèque de leur totalité ; mais il arrive quelquefois que cette distribution n'est pas aussi parfaite qu'on l'imagine, ou par une suite de quelque fraude que je ne développerai point ici, ou par un défaut d'attention de la part des Fondeurs. On sent en effet que deux matières dont la pesanteur spécifique est différente & qui sont en fusion, ne resteront pas mêlées dans la proportion qu'on a établie, si on les laisse tranquilles dans le creuset, & qu'on court risque d'avoir des lingots ou des pièces moulées dont le titre de chacun variera, si avant que de jeter ces matières dans des lingotières ou dans des moules, on n'a pas l'attention de les remuer à plusieurs reprises, & pour me servir des termes de l'art, de les bien *brasser* dans le creuset.

Il étoit trop important, dans les expériences dont j'étois occupé, que j'eusse une matière d'argent où l'alliage fût également répandu, pour que je ne prisse pas toutes les précautions qui pouvoient me la procurer. Convaincu par l'usage que l'argent & le cuivre fondus ensemble en petite quantité, ne se trouvent pas aussi-bien mêlés communément que lorsqu'on les fond en grande masse, parce qu'il est moins facile dans le premier cas que dans le second, de brasser parfaitement ces deux métaux, je me déterminai à tirer la portion de matière d'argent alliée que je devois soumettre à un grand nombre d'essais d'une quantité de 17 à 1800 marcs d'argent, qui étoit chargée d'un douzième d'alliage ou environ, &

qui avoit été fondue tout enſemble dans un creuſet de fer. Lorſqu'on eut bien braſſé cette maſſe conſidérable d'argent, qu'on eut même vidé en partie le creuſet, ce qui avoit contribué à un mélange plus complet de la matière, on verſa dans un moule une trentaine de marcs de cet argent parfaitement en fuſion & ſans ceſſe agité: ce fut la partie la plus compacte de la matière qui ſortit du moule, que je pris pour mes opérations, après l'avoir laminée & dépouillée avec ſoin des ordures légères qui s'y étoient attachées. On verra par le réſultat de mes expériences que j'étois parvenu à mon but; que les moindres parties de l'argent que j'avois choiſi, contenoient chacune, dans leur proportion, une égale quantité d'alliage, & qu'elles repréſentoient auſſi proportionnellement l'alliage de la maſſe entière.

Le régime du feu dans l'opération des eſſais, a toujours été regardé avec raiſon comme un point très-important ſur lequel l'Artiſte n'acquiert des connoiſſances que par une longue habitude & par l'étude qu'il en fait, à meſure que des circonſtances particulières lui donnent lieu de croire que les variations qu'il éprouve dans ſon travail peuvent être dûes à la manière dont il conduit le feu.

On ſait que les fourneaux d'eſſais ordinaires ſont conſtruits de façon qu'ils ne peuvent donner qu'une chaleur modérée, mais telle que l'opération l'exige: la mouffle dans laquelle les coupelles ſont renfermées, reçoit la chaleur des charbons dont elle eſt couverte, de ceux qui tombent dans le cendrier, à meſure qu'ils ſe conſument & paſſent entr'elle & les parois intérieures du fourneau, de ceux enfin dont on garnit, ou le cendrier pour chauffer immédiatement le deſſous de la mouffle, ou l'embouchure de cette même mouffle, afin que dans l'intérieur elle prenne plus promptement le degré de chaleur qui lui eſt communiqué par le dehors.

Les charbons dont la mouffle eſt couverte, & ceux qu'on met au-deſſous d'elle, ne ſont animés que par l'air aſſez tranquille qui entre dans le fourneau à la faveur des ouvertures qui ſont pratiquées au-devant & aux deux côtés du cendrier; cet air ne s'échappe par l'extrémité ſupérieure du fourneau, qu'autant qu'il ſe fait jour peu à peu autour de la mouffle & à travers les petits

vides qu'y laiſſe le charbon en ſe conſumant: la chaleur qu'il eſt capable d'exciter, le fourneau étant ainſi conſtruit, n'a donc rien que de modéré, & ne ſauroit être portée plus loin dans le cas où elle deviendroit néceſſaire.

Le pyromètre dont j'ai donné la deſcription dans un Mémoire qui fait partie du recueil de l'Académie pour l'année 1760*, eſt relatif & applicable aux fourneaux d'eſſais tels qu'on les conſtruit communément : il ne s'agiſſoit à leur égard que d'y attacher un moyen par lequel on y pût toujours obtenir le même degré de chaleur & l'y reconnoître, quelque peu d'habitude qu'on eût dans l'art d'eſſayer. Si je vais parler bientôt du changement momentané que j'ai fait au fourneau d'eſſai pour en tirer la plus grande chaleur poſſible & varier ainſi mes expériences, je perdrai de vue la marche du thermomètre, telle que je l'ai indiquée pour régler la chaleur du fourneau d'eſſai ordinaire; il ne ſera plus queſtion de s'arrêter à un degré précis, mais d'examiner ſi le feu, pouſſé auſſi loin qu'il peut l'être, devient favorable à l'opération des eſſais.

* Mémoires de l'Académie, page 361.

J'avois déjà parlé en 1760, dans le Mémoire que j'ai cité, du moyen d'augmenter la chaleur du fourneau d'eſſai, tantôt en l'élevant ſimplement au-deſſus d'un ſecond cendrier, après avoir fait une ouverture au fond de celui qui eſt propre au fourneau; tantôt en pratiquant auſſi une ouverture au fond du ſecond cendrier, & en plaçant le tout, en cet état, ſur l'embouchure d'un fourneau à vent ordinaire, conſtruit en briques, & qui reçoit l'air du dehors de l'endroit où ce fourneau à vent eſt établi : mais deſirant d'obtenir du fourneau d'eſſai une chaleur beaucoup plus vive que celle qu'il eſt capable de donner avec le ſecours dont je viens de parler, j'ai employé un moyen qui a quelque rapport avec le précédent, mais dont l'effet eſt bien ſupérieur.

Je n'ai fait aucun changement dans le corps du fourneau ordinaire juſqu'au cendrier; la moufle s'y trouve placée dans la ſituation & à la hauteur qu'on a obſervées juſqu'ici; mais au lieu d'un cendrier ouvert de trois côtés, & dont l'élévation eſt communément de 3 à 4 pouces, j'en ai fait adapter un au fourneau qui a 14 pouces ou environ de hauteur. Un tuyau de tôle, coudé en forme d'équerre, & dont l'ouverture eſt de 6 pouces, paſſe

par

par une de ſes extrémités au travers du mur de la cheminée où le fourneau eſt placé, & y reçoit librement l'air extérieur; l'autre extrémité du tuyau aboutit à un des côtés du cendrier; elle s'y emboîte à la hauteur de 4 pouces du fond, & aſſez exactement pour que la totalité de l'air fourni par le tuyau ſe rende dans le cendrier. Deux barreaux de fer qui traverſent ce cendrier à la hauteur de 9 pouces, ſoutiennent une grille, laquelle ſe trouve par-là immédiatement au-deſſus de l'ouverture du tuyau ou ventouſe dont je viens de parler, & y eſt expoſée à tout le courant de l'air que ce tuyau fournit: les charbons embraſés qui tombent du corps du fourneau, en paſſant aux deux côtés de la moufle, pendant la grande action du feu, ſont reçus ſur cette grille, & les plus gros s'y arrêtent; mais ils ont perdu alors une partie de leur activité, & d'ailleurs étant à 3 ou 4 pouces au-deſſous du plancher de la moufle, ils ne peuvent pas lui communiquer une forte chaleur. Afin d'y ſuppléer, j'ai pratiqué au-devant du cendrier, entre le deſſous de la moufle & la grille, une ouverture de 6 pouces de largeur ſur 2 de hauteur, à la faveur de laquelle je peux garnir de charbons le deſſous de la moufle, & lui faire éprouver par-là toute l'activité du charbon qui commence à s'allumer. Une porte de tôle, revêtue intérieurement de terre à creuſet, bouche exactement cette ouverture, tant qu'il n'eſt pas néceſſaire de renouveler le charbon, & ne laiſſe d'autre iſſue à la flamme que celle qu'elle ſe forme en ſe portant d'abord ſous le plancher de la moufle, & en circulant autour d'elle pour s'échapper par l'extrémité ſupérieure du fourneau.

Quelqu'avantageuſe que paroiſſe ſa conſtruction, elle ne produiroit pas cependant tout l'effet qu'elle annonce, ſi l'on ne prolongeoit pas en quelque façon le corps du fourneau par un moyen fort ſimple, & qui n'a lieu qu'autant qu'on le veut: il s'agit d'abord d'adapter à l'extrémité ſupérieure du fourneau une chappe de fer qui ait un pied de hauteur ou environ, dont la forme ſoit conique, & au-devant de laquelle on ait fait une ouverture pour avoir la liberté de renouveler le charbon au-deſſus de la moufle; cette ouverture n'eſt pratiquée au-devant de la chappe que pour cette raiſon ſeule, elle n'eſt propre en effet par elle-même qu'à ralentir

l'activité du feu; auſſi eſt-il néceſſaire d'y mettre une porte qu'on tient exactement fermée tant que la partie ſupérieure du fourneau eſt ſuffiſamment garnie de charbons: il faut en ſecond lieu placer au-deſſus de cette chappe un tuyau de tôle, qui ait 3 pieds ou environ de longueur & 6 pouces d'ouverture. A la faveur de ces parties acceſſoires du fourneau, l'air extérieur, plus condenſé que celui de l'endroit où l'on opère, entre avec rapidité dans la ventouſe, & ſe développe dans tout le corps du fourneau proportionnément à la grande raréfaction de la colonne d'air que la chappe & le tuyau renferment.

Avant que d'entrer dans le détail des expériences dont j'ai à rendre compte, qu'il me ſoit permis de rappeler ici en deux mots comment il eſt d'uſage en France de déſigner le titre des matières d'argent. Si ces matières ſont conſidérées comme ne contenant aucune partie d'alliage, on dit qu'elles ſont à 12 deniers de fin, & chacun de ces deniers ſe diviſe en 24 grains, ce qui forme un total de 288 grains; la ſuite de poids relative à cette fixation du titre, ſe nomme *ſemelle:* le principal d'entr'eux, celui qui repréſente 12 deniers de fin, pèſe 36 grains, poids de marc; & le plus léger de tous, lequel répond à un ſeizième du grain de fin, eſt la 128.e partie du grain, poids de marc. Ainſi lorſqu'un lingot d'argent contient un douzième de cuivre, on fixe ſon titre à 11 deniers de fin; & lorſque l'alliage eſt d'un huitième, le titre du lingot eſt de 10 deniers 12 grains, & il en eſt ainſi graduellement de ſa détermination pour toutes les proportions d'alliage qui peuvent ſe rencontrer dans les matières d'argent. La manière d'énoncer leur titre chez les Étrangers tient, comme en France, à des poids fictifs qui varient dans leur dénomination, qui ſont plus ou moins ſubdiviſés, & dont il faut étudier le rapport avec les nôtres, lorſqu'il eſt queſtion de rapprocher le titre qu'ils ont attaché à une matière de celui qu'on y trouve en France.

Je ne fis pas uſage d'abord du fourneau d'eſſai en y joignant les parties que j'ai décrites, comme propres à y exciter une plus grande chaleur qu'il n'eſt capable ſeul d'en donner; je l'employai pour un grand nombre d'expériences, dans l'état ſimple où il ſuffit, lorſqu'il n'eſt queſtion que des opérations communes.

Toutes mes épreuves roulèrent d'abord ſur un ſeul & même morceau d'argent que je pris tel qu'il tomba ſous ma main, & dont en général le degré de pureté m'étoit connu. Mon but étoit d'examiner ſi, après avoir reconnu un titre quelconque dans cet argent & n'avoir rien négligé de la méthode ordinaire, pour que ce titre fût fixé avec exactitude, je pourrois, en réitérant les épreuves, le retrouver toujours le même, & ſaiſir toutes les circonſtances de l'opération dans leſquelles je l'aurois d'abord fixé. Mes premiers eſſais de cet argent m'en indiquèrent le titre ſur le pied de 10 deniers 21 grains; mais en ſoumettant la même matière à de nouvelles épreuves, je remarquois des variations; ſi quelquefois mes boutons d'eſſais revenoient au point de 10 den. 21 grains, ils ſe trouvoient quelqueſois un peu au-deſſous, ou ils alloient un peu au-delà. Je n'ignorois pas que les coupelles abſorboient une petite partie de l'argent que j'eſſayois; mais ce n'étoit pas encore le moment de m'en occuper; il ne s'agiſſoit d'abord que de perdre le moins qu'il étoit poſſible ſur les eſſais, & de faire une perte égale en réitérant les opérations.

Sentant bien que ces variations, quoique peu importantes en apparence, avoient une cauſe très-difficile à ſaiſir, je portai mon attention ſur la durée du temps qu'on peut employer à faire un eſſai, en partant de l'inſtant où le plomb & l'argent mêlés dans la coupelle & en pleine fuſion, commencent à circuler. Cette opération ſe fait communément en quinze ou vingt minutes. Je l'accélérai quelquefois au point de la terminer en dix ou douze minutes, & quelquefois je la rendis aſſez tardive pour qu'il s'écoulât une demi-heure avant qu'elle fût finie. Le moyen de faire varier la durée de l'opération, eſt fort ſimple: quoiqu'il faille en effet une chaleur aſſez conſidérable, ſoit qu'on veuille accélérer l'opération, ſoit qu'on aie le deſſein de la ralentir, il n'eſt queſtion dans le premier cas que de laiſſer l'air s'introduire librement dans la moufle, en n'y mettant point à l'entrée des charbons allumés; & dans le ſecond cas, en agiſſant d'une manière oppoſée. La matière circule avec rapidité dans les coupelles, dès que l'air vient à les frapper; les fumées du plomb, s'élevant ſans peine, ſe diſſipent ſenſiblement par l'ouverture de la moufle, & la litharge

diminue à vue d'œil en s'imbibant dans les coupelles; au lieu que tout y eſt retardé par le défaut d'une certaine quantité d'air, & cela eſt ſi conſtant, qu'en mettant un gros charbon embraſé à l'entrée de la mouſle, en l'ôtant un inſtant après, & enſuite en le remettant, on voit la matière circuler plus ou moins vîte, & répondre alternativement à cette eſpèce de jeu de mettre tantôt le charbon à l'entrée de la mouſle, & tantôt de le retirer.

De quelque manière que j'aie conduit mes eſſais, pour la durée de l'opération, je n'ai point ſaiſi un point abſolument fixe dans le titre; c'eſt-à-dire qu'il y avoit de la variété dans les eſſais ralentis, comme il s'en trouvoit dans ceux qui avoient été accélérés. Il eſt vrai que les premiers donnoient un titre un peu plus haut communément que les derniers; mais on en reconnoîtra bientôt la raiſon lorſqu'il s'agira du détail des épreuves où elle ſera développée: celles que je préſente ici ſommairement ne devoient pas me conduire à des réſultats déciſifs, parce que ces épreuves n'avoient pas pour baſe une matière dont je connuſſe ſûrement le degré de pureté.

Quoique j'euſſe obtenu, comme on vient de remarquer, du fourneau conſidéré dans l'état ſimple & ordinaire, une aſſez grande chaleur pour que des eſſais y euſſent paſſé en dix ou douze minutes; cependant je m'étois aperçu que ſur la fin de l'opération l'air favorable, il eſt vrai, à l'imbibition de la litharge, mais nuiſible dans un autre ſens, avoit un peu refroidi l'intérieur de la mouſle, & que les coupelles n'avoient tout au plus que la chaleur néceſſaire à l'entretien de la matière en fuſion. Cette obſervation me donna lieu de penſer qu'une diminution de chaleur qui étoit aſſez ſenſible dans un moment où la matière des eſſais approche du terme de ſon entière pureté, où les couleurs de l'iris s'y forment, & où elle tend à ſe fixer en forme de bouton dans le baſſin de la coupelle, en perdant bientôt ſa fluidité; cette obſervation, dis-je, me fit craindre que les boutons d'eſſais dont je parle n'euſſent pas été épurés parfaitement par la raiſon qu'ils avoient perdu trop tôt leur fluidité, faute d'une chaleur aſſez conſidérable, & qu'ils ne recelaſſent encore quelques parties de cuivre ou de litharge. Cette inquiétude n'étoit pas ſans fondement, & ce fut pour la

diſſiper que je pris le parti d'ajouter au fourneau d'eſſai ordinaire, les parties dont j'ai donné la deſcription: il devoit en réſulter que la chaleur du fourneau ſeroit aſſez vive & aſſez long-temps ſoutenue pour que l'air introduit librement dans la moufle n'y occaſionnât pas un refroidiſſement nuiſible.

J'ai rendu compte à l'Académie en 1763*, des expériences multipliées que j'ai faites pour prouver qu'il y a une perte conſtante de quelques parties du fin des matières ſur les boutons d'eſſais, chaque fois que cette opération a lieu; j'ai démontré en même temps que cette perte n'eſt qu'apparente, & qu'il y a un moyen certain d'extraire de la coupelle la moindre particule d'argent fin que la litharge a entraînée avec elle.

* *Mém. Acad. p. 38.*

Voilà un de ces points fixes dont j'ai parlé au commencement de ce Mémoire, leſquels ſervent à guider dans les recherches, & ſont comme autant de principes avec leſquels il faut que tout s'accorde ſi l'on veut donner des réſultats certains.

L'art d'eſſayer les matières d'argent eſt la manière de connoître la quantité fixe du fin qu'elles contiennent, & de n'en extraire que l'impureté. Si le bouton d'eſſai ne repréſente jamais proportionnellement la totalité de ce fin, ſi l'opération par laquelle on cherche à le découvrir, a radicalement le vice, avec quelqu'intelligence qu'on la ſuive, de ne procurer que des réſultats toujours inférieurs à ceux qui devroient naître du fond intrinsèque des choſes, il eſt hors de doute que l'art d'eſſayer, tel qu'on le pratique aujourd'hui, ne conduit à l'établiſſement du titre des matières que par approximation. Je ſais qu'on ne s'éloigne que très-peu du but, qu'aſſez ordinairement même, avec beaucoup d'attention, on ſe tient à une égale diſtance de ce but, mais on ne le ſaiſit pas; & pourquoi craindroit-on le travail pour y parvenir avec certitude, & n'éprouver jamais de variations, s'il y a un moyen de les éviter ſans s'écarter beaucoup de la route ordinaire? l'exacte vérité mérite tous nos efforts.

Afin qu'un Eſſayeur puiſſe ſe rendre compte à lui-même de ſon travail, & répéter avec fruit ſes expériences ſur de l'argent allié, nous avons vu qu'il étoit d'abord eſſentiel que le mélange des deux matières fût parfait: ſans cet article important, les échantillons

qu'il tireroit de cet argent allié l'induiroient en erreur par l'inégalité réelle de leur titre; & sa constance à chercher la certitude dans des expériences sans cesse renouvelées, l'entraîneroit sans cesse dans de nouvelles variations.

Avec la précaution que j'ai prise de tirer, comme on a vu, d'une masse considérable d'argent bien brassée la portion de matière qui est devenue la base de mes expériences, j'ai écarté cette cause d'erreur, & l'on va juger de quelle conséquence il étoit que je m'en misse à l'abri.

Pour connoître le vrai titre de cette matière, & afin d'être en état ensuite de m'apercevoir des différences plus ou moins grandes que j'y remarquerois, en variant mes épreuves, je commençai par en faire quelques essais, sans ménager la chaleur, & en employant une dose de plomb plus forte que le titre apparent de cet argent ne l'exigeoit: je fis même subir aux boutons d'essais une seconde épreuve, afin qu'il ne me restât aucun doute sur leur affinage, ne m'occupant point dans ce moment de la plus grande diminution du fin qui devoit en résulter. Je fis la réduction des coupelles qui m'avoient servi; j'en ressuscitai la litharge, & j'en retirai le petit globule d'argent fin qui appartenoit à chacun de ces essais: les boutons qu'ils avoient donnés d'abord, joints aux globules qui en dépendoient, me représentèrent dans la plus grande exactitude le vrai titre de la matière: il ne s'y trouva point de variation; chaque essai l'annonça sur le pied de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$. Il est vrai que les boutons d'essais n'étoient pas tout-à-fait égaux entr'eux, mais les globules ne l'étoient point aussi; ces derniers étoient un peu plus forts ou un peu plus foibles, relativement à l'inégalité du poids des boutons auxquels ils appartenoient; en un mot, chaque bouton réuni à son globule étoit égal en pesanteur à un autre bouton que son globule accompagnoit aussi, quoiqu'il y eût une petite différence sur le poids entre ces boutons pris séparément, & entre les globules considérés aussi en particulier.

On sent qu'ayant à partir de ce titre intrinsèque de la matière sur laquelle toutes mes expériences devoient rouler, je dus le constater à plusieurs reprises. Quand ce point n'eût pas été aussi important en lui-même qu'il l'étoit, j'avois tant de satisfaction à

trouver une exactitude conſtante, dans un travail ſujet par ſa nature à des variations, que les expériences réitérées ne me coûtoient rien, quelque pénibles qu'elles fuſſent: les réſultats ont toujours été les mêmes; toujours le petit globule d'argent fin complétoit le titre de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$.

Cette certitude une fois acquiſe me ſervit de règle pour reconnoître dans les expériences poſtérieures & variées de pluſieurs façons, à quel point je m'éloignois ou je me rapprochois du vrai titre de la matière. Sachant, par exemple, qu'à chaque eſſai une petite partie du fin eſt abſorbée dans la coupelle, & que cette diminution qu'éprouve le bouton, roule ſur deux ou trois grains, je m'appliquai à rendre cette diminution la plus foible qu'il fût poſſible, en cherchant une manière de gouverner le feu d'où cet avantage réſultât. Je fis un grand nombre d'eſſais dans cette première vue; je me contenterai d'en rapporter trois pour faire juger de la lumière que je tirois de l'établiſſement fixe du titre, par la réunion de la partie d'argent fin extraite de la coupelle avec le bouton d'eſſai.

Dans la première expérience, pour laquelle j'employai la doſe de plomb ordinaire, c'eſt-à-dire ſix parties égales chacune à la portion d'argent priſe pour l'eſſai, le titre fut de 10 deniers 21 grains. Dès-lors je conclus que la coupelle retenoit 1 grain $\frac{1}{4}$ d'argent fin; ou que ſi elle en avoit abſorbé davantage, le bouton d'eſſai n'étoit pas épuré parfaitement: la vérité ſe manifeſta bientôt; la litharge reſſuſcitée de cette coupelle rendit 2 grains $\frac{1}{2}$ d'argent fin, & il fut prouvé clairement par-là que le bouton d'eſſai tenoit encore 1 grain $\frac{1}{4}$ d'alliage.

Le titre monta plus haut dans la ſeconde expérience & fut de 10 deniers 22 grains: le bouton d'eſſai qui en provint contenoit plus d'alliage que le premier; la coupelle où il avoit paſſé reſtitua 2 grains d'argent fin: ſi l'on joignoit cette portion d'argent ſortie de la coupelle au bouton d'eſſai, on auroit le titre de 11 deniers, & on le porteroit par conſéquent ſur le pied de 1 grain $\frac{6}{8}$ plus fort qu'il n'eſt réellement.

L'affinage du bouton d'eſſai dans la troiſième expérience étoit encore moins complet que dans les deux autres; le bouton de

cette expérience se trouva au titre de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{2}$: il devint évident pour moi dès l'instant, & sans que j'eusse besoin de faire la réduction de la coupelle employée dans cette troisième expérience, que le bouton d'essai qui en étoit résulté contenoit au moins un quart de grain d'alliage, puisque j'étois certain que la totalité du fin ne pouvoit aller qu'à 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$: mais ce bouton, quoique net en apparence, retenoit encore 2 grains $\frac{3}{4}$ d'alliage; la coupelle, en effet, rendit 2 grains $\frac{1}{2}$ d'argent fin.

On pourra peut-être m'objecter qu'il n'est pas évident que les boutons des trois expériences que je viens de rapporter, fussent encore plus ou moins chargés d'alliage, comme je le prétends; & que l'inégalité de poids qu'il y avoit entre les trois produits pouvoit venir de la quantité inégale d'argent pur que la matière alliée des trois essais contenoit.

Quoique je fusse certain par plusieurs épreuves, du mélange exact de la matière alliée que j'employois, je n'avois garde cependant de laisser la moindre incertitude sur ce qui donne lieu à l'objection que je me suis proposée. Je n'hésitai point à faire plusieurs épreuves pour dépouiller des boutons d'essais de l'alliage que j'y supposois encore avec fondement, & pour connoître si la quantité fixe qui m'y étoit indiquée par le calcul, s'en trouveroit enlevée par une deuxième opération. Toutes mes expériences en ce point sont venues à l'appui de ce que j'ai avancé; je n'en citerai qu'une pour ne pas fatiguer l'Académie par de trop longs détails.

On a vu que le bouton de la deuxième des expériences dont je viens de parler, avoit annoncé le titre de 10 deniers 22 grains, & que je l'ai fait considérer comme contenant encore en cet état 1 grain $\frac{6}{8}$ d'alliage. Je fis passer de nouveau ce bouton à la coupelle dans trois parties de plomb, quantité beaucoup plus que suffisante pour épurer de l'argent dont l'affinage étoit presque complet: le bouton nouveau qui sortit de cette seconde opération, avoit tous les caractères de la plus parfaite pureté (je dirai dans la suite ce qui la caractérise), mais il perdit 4 grains $\frac{1}{8}$ de son poids, diminution trop considérable sans doute si le premier bouton

eût

eût été pur; le nouveau ne donna plus en effet que le titre de 10 deniers 17 grains $\frac{7}{8}$: la coupelle où il venoit de passer avoit absorbé simplement 2 grains $\frac{3}{8}$ d'argent fin. Nous venons d'observer cependant que le nouveau bouton avoit perdu 4 grains $\frac{1}{8}$; le premier contenoit donc encore 1 grain $\frac{6}{8}$ d'alliage, avant que de subir une seconde opération, puisque j'aurois retrouvé dans la seconde coupelle les 4 grains $\frac{1}{8}$ qu'a perdu le nouveau bouton, si l'affinage du premier eût été parfait. Qu'on réunisse actuellement à ce bouton bien épuré & réduit au poids de 10 deniers 17 grains $\frac{7}{8}$, non-seulement la particule d'argent fin tirée de la première coupelle dont nous avons vu précédemment que le poids étoit de 2 grains, mais encore celle que la deuxième coupelle avoit absorbée, & qui pesoit 2 grains $\frac{3}{8}$, on aura un total de 10 deniers 22 grains $\frac{2}{8}$, qui est précisément le titre intrinsèque & plusieurs fois reconnu de la matière de l'essai.

Quelque lumière que jette sur le fait dont il s'agit, l'expérience que je viens de détailler, je crois devoir porter les choses à une nouvelle évidence: ce fait essentiel consiste à assurer que la matière d'argent que j'ai prise pour base de mes épreuves, étoit au titre de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$, que l'alliage y étoit distribué également, & qu'en conséquence chacune des portions que j'ai essayées contenoit 103 parties de cuivre, & 1049 parties d'argent pur.

J'eus besoin en 1763, pour les expériences dont je rendis compte alors à l'Académie, d'un argent parfaitement pur; je l'obtins par une voie assez simple, & j'en donnai des preuves multipliées dans mon Mémoire. Une partie de cet argent m'étoit restée; je m'en suis servi récemment pour les expériences dont je vais parler: quoique je n'eusse aucun doute sur sa pureté, cependant j'en ai fait un nouvel essai, en employant une dose de plomb aussi forte que l'eût exigé de l'argent chargé d'un douzième d'alliage. Le bouton qui est résulté de l'opération n'a annoncé d'abord que le titre de 11 deniers 22 grains, mais la coupelle a rendu les 2 grains qui manquoient pour composer les 12 deniers de fin; ainsi voilà une confirmation surabondante de la pureté de cet argent.

Ayant pour but dans l'expérience dont il va être question, de

la rendre correſpondante à celles que j'avois déjà faites ſur la matière générale de mes eſſais, dont le titre conſtant étoit de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$, je peſai dans ma balance, avec la plus grande préciſion, la quantité en argent pur dont je viens de parler, qui repréſentoit ce titre; je peſai enſuite avec la même juſteſſe la petite quantité de cuivre de roſette qui devoit repréſenter l'alliage que la matière générale de mes eſſais contenoit, & je renfermai le tout dans du papier: on voit par-là que le cuivre peſoit 1 denier 1 grain $\frac{3}{4}$, & que de ſon union avec les 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$ d'argent pur, il réſultoit un total de 12 deniers poids de ſemelle. Voilà foncièrement l'état de la matière alliée qui a été la baſe de mes eſſais, à cela près que l'argent fin & le cuivre y avoient été mêlés parfaitement par la fuſion avant que je l'eſſayaſſe, & que dans mon expérience particulière le mélange des deux métaux que j'employois ne devoit avoir lieu que dans la coupelle, au moment même où j'en ferois la ſéparation.

Cet eſſai paſſé à l'ordinaire dans ſix parties de plomb, vint au titre de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire que j'eus, comme dans une des expériences précédentes, 1 quart de grain de plus en poids ſur le bouton, qu'il n'y avoit dans l'argent pur employé: je retirai de la coupelle la petite portion de fin qu'elle avoit retenue, elle peſoit 1 grain $\frac{7}{8}$; & lorſque je l'eus miſe dans la balance avec le bouton auquel elle appartenoit, il en réſulta le poids de 11 deniers 0 grains $\frac{3}{8}$. Voilà donc un excédant ſur l'argent pur de 2 grains $\frac{1}{8}$; il ne ſauroit provenir ſans doute que d'un reſte d'alliage ou de litharge dont le bouton ne s'eſt pas dépouillé: je fis paſſer une ſeconde fois ce bouton à la coupelle dans trois parties de plomb; le nouveau qui en provint ne ſe trouva plus qu'au titre de 10 deniers 18 grains $\frac{3}{8}$, après avoir perdu 4 grains $\frac{1}{8}$, mais avec tous les indices d'une entière pureté. La ſeconde coupelle me rendit 2 grains d'argent fin que les trois parties de plomb y avoient entraînés; ces deux grains réunis au grain $\frac{7}{8}$ que j'avois retiré de la première coupelle, & aux 10 deniers 18 grains $\frac{3}{8}$, poids du bouton épuré, compoſent un total d'argent pur de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$, c'eſt-à-dire la quantité fixe qui avoit été la matière de l'eſſai. Le cuivre a donc

disparu entièrement à la faveur d'une seconde épreuve que le premier bouton d'essai a subie; l'excédant de poids qu'on avoit d'abord remarqué dans ce bouton, étoit donc étranger à la partie déterminée d'argent pur qu'il paroissoit représenter. Qu'on se rappelle actuellement l'objection que je me suis proposée, & l'on sentira qu'elle s'évanouit: ce n'est point, je le repète, par les suites d'une inégalité de mélange dans la matière alliée qui a été le fondement de mes essais, qu'il y a de petites différences sur le poids des boutons dépendans des trois expériences que j'ai rapportées plus haut; c'est parce que ces boutons retenoient encore quelques parties d'alliage, & qu'il falloit leur faire subir une seconde opération, pour qu'accompagnés des petits globules d'argent fin que les coupelles avoient rendus, ils représentassent entièrement & dans toute sa pureté la portion d'argent que contenoit la matière alliée dont je me suis servi pour les trois expériences dont il s'agit.

Après avoir eu pour objet dans les expériences précédentes de garantir le plus qu'il étoit possible les boutons d'essais de la petite perte en argent fin qu'ils éprouvent constamment; après avoir cherché à obtenir cette diminution par un feu modéré, mais néanmoins suffisant, & par une opération assez lente, mon dessein fut d'examiner si au contraire une chaleur très-vive & une opération prompte me procureroient cet avantage: les apparences n'y étoient pas, mais je ne voulois rien supposer; les faits seuls devoient me guider, & cette dernière façon de conduire mes essais pouvoit m'être utile à d'autres égards.

Après plusieurs épreuves j'ai observé de légères variations sur le titre, en faisant passer mes essais en dix minutes & avec toute la chaleur qu'ils pouvoient recevoir du fourneau, auquel la ventouse, la chappe & le tuyau dont j'ai parlé avoient été joints; je les ai observées dans cette circonstance, comme je les avois remarquées dans celles où l'opération avoit été moins courte & le degré du feu moins vif; mais je ne me suis point aperçu que toutes choses égales d'ailleurs, la perte sur les boutons d'essais fût plus marquée en général dans une circonstance que dans l'autre: je compterois davantage certainement sur l'affinage d'un bouton lorsqu'il auroit passé à un feu très-vif, avec la dose de plomb

néceſſaire, que ſur celui d'un autre bouton pour lequel la chaleur auroit été ménagée; mais il peut arriver, j'en ai fait la remarque, que l'un & l'autre bouton donnent le même titre, que leur degré d'affinage ſoit égal.

Lorſque je parle de l'affinage de ces boutons d'eſſais paſſés à un feu modéré ou très-vif, on ſent que je n'entends point un affinage complet, & on a vu que pour l'obtenir tel j'ai eu recours à une double opération. Ainſi l'exactitude rigoureuſe des eſſais, c'eſt-à-dire la connoiſſance de la totalité de l'argent fin qui eſt contenu dans une matière alliée, ne tient point certainement à la manière de conduire le feu; il faut toujours s'attendre dans la méthode connue d'eſſayer les matières d'argent à une perte plus ou moins conſidérable ſur les boutons d'eſſais; il faut la regarder comme réelle relativement au commerce, tant qu'il ne ſera point établi qu'on joindra à la première opération ordinaire celle de faire reſtituer aux coupelles la partie d'argent qui conſtitue cette perte. Si l'uniformité du titre, fondée ſur une perte toujours égale, tient au contraire principalement à la manière de gouverner le feu, j'avoue que ce point eſt extrêmement délicat; qu'il eſt poſſible peut-être de le ſaiſir par une longue pratique, mais qu'il ſera fort difficile de tranſmettre à d'autres cette connoiſſance, puiſqu'elle dépend beaucoup du coup-d'œil & d'une certaine intelligence à ſuivre la matière en fuſion dans les coupelles, que le diſcours n'expliquera pas.

Lorſque nous fumes chargés par le Conſeil, M. Hellot, M. Macquer & moi, de faire des expériences ſur les moyens qu'il y auroit de perfectionner la méthode d'eſſayer, nous tournames principalement nos vues du côté de la matière des coupelles, de leurs proportions, de la manière de les former, & du côté des doſes de plomb qu'il convient d'employer pour les eſſais proportionnément au titre des matières. Le réſultat de nos expériences donna lieu à un règlement qui eſt ſuivi aujourd'hui par tous les Eſſayeurs du royaume. Dans le temps où nous nous occupions à déterminer les quantités de plomb que l'affinage des matières peut exiger, nous n'ignorions pas qu'il y avoit une perte conſtante ſur les boutons d'eſſais, & qu'elle étoit plus forte lorſque le plomb

avoit été prodigué: nous cherchames donc à peu près un terme où l'opération de l'essai fût faite, & où l'on éprouvât le moins cette perte par le ménagement sur les doses de plomb. Je me suis conformé au règlement du Conseil dans les expériences dont j'ai rendu compte, tant à l'égard des coupelles que par rapport aux doses de plomb qui sont prescrites, relativement au titre de l'argent: celui qui a fait la matière de mes épreuves contenoit à-peu-près un douzième d'alliage: il est ordonné d'employer six parties de plomb égales chacune à la portion de matière qu'on a prise pour l'essai, lorsqu'elle approche de ce degré d'alliage, & l'on a vu que je me suis renfermé à cet égard dans les bornes prescrites; mais il n'échappera point à l'attention de l'Académie, que les boutons d'essais dont il a été question dans mes expériences, comme les produits simples d'une première épreuve dans six parties de plomb, contenoient encore quelques parties d'alliage, & sembleroient annoncer que cette dose de plomb ne suffit pas pour les épurer parfaitement. Cette observation aura quelque fondement, & néanmoins les vues du Conseil, dans le règlement qu'il a fait, n'en paroîtront pas moins sages. S'il eût été certain que dans la méthode connue d'essayer, une petite partie de l'argent fin ne se perdît pas; si l'on n'eût pas été instruit que cette perte roule communément sur trois grains, on auroit considéré l'opération des essais sous un autre point de vue; on auroit pris toutes les précautions possibles pour obtenir un affinage complet; on auroit autant prodigué le plomb qu'on est attentif aujourd'hui à le ménager. D'ailleurs il étoit de la prudence de l'Administration de ne pas s'écarter dans la manière de fixer en France le titre des matières de l'usage établi en Europe: par-tout on observe une proportion dans les doses de plomb; elles sont même plus fortes en France que dans quelques autres États. Les mines qui appartiennent à l'Espagne fournissent la plus grande quantité de l'argent qui circule dans le monde: l'usage des Essayeurs de ce royaume, & conséquemment de ceux qui travaillent dans le pays où l'on exploite ces mines, est de ne mettre que quatre parties de plomb sur l'argent à 11 deniers de fin, pendant qu'en France on a cru devoir, par des considérations particulières, ordonner qu'il en seroit

employé ſix. Combien ne ſeroit-il pas dangereux d'aller au-delà? nous ſacrifierions par-là en effet aux Nations étrangères une partie de l'argent fin contenu dans les matières que nous leur enverrions; & de leur côté elles demanderoient ſans doute que dans les matières qu'elles nous enverroient, nous leur tinſſions compte d'un excédant de titre qu'elles y auroient trouvé, mais que nous n'y aurions pas reconnu par une méthode plus rigoureuſe que la leur: il a donc fallu, dès qu'on a ſenti en France que la perte plus ou moins forte du fin des matières dépendoit de la quantité de plomb qui étoit employée dans les eſſais, qu'on ſe tînt dans certaines bornes; qu'on étudiât la pratique des États voiſins, & que l'on conſultât autant les intérêts du commerce que la perfection du travail. Au ſurplus on va voir bientôt que ſix parties de plomb ſont capables ſeules d'affiner une matière d'argent alliée ſur le pied de 11 deniers, ſi l'on prend les précautions que j'indiquerai, & ſi l'on adopte les vues générales où ce procédé conduiroit.

J'ai établi comme un fait conſtant qu'en augmentant les doſes de plomb dans l'opération des eſſais on augmentoit la perte ſur l'argent fin; mais cette perte n'eſt point en raiſon des quantités de plomb ajoutées aux doſes ordinaires, c'eſt-à-dire que ſi huit parties de plomb occaſionnent une diminution de 3 grains de fin ſur un bouton d'eſſai, il ne réſulte pas une perte de 6 grains de l'emploi de ſeize parties: il y a plus, & j'ai déjà communiqué à l'Académie cette obſervation, quand la quantité de plomb eſt exceſſive, la diminution ſur le bouton d'eſſai n'eſt pas plus forte que quand la quantité n'eſt qu'environ le double de la doſe ordinaire; trente-deux parties, par exemple, n'affoibliront pas plus le produit d'un eſſai que ſeize. J'ai remarqué en effet que pendant tout le temps où l'argent allié nage dans une grande quantité de litharge l'affinage n'a lieu qu'imparfaitement, que la circulation de la matière eſt lente, & que la coupelle par conſéquent ſe charge de fort peu d'alliage: comme ce n'eſt cependant qu'à la faveur de l'introduction du cuivre & de la litharge dans la coupelle, qu'il s'y gliſſe quelque portion du fin, il en réſulte que l'argent doit ſubſiſter en total, ou ne perdre preſque rien, pendant que l'alliage lui-même deſtiné à s'imbiber tout entier dans la coupelle,

ne s'y incorpore que foiblement. Cette remarque m'a fait conclure avec vraiſemblance que l'épurement de la matière n'avoit bien lieu que lorſqu'elle circuloit avec activité dans une quantité modérée de litharge, & qu'alors auſſi la perte ſur le fin pouvoit avoir lieu; les expériences ſuivantes viennent à l'appui de ce raiſonnement.

Je fis deux nouveaux eſſais de la matière qui avoit été la baſe de tant d'autres épreuves, & j'y employai ſix parties de plomb; mais au lieu de les mettre toutes enſemble dans la coupelle, je me bornai d'abord à quatre pour le premier eſſai: lorſqu'elles s'y furent totalement imbibées, & que l'argent, prêt à ſe fixer en bouton, eut donné quelques couleurs de l'iris, je mis dans la coupelle les deux autres parties de plomb; elles s'y éclaircirent bientôt; la circulation des matières s'établit; l'argent à la fin de l'opération donna les plus belles couleurs de l'iris, & j'eus un bouton qui ne me laiſſa aucun doute ſur ſa pureté; il étoit à 10 deniers 18 grains $\frac{3}{4}$: il avoit perdu par conſéquent 3 grains $\frac{1}{2}$. Mais la coupelle me les rendit; ainſi le montant du total fut de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$, qui eſt préciſément le titre de la matière eſſayée qu'on a vu paroître tant de fois.

Quant au deuxième eſſai, je mis d'abord cinq parties de plomb dans la coupelle, & la ſixième, lorſque les autres s'y furent imbibées: le produit de ce deuxième eſſai ſe trouva égal à celui du premier; le bouton vint au titre de 10 deniers 18 grains $\frac{3}{4}$.

Il paroît concluant, d'après ces deux expériences, 1.° que ſix parties de plomb ſont ſuffiſantes pour l'affinage complet d'une matière alliée ſur le pied de 11 deniers ou environ, ſi l'on ne les emploie pas toutes à la fois; il paroît, en ſecond lieu, que cet affinage réuſſit mieux, par la raiſon que j'ai expoſée plus haut: en effet, dans le procédé dont il s'agit, l'argent allié ſe trouve réduit deux fois à n'être mêlé qu'avec une petite quantité de litharge, avec deux parties, ou même une ſeule; dans cette circonſtance il circule avec plus de vivacité qu'auparavant, & il ſemble tendre davantage à s'épurer. De quelque manière que cet effet ait lieu, il eſt très-poſitif que s'il faut une certaine doſe de plomb, en ſuppoſant qu'on l'emploie toute à la fois, pour affiner une matière, il ne faudra pas, pour y réuſſir également,

une dose à beaucoup près aussi forte, pourvu qu'on l'emploie par parties, & qu'on soutienne la chaleur du fourneau; il est vrai que, par ce dernier procédé, la perte sur le fin deviendra plus considérable; mais il n'est pas question dans ce moment-ci d'apprécier cette perte : d'ailleurs elle n'est pas réelle; un procédé de plus a bientôt tout rétabli.

À mesure que mon travail se développe, on sent mieux combien l'objet en étoit intéressant, & devoit me porter par lui-même à recourir à tous les moyens dont je pouvois, au moins en apparence, tirer quelque parti avantageux. On sait que le bismuth produit pour l'affinage de l'argent, le même effet que le plomb; je fis plusieurs tentatives à ce sujet, soit en employant le bismuth pur, soit en le mêlant avec du plomb, & en l'appliquant toujours à la matière ordinaire de mes essais. Je ne me suis point aperçu qu'il y eût plus de constance sur le titre par l'emploi du bismuth pur ou mêlé, que par l'usage du plomb. Je conviens qu'à doses égales le premier purifie mieux l'argent que le second, mais il a l'inconvénient d'entraîner dans la coupelle un peu plus d'argent fin. Six parties de bismuth, quoiqu'employées toutes à la fois, ont fait descendre le titre de la matière de mes essais à 10 deniers 18 grains $\frac{1}{8}$, tandis qu'on a vu plus haut que six parties de plomb mises dans la coupelle par parties différentes, & plus capables par-là d'occasionner une diminution sur le bouton d'essai, l'ont encore laissé au titre de 10 deniers 18 grains $\frac{3}{4}$. Mais cet inconvénient très-réel, quand on suit la méthode ordinaire d'essayer, n'en seroit plus un, si l'on ne bornoit pas la fixation du titre au simple produit des boutons.

Il a été prouvé par un grand nombre d'expériences que les meilleures coupelles d'essais sont celles dont la matière n'est que de pure chaux d'os : cette matière doit avoir été calcinée jusqu'au blanc, passée au tamis de soie & bien lessivée: l'on a senti de plus combien il étoit avantageux que les coupelles composées de cette matière fussent formées sous la presse dans des moules où elles acquerroient toute l'égalité dont elles sont susceptibles. Quoique je n'espérasse pas beaucoup d'utilité d'un changement de peu de conséquence

conséquence dans l'usage de ces coupelles, cependant je fis quelques épreuves: Je voulus savoir si devenues plus compactes après avoir servi, & imbibées plus ou moins de litharge, elles absorberoient moins de fin, que lorsqu'elles étoient neuves, & avoient toute leur porosité. Je broyai en conséquence, soit des coupelles que la litharge avoit pénétrées totalement, soit d'autres qui, n'ayant absorbé que peu de plomb, conservoient encore intacte la moitié ou environ de leur matière; je fis passer au tamis de soie la poudre qui en provint, avec l'attention de distinguer celle qui contenoit beaucoup de litharge, de celle qui en étoit moins chargée; & après avoir humecté ces matières, j'en formai d'autres coupelles sous la presse. Lorsqu'elles furent sèches je m'en servis pour plusieurs essais; l'opération s'y fit aussi-bien que dans des coupelles neuves, mais je n'y trouvai point l'avantage que j'aurois desiré, je veux dire la propriété de moins absorber l'argent fin. La seule utilité qu'on puisse retirer de cette expérience, si elle mérite qu'on s'y rende attentif, c'est que la matière des coupelles qui ont déjà servi, fût-elle totalement imbibée de litharge, est bonne pour en composer d'autres: c'est une ressource lorsqu'on est dépourvu de la matière pure, dont la préparation demande quelque temps, & exige des soins. Je n'ai pas besoin de faire remarquer que ces sortes de coupelles, si l'on en ressuscitoit la litharge, ne seroient pas propres à concourir à la fixation du titre intrinsèque des matières d'argent, puisqu'elles rendroient une certaine quantité de plomb qui seroit étrangère à celle du dernier essai, & causeroient par-là une augmentation illusoire dans la restitution du fin.

Je me suis restreint, dans ce Mémoire, au détail d'une partie des expériences que j'ai faites sur la matière importante que j'y traite: Quelque nombreuses & variées qu'aient été les opérations où il a fallu que je me sois livré, j'ai cru qu'il suffiroit d'en tirer les faits qui méritent le plus d'attention, & qui, rapprochés eux-mêmes les uns des autres, fournissent un résultat certain par la lumière mutuelle qu'ils se prêtent. Si l'Académie daigne donc regarder le compte que je viens de lui rendre comme un précis

fidèle de mes expériences; si elle considère d'un autre côté qu'une longue habitude dans ce genre de travail m'a rendu circonspect lorsque les cas l'exigeoient, & m'a fait parler avec assurance lorsque des vérités que j'avois reconnues plusieurs fois se montroient de nouveau, je n'aurai plus qu'à conclure mon Mémoire par un résumé des faits principaux qu'il contient, & par quelques réflexions auxquelles ils donnent lieu.

1.° Il est certain que dans l'opération des essais, telle qu'on la pratique en Europe, il y a une perte plus ou moins forte, mais toujours constante, sur la partie d'argent fin qui, avec l'alliage, compose la matière qu'on essaie; cette perte a toujours lieu aussi sur l'argent le plus pur qu'on fait passer à la coupelle.

2.° Il est également certain que la portion d'argent fin qui constitue cette perte, a été entraînée dans la coupelle par la litharge, & que cette litharge étant ressuscitée & passée ensuite à la coupelle, restitue la totalité de cette portion d'argent fin.

3.° Quand on supposeroit qu'un Essayeur a pris toutes les précautions que la Docimasie prescrit pour l'exactitude des essais & l'uniformité des rapports, dans des épreuves répétées plusieurs fois & dans des temps différens, sur une même matière dont l'alliage a été mêlé parfaitement avec l'argent, cet Essayeur ne pourra pas répondre qu'il trouvera toujours cette matière au même titre: cela est si constant, qu'il arrive quelquefois que deux essais destinés à se servir mutuellement de contrôle, & pour lesquels on ne doit admettre d'autre différence que celle qui résulte de l'endroit qu'ils occupent dans la moufle, ne viennent pas à un titre égal.

4.° L'égalité du titre, abstraction faite de la perte plus ou moins considérable qu'il y a toujours sur les essais, ne tient point à une chaleur excessive ou à une chaleur modérée du fourneau; elle ne dépend point encore de la promptitude ou de la lenteur de l'opération; c'est-à-dire que dans toutes ces circonstances, considérées séparément, un Essayeur pourra remarquer quelques variations dans le titre, ne pas le trouver toujours le même, s'il fait plusieurs essais dans la vue d'obtenir cette égalité: elle paroît

ſans doute dépendre davantage de la conduite du feu que de toute autre cauſe. Mais quel eſt le degré de chaleur qui décide d'un point auſſi délicat? & s'il eſt poſſible de le connoître avec préciſion, combien ne paroît-il pas difficile de procurer aux eſſais ce degré de chaleur déterminé, ſoit dans la circonſtance où l'humidité de l'air arrête l'activité du feu, ſoit lorſque cette activité eſt augmentée par un air ſec & froid? cette difficulté n'a-t-elle pas encore une cauſe dans la qualité du charbon qu'on emploie, dans la conſtruction du fourneau d'eſſai, dans le vide plus ou moins grand que la mouſſe laiſſe autour d'elle pour que la braiſe menue s'en dégage, enfin dans la chaleur conſidérable que le fourneau conſerve, lorſque le feu y a été entretenu pendant pluſieurs heures, & que l'état d'un Eſſayeur exige qu'il y faſſe continuellement des eſſais. Si un homme conſommé dans cette partie a pu parvenir à diſtinguer ce degré de chaleur duquel nous ſuppoſons que dépend l'égalité du titre, il a un coup d'œil, je le répète, qui eſt le point eſſentiel de ſon art; il le doit à un très-long uſage, & les meilleures inſtructions ne le donneront pas.

S'il y a tant de cauſes de variation dans l'opération des eſſais, ſi elles ſont difficiles à écarter, ſi même en y réuſſiſſant, on ne donne jamais le titre réel de la matière qu'on eſſaie, pourquoi ſe borneroit-on au procédé ordinaire, & n'y ajouteroit-on point celui de faire reſtituer aux coupelles la partie d'argent fin qu'elles ont recelée? Par ce ſupplément de travail, on ſe mettroit à l'abri des variations, & l'on reconnoîtroit avec certitude le titre intrinſèque des matières. Pluſieurs des expériences que j'ai détaillées ne laiſſent aucun doute ſur l'exactitude de l'opération, quand on la rend ainſi complète; & on a vu que des particules d'argent impalpables, des huitièmes * de grain de fin viennent ſe réunir au bouton d'eſſai pour compoſer le total de l'argent pur que la matière de l'expérience contenoit.

Peut-être ſera-t-on ſurpris que je parle d'une manière auſſi poſitive de l'argent extrait des coupelles, comme d'une portion de la matière des eſſais, pendant qu'il ne paroît pas que les Chimiſtes

* La cent vingt-huitième partie d'un grain, poids de marc.

qui ont écrit ſur la Docimaſie aient été attentifs à cet article, tout important qu'il eſt. Ce ſilence de leur part, s'il n'a rien de concluant, ſembleroit au moins porter à quelque doute ſur un fait que je n'héſite point à donner pour certain : j'ai ſenti moi-même, lorſque j'ai voulu le conſtater, que les autorités me manquoient, & je n'en ai mis que plus de ſoin dans les expériences qu'il a exigées ; mais elles m'ont paru ſi déciſives pour l'établiſſement de ce fait, que je n'ai point balancé à les préſenter à l'Académie ſous cet aſpect. Si l'on conſidère d'un autre côté que dans les épreuves pour leſquelles la Docimaſie donne des règles, il ne s'agit communément que de déterminer avec une ſorte d'exactitude la quantité inconnue d'un ou de pluſieurs métaux qui par nature ſe trouvent confondus, & non de retrouver avec la dernière préciſion & dans cette vue directe une quantité connue d'un métal qui a été allié exprès avec un autre ; ſi l'on conſidère, dis-je, la différence de ces deux objets de travail, on ſera moins ſurpris que les Chimiſtes ne ſe ſoient point occupés d'une particule d'argent impalpable que les coupelles recèlent : leur baſſin eſt net, lorſque l'opération a réuſſi ; il n'y reſte au fond qu'un bouton d'eſſai brillant & bien formé, tout eſt rendu en apparence. J'avois beſoin moi-même, je l'avoue, du motif de l'intérêt public, & il falloit que, par certaines circonſtances, mes vues fuſſent déterminées vers le fait dont il s'agit, pour que je m'en occupaſſe ſpécialement : je l'ignorerois peut-être aujourd'hui, ſi une diſcuſſion importante ſur la partie des eſſais ne m'eût donné lieu de l'approfondir.

Lorſque j'ai annoncé dans le courant de ce Mémoire, que la fixation du titre des matières deviendroit invariable, à la faveur du procédé par lequel on extrairoit des coupelles la petite partie d'argent fin qu'elles retiennent toujours, je n'ai point diſſimulé que ce procédé rendroit l'opération des eſſais plus longue, plus délicate & un peu plus pénible qu'elle ne l'eſt. L'exactitude du travail dédommageroit ſans doute les Eſſayeurs des peines qu'il auroit exigées d'eux, puiſqu'ils auroient toujours des réſultats certains & ne ſeroient pas expoſés, comme ils le ſont ſans ceſſe, à faire des repriſes d'eſſais, à cauſe des variations qu'ils éprouvent ; mais il

feroit à desirer que l'avantage de connoître sûrement le titre réel des matières, ne dépendît pas d'un aussi long travail: j'ai fait quelques expériences pour l'abréger; elles conduisent à la précision, il est vrai, mais je ne répondrois pas qu'elles la donnassent constamment, & dès-lors il n'en résulte pas l'exactitude dont il faut s'occuper. Voici en quoi elles consistent.

J'ai observé en général dans les essais, qu'il y a un peu moins de variation sur le titre, lorsqu'on s'applique plutôt à obtenir un bouton épuré parfaitement, qu'à le garantir le plus qu'il est possible de la perte qu'il éprouve toujours.

En conséquence de cette observation, j'ai cherché par le tâtonnement, quelle étoit la quantité de plomb, & en même temps quelle étoit la manière de l'employer par intervalles, pendant l'opération, qui me procureroit un bouton d'essai bien affiné, en faisant perdre à ce bouton une partie d'argent fin déterminée: j'ai remarqué en général que huit parties de plomb, dont six étoient employées d'abord seules, & les deux autres servoient, lorsque les premières s'étoient imbibées dans la coupelle; j'ai remarqué, dis-je, que ces huit parties de plomb ainsi employées, affinoient complettement le bouton * d'essai, & entraînoient 4 grains ou à

* On reconnoît qu'un bouton d'essai d'argent est pur lorsqu'il est peu adhérent au bassin de la coupelle, qu'il est net en-dessous, grenu, sans soufflures, & d'un blanc mat; qu'il est brillant en-dessus, bien bombé & comme couvert de petites lames ou écailles qui ont le plus bel éclat. Cette surface écailleuse est remarquable à la loupe simple; elle devient tout autrement frappante sous la lentille la moins forte du microscope: alors il semble que ces petites lames brillantes affectent en général la figure d'un pentagone dont les côtés sont irréguliers: cette figure y est plus ou moins grande, les côtés en sont plus ou moins inégaux; mais j'ai cru remarquer, autant qu'il m'a été possible de bien distinguer cette figure, qu'elle tend plutôt à présenter celle d'un pentagone que toute autre. Ces écailles ne sont pas placées de manière à former sur le bouton une surface unie; les unes sont un peu plus élevées que les autres, & la tranche en est sensible: chacune de ces écailles est striée; les petits filamens qu'on y observe partent des différens côtés pour se rendre à un point qui est ordinairement au centre de l'écaille; ce point m'a paru même un peu plus enfoncé que le reste de la lame; & il sembleroit qu'il se seroit fait un léger affaissement dans l'endroit de la lame où les filamens viennent aboutir. Il seroit assez naturel que de l'argent parfaitement pur, qu'on a mis dans l'état de fluidité par l'opération de

peu près d'argent fin dans la coupelle. Six parties ſeulement de plomb m'ont paru produire le même effet que huit, lorſqu'au lieu de les faire paſſer en deux fois à la coupelle comme les huit parties, on les y met en trois fois, & en obſervant d'employer d'abord trois parties, d'en mettre deux parties enſuite, & de faire ſervir la ſixième, lorſque la coupelle a abſorbé les cinq autres.

Cette obſervation m'indiqua la quantité d'argent fin que devoit contenir le plomb dont je me ſervirois pour tenir lieu de celle que le bouton d'eſſai perdroit : j'avois 4 grains à remplacer en argent fin; il ne me fut pas difficile d'allier du plomb avec de l'argent pur dans les proportions où huit parties enrichiſſent l'eſſai de 4 grains de fin. Mes expériences eurent encore pour baſe la matière d'argent alliée ſur le pied de 10 deniers 22 grains $\frac{1}{4}$; titre que j'avois ſi ſouvent reconnu par la réunion du globule d'argent fin, reſtitué par la coupelle, avec le bouton d'eſſai. Ce même titre reparut dans les expériences dont il s'agit ici, & je l'obtins dans le poids du ſeul bouton d'eſſai : la litharge qui l'avoit épuré, étoit

l'eſſai, qui s'y eſt ſoutenu pendant quelque temps, & qui eſt parvenu lentement à ſa conſiſtance ordinaire, il ſeroit aſſez naturel, dis-je, que cet argent affectât un certain arrangement dans ſes parties, & le montrât toujours le même, ou à peu près, lorſqu'aucun corps étranger ne le trouble. Cela eſt d'autant plus vraiſemblable que les boutons d'eſſais où il reſte encore quelques parties d'alliage, n'ont pas tous les caractères que nous venons de remarquer; s'ils ſe détachent quelquefois de la coupelle avec aſſez de facilité, s'ils ſont grenus en-deſſous & n'y retiennent que peu d'ordures vers les bords, ils ſont moins bombés que les boutons purs, moins bien arrondis; leur ſurface n'a pas l'éclat de ceux-ci; les petites lames ou écailles dont nous venons de parler n'y ſont pas ſenſibles, ou y ſont mal terminées; les ſtries qu'on y aperçoit ne ſont pas dans un certain ordre, & on y voit même de petites taches noirâtres qui ſont un reſte de l'alliage dont le bouton ſe trouve chargé. Ainſi, ſans qu'un Eſſayeur ait beſoin d'avoir recours au microſcope pour juger de toutes les particularités que j'ai remarquées dans un bouton d'eſſai bien pur, il lui ſuffira d'examiner ſimplement à la loupe ſi ceux qu'il obtient dans ſes opérations ont une ſurface brillante, & ſi cet éclat vient des petites lames ou écailles dont il s'agit : car il arrive quelquefois qu'un bouton d'eſſai a toute la beauté de l'argent poli ſans être pur; mais dans cette circonſtance la ſurface du bouton eſt unie comme ſi elle étoit enduite d'un vernis; il n'a jamais le brillant qui eſt dû aux petites lames ſtriées & peut-être encore à des reflets de lumière qui réſultent d'une certaine inégalité imperceptible dans la poſition de ces lames.

encore chargée, il eſt vrai, de 4 grains de fin, mais ils lui appartenoient foncièrement, & il n'y avoit en total que la quantité fixe d'argent fin qui étoit entrée dans l'opération; ainſi voilà des eſſais où, ſans s'écarter de la méthode ordinaire, on parvient à ne rien perdre ſur le fin des matières, ou pour mieux dire, à tirer du procédé même qui occaſionne la perte, un moyen de la réparer.

On remarquera peut-être, en ſe prêtant ici un moment aux vues que j'y donne pour la facilité & l'exactitude du travail, que le moyen dont il s'agit, tout ſimple qu'il paroît, n'eſt pas cependant le plus aiſé dont on puiſſe ſe ſervir; qu'il ſembleroit plus naturel d'employer du plomb totalement dépouillé d'argent, & lorſqu'on peſeroit les boutons d'eſſais pour en établir le titre, d'ajouter au montant des poids la quantité des grains de fin dont on ſuppoſeroit la perte.

Cette manière de rétablir par le calcul ce qui aura été enlevé aux boutons d'eſſais, après qu'on ſe ſera aſſuré, par des expériences antérieures, du point précis où doit aller la perte; ce moyen de la réparer eſt plus ſimple, j'en conviens, que celui que j'ai propoſé; mais j'ai ſenti qu'étant très-difficile de trouver du plomb qui ne contienne point quelques parties d'argent, il valoit mieux en ajouter la quantité néceſſaire pour que les doſes de plomb qu'on emploieroit, fourniſſent aux eſſais le montant de leur perte, que de propoſer aux Eſſayeurs un moyen qui les obligeroit à ſe pourvoir d'un plomb parfaitement pur; ou s'ils en employoient qui contînt un peu d'argent, à défalquer le poids de cet argent ſur celui qu'ils ajouteroient au poids du bouton d'eſſai, afin de compenſer la perte qu'il auroit eſſuyée.

Quoi qu'il en ſoit du choix qu'on pourroit faire de l'une ou de l'autre manière de couvrir une perte déterminée dans les eſſais, j'ai déjà dit qu'il n'en réſulte pas une certitude telle qu'une opération auſſi importante le demande. Le point eſſentiel dans ce moyen abrégé de ſuppléer à la diminution de poids qu'éprouvent toujours les boutons d'eſſais, conſiſte à rendre cette diminution égale, & à la compenſer enſuite, ſoit par une addition réelle d'argent fin, ſoit ſimplement par le calcul: or quel eſt l'Eſſayeur, d'après

les expériences que j'ai rapportées dans ce Mémoire, qui pourra répondre d'une perte toujours égale sur ses boutons d'essais, lorsqu'il répétera plusieurs fois ses épreuves, lors même qu'en les faisant, il aura l'attention de ne pas admettre la plus légère différence dans le procédé qu'il a d'abord suivi? Il faut donc conclure que, si le moyen que je viens d'indiquer met un Essayeur sur la voie de la vérité, il ne l'y met pas invariablement; & que ce ne sera jamais, qu'en restituant à chaque bouton d'essai bien épuré la partie propre d'argent fin qui lui aura été enlevée par la litharge, qu'on pourra connoître le titre réel de la matière qui aura produit ce bouton.

Il se présente ici une réflexion à faire, qui ne tient pas, il est vrai, à la partie physique de l'opération des essais, mais qui prouvera combien ce travail mérite d'être perfectionné.

Il semble, au premier coup d'œil, qu'une particule d'argent impalpable, telle qu'on la retire des coupelles, ne doit presque point influer sur la valeur des masses considérables auxquelles cette particule d'argent est relative, & l'on seroit disposé à croire que, si on l'a négligée jusqu'ici, c'est parce que ne tirant qu'à une foible conséquence, elle ne méritoit pas qu'on en fît l'objet particulier d'une recherche; mais pour peu qu'on se rende attentif au rapport bien déterminé qu'a cette particule d'argent avec la portion de matière prise pour l'essai, & si l'on considère ensuite que cette portion assez foible de matière d'argent représente des masses plus ou moins considérables, on sentira que quelques grains de fin, représentés eux-mêmes par une particule qui échappe aux yeux, ont une valeur relative, & méritent qu'on s'en occupe.

L'argent au titre de 11 deniers intrinsèquement, contient 264 grains de fin; s'il est essayé, il ne sera paraphé assez ordinairement par un Essayeur que sur le pied de 10 deniers 21 grains. Voilà donc une perte de 3 grains sur le titre; elle n'est qu'apparente, je l'avoue: mais elle est réelle pour le commerce, puisque l'argent n'y a de valeur qu'en proportion du titre apparent. Ces trois grains de diminution sont cependant la quatre-vingt-huitième partie de la totalité du titre; l'objet est essentiel sans doute;

doute : n'importe; le bouton d'essai a éprouvé cette perte : son poids fait la règle, & par une conséquence nécessaire, la masse entière perd la quatre-vingt-huitième partie de sa valeur.

Qu'on juge actuellement de quelle importance devient la particule d'argent fin que la coupelle absorbe: elle répond à 1 $\frac{12}{88}$ pour cent de la quantité immense d'Argent monnoyé qui circule dans le commerce, & à 1 $\frac{8}{92}$ ou à peu près pour cent de toute la matière qui a trait à l'Orfévrerie : je néglige celle qui passe dans les galons, dans les étoffes, & généralement dans tous les ouvrages où l'Argent est employé. Qu'on observe encore que toutes les Nations ayant, quant au fond, la même méthode d'essayer l'Argent, que nous pratiquons en France, doivent perdre aussi, soit un peu plus, soit un peu moins que nous, sur la valeur des matières qui circulent chez elles; & alors on sentira que d'une particule d'argent négligée, il résulte des non-valeurs dont le montant a de quoi étonner ; je dis des non-valeurs simplement parce que les fonds existent, & qu'ils n'auroient besoin pour entrer dans le commerce de toutes les Nations que du concert des Princes qui les gouvernent. Je ne me dissimule point à moi-même la grande difficulté qu'il y auroit à établir ce concert parmi les Puissances, quelqu'utile qu'il fût par l'augmentation prodigieuse de matière d'argent alliée, & l'invariabilité du titre qui en seroient les suites. Il y auroit lieu d'espérer sans doute que la méthode que j'indique, ou plutôt la vérité que je propose, pourroit s'accréditer de proche en proche, si elle étoit une fois adoptée par un État, tel que la France, sur lequel les autres ont les yeux, ou tel que l'Espagne que des mines abondantes mettent à portée continuellement d'en verser le produit. Mais tel est le sort de certaines vérités en Physique qui sont liées au grand mobile d'un État; à quelqu'évidence qu'on les porte, & quoique leur utilité soit démontrée, il est rare qu'on puisse les établir au moins dans toute leur étendue, dès que ces vérités exigent un changement dans des pratiques reçues & autorisées par des formes authentiques : on craint les secousses momentanées qu'elles occasionneroient, & l'on tolère par circonspection les inconvéniens dont elles seroient le remède.

S'il eſt donc de la ſageſſe du Gouvernement de ne pas faire uſage quelquefois de ces ſortes de vérités, & d'attendre du temps la facilité de les mettre en vigueur ; il n'eſt jamais avantageux de les ignorer : elles ſont indépendantes de l'ordre politique ; leur lumière ſubſiſte lors même qu'on arrête l'effet général où elles tendent, & s'il vient à s'élever quelque ſyſtème ſpécieux qui ait du rapport avec ces vérités, elles ſe préſentent d'abord à l'eſprit comme autant de points immuables ſur leſquels ce ſyſtème eſt bientôt jugé.



OBSERVATIONS DU PASSAGE DE VÉNUS SUR LE DISQUE DU SOLEIL,

Faites en présence DU ROI, *au château de Saint-Hubert, sous la latitude de 48^d 43' 25".*

Par M. LE MONNIER.

SA MAJESTÉ nous a honorés de sa présence pendant tout le temps des observations qui ont été faites au château de Saint-Hubert; & Elle a bien voulu agréer que M. de Chabert qui est de retour de son expédition du Levant, s'y rendit pour y concourir au succès de nos observations. Son zèle infatigable & son exactitude ne sont pas même ignorés du Monarque ni du Ministère qui a su répandre & rallumer parmi les autres Souverains, la Philosophie & ce génie curieux qui la cultive, en protégeant les Sciences & leur accordant des distinctions éclatantes. 7 Juin 1769.

J'avois inséré en 1761, dans un Écrit public, tous les détails du passage de Vénus, observé au château de Saint-Hubert, & l'on en trouve aussi un extrait avec d'autres détails d'un genre peu différent, concernant la marche de la pendule, dans nos Mémoires de 1761.

Je suivrai aujourd'hui le même ordre, y étant porté d'autant plus naturellement, qu'il n'est pas possible de recueillir dans un premier extrait, tel que nous le communiquons à l'Assemblée, les recherches ultérieures qui dépendent d'élémens que le temps & les circonstances amèneront à une plus grande précision, à mesure que l'on doit s'en occuper. J'ai observé, par exemple, avec beaucoup de soin à midi, au mois de Mai, les vraies longitudes du Soleil; mais celles du mois de Juin, déjà moins fréquentes à cause de la saison pluvieuse, ne pourront être recueillies successivement qu'après le passage par l'apogée, qu'il sera important de reconnoître.

Cependant je vais rendre compte des obſervations que M. de Chabert & moi avons faites le 3 Juin, de l'entrée de Vénus ſur le Soleil, & j'y joindrai auſſi celles de l'éclipſe de Soleil du 4 Juin, que nous avons faites au même lieu.

M. de Chabert s'eſt ſervi de la même lunette de 18 pieds que j'avois employée en 1761, mais dont la bonté eſt telle que nous avons cru devoir y ſubſtituer cette fois-ci, un oculaire de 3 pouces de foyer; elle groſſiſſoit preſqu'autant en cet état, que ma lunette acromatique dont l'objectif a 10 $\frac{1}{2}$ pieds de foyer, ayant deux oculaires plan-convexes, dont l'un eſt de 27 lignes de foyer, & l'autre de 9 lignes, ſuivant la règle ordinaire d'Optique: les ouvertures des objectifs étoient 2 pouces 4 lignes, & 3 pouces 6 à 7 lignes pour le verre acromatique.

Toutes ces précautions avoient été priſes dans la ſuppoſition que nous verrions les deux contacts externe & interne de Vénus au diſque du Soleil, par un temps parfaitement ſerein, afin d'en comparer l'effet avec celui qu'auront pu voir dans les mêmes contacts, ceux qui les auront aperçus fort près du zénit, ainſi que j'en ai averti l'année dernière dans un Écrit publié à la ſuite de celui qui a paru à l'Imprimerie du Louvre en 1761.

Nous n'avons pu obſerver à Saint-Hubert que l'entrée du centre de Vénus ſur le diſque, parce que le ciel venoit de s'éclaircir, & le contact interne qui s'eſt fait à ma lunette acromatique à 7^h $34' 56'' \frac{1}{2}$ de temps vrai; avec une lunette de 18 pieds M. de Chabert a vu le contact interne à $7^h 35' 32'' \frac{1}{2}$.

CONTACT interne.

Nous avions pris la veille avec le quart-de-cercle de M. de Chabert la hauteur du bord ſupérieur du Soleil de $2^d 30'$ à 7^h $39' 32'' \frac{1}{2}$, qui répondent à $7^h 38' 23'' \frac{2}{3}$ de temps vrai, & à $7^h 45' 59'' \frac{1}{2}$, ou plutôt à $7^h 44' 50'' \frac{1}{2}$ de temps vrai, de $1^d 40'$: ces hauteurs ont beſoin de quelques corrections, parce que le quart-de-cercle hauſſe de $11' 00''$, ainſi que nous l'avons ſuppoſé par les hauteurs méridiennes du bord ſupérieur du Soleil qu'on rapportera ci-après. Cette correction ſera déterminée encore plus exactement par les hauteurs de la Polaire, par l'épi de la Vierge & par *Arcturus*, dont les hauteurs méridiennes obſervées le 2 Juin, donneront enfin la latitude du château de

Saint-Hubêrt plus exactement qu'on ne l'a ſuppoſée juſqu'à ce jour.

Ainſi le bord ſupérieur du Soleil, au moment que j'ai obſervé le contact interne de Vénus, étoit élevé de $2^d \frac{3}{4}$ ſur l'horizon, & quoiqu'il y fut plus élevé qu'à Paris, nous ignorons entièrement la réfraction variable qui convient à $2^d\ 45'$ de hauteur. Comme, le jour précédent, l'atmoſphère étoit préciſément au même état, & qu'un nuage fixe & électrique avoit caché le Soleil pareillement vers les $7^h \frac{1}{4}$ du ſoir, nos obſervations de la hauteur du bord ſupérieur du Soleil ne ſeront peut-être pas inutiles pour une pareille recherche; la réfraction qui réſultera de nos obſervations, pourra jeter quelque lumière ſur la comparaiſon des contacts internes, vus ailleurs aux environs du zénit, & par nous à $2^d\ 45'$ là où le bord ſupérieur, que Vénus a touché, a dû paroître affecté par la décompoſition des rayons du Soleil, dont les extrêmes ſont en ce cas les rayons bleus, leſquels ont dû paroître les plus élevés.

Nous avons vu Vénus très-diſtinctement, mais ſous une forme d'autant plus irrégulière, qu'elle approchoit de l'horizon.

À $7^h\ 45'$ de temps vrai, je l'ai jugée loin du bord de tout ſon diamètre; mais ce bord étant irrégulier, nous n'avons pas jugé à propos d'en meſurer la quantité qui varioit à chaque inſtant.

OBSERVATIONS pour la correction de la Pendule & pour la latitude du lieu.

Hauteurs correſpondantes du bord ſupérieur du Soleil.

	au matin.		*au ſoir.*
2 Juin 1769...	$10^h\ 13'\ 17''$ ...	$56^d\ 30'$	... $1^h\ 48'\ 24''$
	10. 13. 46 ...	$+ 99\frac{1}{2}$ Part.	... 1. 47. 53
	10. 15. $57\frac{3}{4}$ ...	56. 50	... 1. 45. $38\frac{1}{2}$
	10. 16. 28 ...	$+ 99\frac{1}{2}$	... 1. 45. $08\frac{1}{2}$
	10. 31. $48\frac{1}{2}$ ...	58. 40	... 1. 29. 52

La hauteur du matin n'étoit pas exactement de $56^d\ 50'\ 00''$: il s'en falloit $5''$ à $10'''$: on y a eu égard dans la correction du midi, que l'on a conclu à $0^h\ 00'\ 46''$, ou bien $46'',3$ ſelon

la dernière hauteur qui a été prise par M. de Chabert; nous avons observé, ce jour-là & le suivant, les passages du Soleil à la ligne méridienne, le ciel ayant été le 3 Juin à midi parfaitement serein.

Le 2 à 12^h $2'$ de la Pendule, le bord supérieur 64^d $00'$ $14\frac{1}{2}$ part., & par conséquent la hauteur méridienne 64^d $00'$ $35''\frac{2}{3}$ sur le quart-de-cercle. Mon observation à 12^h $6'\frac{3}{4}$ de temps vrai donne — $30\frac{1}{2}$ part. & la hauteur méridienne 64^d $00'$ $56''$, ayant eu égard à la variation proportionnelle aux quarrés des temps écoulés, dans la supposition que 4 minutes d'heure répondent à 43 secondes d'abaissement à cette hauteur, ainsi qu'il résulte de ma Table.

Le 3 Juin, il ne nous a pas été possible de prendre le matin les hauteurs correspondantes à celles que nous avons vu le soir, de sorte qu'il a fallu en faire le calcul. Midi à 0^h $01'$ $56''\frac{1}{2}$.

A 9^h $34'$ $09''\frac{1}{2}$	le bord supérieur à l'orient......	51^d $10'$
9. 34. $14\frac{1}{2}$	....	+ $99\frac{1}{2}$ Part.
9. 56. $50\frac{1}{2}$	....	54. 20
9. 57. 17	....	+ $99\frac{1}{2}$

Le 3 à midi,

A 0^h $1'$ $20''$	le bord supérieur corrigé.......	64^d $08'$ $52''\frac{1}{2}$
0. 4. 15	....	64. 08. $19\frac{1}{2}$
0. 6. 30	....	64. 07. $52\frac{1}{2}$

ou bien par un vent impétueux en ce moment,

Le bord supérieur du Soleil..... 64^d $10'$ — 32 Part.
— 52
— $82\frac{3}{4}$

La première & la deuxième hauteur observée diffèrent de $32''\frac{1}{2}$ à cause du vent, & la hauteur méridienne par un milieu a été conclue de 64^d $08'$ $35''$.

au soir.

A 3^h $14'$ $50''\frac{1}{2}$	le bord supérieur du Soleil à l'occident.	44^d $20'$
3. 23. $16\frac{1}{4}$ ou 16	....	43. 00

Temps de la pendule.

A 8^h $30'\frac{1}{2}$ l'Épi de la Vierge..... 31^d $19'$ $57''\frac{1}{2}$ + $70\frac{1}{2}$ Part.

9. 20 *Arcturus*............. 61. 50. 00 + $55\frac{3}{4}$

Nous avions obſervé le 2 au ſoir, temps de la pendule,

A 8^h $11'\frac{1}{2}$ la Polaire au-deſſous du pôle, élevée de 46^d $50'$ + $260\frac{1}{4}$ P. = 46^d $59'$ $32''$

8. 31 l'Épi...................... 31. 30 + $67\frac{1}{2}$ = 31. 32. 28

Le 4 au matin, temps de la pendule,

Temps		Hauteur
A 8^h $12'$ $18''$	Hauteur du bord ſupérieur du Soleil du côté de l'orient.	38^d $20'$
8. 17. $23\frac{3}{4}$		39. 10
8. 34. 58		42. 00
8. 44. 21		43. 30
9. 08. $53\frac{2}{3}$		47. 20.

La première Obſervation calculée, & comparée avec les deux ſuivantes, nous ont donné l'accélération de la Pendule de $2'$ $37''$ à $8^h\frac{3}{4}$ du matin, au lieu que celles du ſoir précédent, donnoient à 3^h $\frac{1}{4}$ l'accélération de $2'$ $31''$; ainſi la Pendule avançoit à minuit ſur le temps vrai de $2'$ $34''$, & en 12 heures elle a avancé régulièrement de $36''$ ſur le temps vrai. C'eſt dans ces ſuppoſitions que nous avons corrigé les temps de la Pendule ci-deſſus pour les réduire au temps vrai: il en faut excepter le contact interne.

Minuit plus exactement à 0^h $02'$ $31''$ de la pendule, & en douze heures, $34''\frac{1}{2}$ d'accélération ſur le temps vrai.

Éclipſe de Soleil du 4 Juin 1769, au matin.

Nous n'avons pas encore eu le temps de comparer nos Obſervations avec nos Tables, ni au calcul rigoureux qu'en a fait M. du Vaucel. La vraie conjonction 4′ après la fin obſervée.

Temps vrai. 6^h $45'$ $51''$ Commencement.
8. 24. 44 Fin de l'Éclipſe, 4^d au-deſſous du centre du Soleil.

Voici les phaſes priſes au micromètre objectif d'un téleſcope de $9\frac{1}{2}$ pouces, l'immerſion des taches du Soleil, leur émerſion, & la diſtance des cornes aux bords horizontaux du Soleil, priſes au micromètre du quart-de-cercle mobile. A 7^h $08'$ $09''$, entre

les bords inférieurs, $599\frac{1}{3}$ part. qui valent 21′ 52″$\frac{1}{2}$, les cornes horizontales: à 7^h 18′ 13″$\frac{1}{2}$ de temps vrai, 0^d 18′ 23″$\frac{1}{2}$ entre les bords inférieurs des deux astres: la grosse tache s'étoit éclipsée 5′ 56″ de temps auparavant, & elle a reparu 0^h 18′ 37″ après à la pendule: à 7^h 57′ 39″ de temps vrai, émersion de la dernière tache: au micromètre objectif à $\begin{Bmatrix} 7^h\ 38'\ 40'' \\ 7.\ 40.\ 30 \end{Bmatrix}$ temps vrai $\begin{Bmatrix} 0^d\ 13'\ 52''\frac{1}{2} \\ 0.\ 13.\ 39\frac{3}{4} \end{Bmatrix}$ phases observées; d'où l'on a conclu la plus courte distance des centres de $\begin{Bmatrix} 0^d\ 18'\ 48'' \\ 0.\ 18.\ 52\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$, c'est-à-dire, 0^d 18′ 51″, ayant égard à l'accourcissement causé par les réfractions: or à 7^h 38′ 40″, le lieu du Soleil corrigé étoit ♊ 13^d 49′ 38″$\frac{3}{5}$, l'ascension droite du milieu du ciel 7^d 07′ 16″$\frac{1}{2}$, l'angle parallactique dans la sphère 38^d 43′ 23″$\frac{1}{2}$. Si l'erreur des Tables des Institutions est additive 2′ 24″, la longitude de la Lune corrigée sera ♊ 13^d 19′ 40″. Les formules d'Euler donnent la parallaxe d'azimut 21″ 42‴, & celle de hauteur qui convient à 56^d 55′$\frac{1}{2}$ de distance apparente au zénit 51′ 23″$\frac{2}{3}$; ainsi l'angle parallactique dans le sphéroïde sera 39^d 03′ 38″$\frac{1}{2}$, la parallaxe de longitude 32′ 23″$\frac{1}{4}$, celle de latitude 39′ 54″$\frac{1}{2}$. Le Soleil paroissoit donc 2′ 20″$\frac{1}{2}$ moins avancé en longitude que la Lune; d'où l'on tire, si la latitude des Tables est 58′ 49″$\frac{1}{2}$, une distance des centres plus grande de 15 secondes que par observation.

On pourroit donc conclure que les Tables des Institutions donnent la latitude trop grande de $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{5}$ de minute, si ce n'est que cette détermination seroit plus certaine, si on la compare aux durées vues à Saint-Hubert & à Paris.



MÉMOIRE

MÉMOIRE

Sur la nature des Suites infinies, sur l'étendue des Solutions qu'elles donnent, & sur une nouvelle méthode d'approximation pour les Équations différentielles de tous les ordres.

Par M. le Marquis DE CONDORCET.

LORSQU'ON suppose qu'une quantité inconnue, fonction d'une ou de plusieurs variables, a une certaine forme indéfinie, dont elle n'est pas réellement susceptible, il arrive souvent qu'en cherchant à déterminer les coëfficiens de la forme indéfinie, on en trouve pourtant la valeur, en sorte que la différence entre la fonction cherchée & la forme indéfinie, poussée jusqu'à un terme n, ne contienne que des termes d'un degré plus élevé, & que cependant quel que soit n, ces termes ne se trouvent pas être nuls.

Cette forme indéfinie étant trouvée pour une fonction connue ou inconnue & ses coëfficiens déterminés, on dit que la fonction est réduite en série, & la série est telle que ses termes successifs sont des fonctions semblables de variables & de n, en sorte que les coëfficiens & les exposans successifs sont donnés par une équation finie & indéfinie en n, ou par une semblable équation entre un exposant ou un coëfficient & ceux qui le précèdent. Ces équations s'appellent la *loi de la suite*.

Si je prends l'expression analytique de la somme de la suite jusqu'à un terme n, & que je l'appelle S, soit F la fonction réduite en série, & F' la fonction qui y étant semblablement réduite, donneroit les termes de la première série, postérieurs au terme n, j'aurai $F = S + F'$, & par conséquent pour que $F' = S$, il faut que $F' = 0$.

L'équation $F = S$ ne peut avoir lieu dans l'hypothèse,

lorſque n eſt un nombre fini. Si donc n eſt ſuppoſé plus grand qu'aucune quantité finie, il peut arriver ou que F' ſoit plus petit qu'aucune quantité finie comme dans les ſuites de la forme $a + bx + cx^2 + ex^3 \ldots$ lorſque $x < 1$, ou que F' ſoit plus grand qu'aucune quantité finie comme dans les mêmes ſuites lorſque $x > 1$, ou enfin que F' ſoit fini comme dans les ſuites de la forme $a + b \text{ coſ. } x + c \text{ coſ. } 2x + e \text{ coſ. } 3x \ldots$

Dans la première hypothèſe, la ſomme de la ſérie priſe en ſuppoſant n plus grand qu'aucune quantité donnée, eſt égale à la fonction qui, par ſon développement, a produit la ſérie, parce qu'elle n'en diffère que d'une quantité plus petite qu'aucune grandeur donnée, & l'on peut prendre l'une pour l'autre.

La même choſe n'a pas lieu dans les autres hypothèſes, parce que dans l'une la même différence eſt plus grande qu'aucune quantité donnée, & que dans l'autre elle eſt finie.

Dans la première hypothèſe où j'ai $F = S$, lorſque n eſt plus grand que toute grandeur donnée de ce que je puis avoir S en général, il ſuit que je puis avoir auſſi une expreſſion générale de F, d'où je pourrai éliminer n à l'aide des expreſſions connues de fonctions tranſcendantes en fonctions qui contiennent ∞. On pourra également avoir S, lorſque F ſera poſſible. Dans la même hypothèſe, quelle que ſoit la queſtion propoſée, & de quelque manière que la ſuite donnée entre dans une ſolution, on peut indifféremment lui ſubſtituer la ſomme ou la fonction qui l'a produite, parce qu'elle repréſente néceſſairement l'une ou l'autre, & qu'ici ces deux qualités ſont identiques.

Il n'en eſt pas de même dans la ſeconde. Soit, par exemple, la ſuite $\left\{\begin{array}{l} 1 + x + x^2 + x^3 \\ + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \end{array}\right\}$, la fonction qui étant développée donne la première partie, eſt $\frac{1}{1 - x}$; celle qui donne la ſeconde eſt $\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} - 1$; ce qui, en les ajoutant enſemble, donne 0, en ſorte que ſi cette ſuite entre dans un

Problème, & qu'elle y tienne la place de la fonction qui l'a pu produire, elle sera o, & la série une quantité nulle qui se présentera sous une forme illusoire; au lieu que la somme de la même suite est $\frac{x^{\infty+1}-1}{x-1}+\frac{\frac{1}{x^{\infty+1}}-1}{\frac{1}{x}-1}-1$, qui étant réduite, est $\frac{x^{\infty+1}-\frac{1}{x^{\infty}}}{x-1}$, & c'est cette expression qu'il faut substituer à la suite, si c'est la somme de la suite qui doit se trouver dans les équations du Problème.

Dans la troisième hypothèse, il faut observer de plus que comme la valeur de la somme y est finie, & a une certaine quantité de valeurs différentes au bout desquelles elle se renouvelle, la quantité qui l'a produite par son développement, ne peut être égale à aucune de ces valeurs, excepté dans le cas particulier où toutes deviennent égales, mais qu'elle l'est à la somme de toutes ces valeurs divisées par leur nombre. En effet, soit prise une de ces valeurs, & que je la réduise en suite, il en naîtra la même suite que la proposée, mais qu'il faudra arrêter à un certain terme, & la même chose aura lieu pour toutes les valeurs consécutives; donc aucune de ces expressions ne peut représenter la fonction qui a produit la suite; mais leur somme, divisée par leur nombre, peut la représenter, parce que cette somme étant réduite en série & divisée par le nombre, il en naît la suite proposée sans être obligé de s'arrêter à un terme plutôt qu'à un autre: en effet, supposant que la suite formée s'arrête à un terme plus loin que la première valeur, alors en augmentant toutes les sommes particulières d'un terme, il est clair que cette somme totale restera la même, & qu'ainsi l'expression de la fonction ne changera point; l'ordre des valeurs restera le même, mais on commencera à les compter à un autre point.

Ainsi dans ces Problèmes, on peut prendre indifféremment la fonction ou la somme de toutes les valeurs de la somme divisée par leur nombre, soit pour x en général, soit pour une

de ſes valeurs particulières, lorſqu'il eſt queſtion d'avoir la fonction, & lorſqu'il eſt queſtion d'avoir la ſomme, on prendra une de ces valeurs qui ſatisfaſſe aux conditions du Problème.

Si j'ai une ſuite, & que je veuille lui en ſubſtituer une autre, dont il ſoit plus aiſé d'avoir la ſomme ou la fonction génératrice, & que les coëfficiens de la nouvelle ſuite ſoient donnés par une ſuite infinie. Il ſuit de ce qui précède, 1.° que ſi on veut avoir la fonction génératrice, il faut ſubſtituer à la ſuite qui repréſente les coëfficiens, non leurs ſommes, mais leurs fonctions génératrices, & prendre enſuite la fonction génératrice de la nouvelle ſuite. 2.° Que ſi on cherche la ſomme, il faut prendre la ſomme de la ſuite des coëfficiens & la ſomme de la ſuite nouvelle. 3.° Que la fonction génératrice de l'un & la ſomme de l'autre, & réciproquement, ne ſe peuvent prendre pour la ſuite ou la ſomme qu'avec les reſtrictions des articles précédens. 4.° Que pour avoir la fonction génératrice de la ſuite des coëfficiens, il faut dans une ſuite $a + b + c + d + e \ldots\ldots\ldots$ multiplier les termes par $y^0, y^1, y^2, y^3, y^4, \ldots\ldots$ prendre la fonction génératrice, & faire $y = 1$.

Soit, par exemple, la ſuite $1 + \text{coſ.}\, x + \text{coſ.}\, 2x + \text{coſ.}\, 3x + \text{coſ.}\, 4x \ldots$ & que faiſant $\text{coſ.}\, x = z$, je veuille avoir une ſuite $a + bz + cz^2 + ez^3 \ldots$ j'ai en ſuivant la méthode ci-deſſus, $a = 1 - y^2 + y^4 - y^6 \ldots$ y étant, ce qui me donne $a = \frac{1}{1 + y^2}$, lorſque $y = 1$; c'eſt-à-dire, $a = \frac{1}{2}$; j'ai de même $b = y \times 1 - 3y^2 + 5y^4 - 7y^6 \ldots$ ce qui me donne $b = \frac{y \times 1 - y^2}{(1 + y^2)^2} = 0$.

J'ai de même $C = 2y^2 \times 1 - 4y^2 + 9y^4 - 16y^6 \ldots = 2y^2 \times \frac{1 - y^2}{(1 + y^2)^3} = 0$;

& ainſi de ſuite, en ſorte que la fonction cherchée de z eſt $\frac{1}{2}$; ou ſi l'on veut $\frac{1}{2 + 2z} + \frac{z^2}{2 + 2z}$; car en

réduiſant cette fonction enſuite, on aura $\frac{1}{2} + o z +$ $o z^2 + o z^3 \ldots\ldots$

Je ſuppoſe que j'aie une courbe donnée par une équation différentielle d'un ordre n, & que ſuppoſant ſon abſciſſe x diviſée en m parties égales x', je prenne, au lieu de la courbe, les angles d'un polygone inſcrit qui ait m coté, j'aurai l'expreſſion de la m^e ordonnée de ce polygone par une équation entre y, n ordonnées ſuppoſées connues m & x'; & ſuppoſant dans l'équation donnée que dx ſoit x', & dy la différence entre deux ordonnées du polygone, j'en pourrai tirer l'équation du polygone d'autant plus approchée que m eſt plus grand, en ſorte que lorſque m eſt infini, cette équation devient une ſuite infinie & en même temps la vraie équation du polygone & de la courbe qui ſe confond alors avec lui.

Si je ſomme cette ſuite, & que je mette x à la place de mx'; & au lieu de m & $\frac{1}{m}$ leurs valeurs tranſcendantes, j'aurai une fonction ſans m qui repréſentera la valeur de y; & ſi cette fonction eſt réduite en ſérie, ce ne ſera point la ſomme de cette nouvelle ſérie, mais la fonction génératrice qu'il faudra prendre; d'où il ſuit que, ſi avant de ſommer la première équation en ſérie, j'en cherche une nouvelle où m & x' ne ſe trouvent pas, mais ſeulement y & x, ce ne ſera pas la ſomme qu'il faudra prendre, mais la fonction génératrice.

Si j'ai une équation indéfinie pour un nombre indéfini de lignes, de points, & que je cherche ce que devient cette équation lorſque le nombre eſt infini, il ſuit des mêmes principes que ſi j'appelle dx les petits eſpaces ſuppoſés conſtans, que je faſſe la même choſe pour les autres quantités ſemblables, & que chaſſant le nombre infini par l'hypothèſe de $m\,dx = x$ ou autre ſemblable, j'aie une équation à intégrer, au lieu d'une ſomme à trouver, il faudra prendre les fonctions génératrices des ſéries qui reſteront dans l'équation différentielle, & non pas leur ſomme.

Ces réflexions me paroiſſent établir ſuffiſamment, qu'en regar-

dant les séries divergentes comme de fausses expressions d'une fonction à qui on a supposé une forme qu'elle ne pouvoit avoir, on peut sans inconvénient les employer dans les solutions des Problèmes en déduisant ensuite de la loi qu'elles suivent, la fonction qu'on y aura été égale. Mais il ne suffit pas que la série fournisse une solution du Problème proposé, il faut encore que cette solution puisse représenter toutes celles du Problème. Je vais donc comparer ici les solutions par les séries aux solutions directes dans ce qui en concerne l'étendue.

J'examinerai cette matière, 1.° pour les équations finies; 2.° pour les équations différentielles.

1.° Si j'ai *y* égal à une suite de puissances rationnelles des variables, cette suite ne donne qu'une valeur de *y* pour chaque valeur de *x*, *z*, &c. en sorte que si le Problème est tel qu'il doive y en avoir plusieurs, les coëfficiens des premiers termes seront donnés par des équations qui auront un pareil nombre de racines, & les termes suivans seront une fonction rationnelle des premiers; en sorte que la série présentera des valeurs discontinues, tandis que l'expression réelle les donne continues, il y aura des angles finis, au lieu d'une courbe continue; & qu'ainsi si la série est convergente, la valeur de *y* qui en naîtra, différera très-peu de la vraie valeur, quant à la grandeur, mais en différera pour l'expression. Il y a des cas où cela est indifférent, d'autres où cet inconvénient est réel, lorsqu'une seule racine de l'équation doit servir à la même solution du Problème, il est indifférent que l'expression des deux racines suive ou ne suive pas la loi de continuité; mais si une solution unique embrasse successivement diverses racines, il faut qu'elles aient une expression commune, sans quoi la solution seroit illusoire. Ainsi le mouvement d'un corps qui se meut dans une ellipse dont l'équation est donnée par une équation entre l'abscisse & l'ordonnée, ne peut pas être censé se mouvoir dans les deux courbes paraboliques discontinues entre elles, qui donnent les valeurs approchées de chaque valeur de l'ordonnée. Il faut donc, lorsqu'on veut employer une série convergente à la solution d'un Problème, que chaque valeur de la série ait l'étendue de la solution complette

du Problème proposé ; il n'en est pas ainsi des séries divergentes, parce qu'en y substituant leur fonction génératrice, la solution se trouve avoir d'elle-même l'étendue & la forme nécessaire.

Lorsqu'il est question d'une équation différentielle aux différences ordinaires, il reste un nombre de coëfficiens arbitraires, égal à l'ordre de l'équation, & un coëfficient donné par une équation d'un degré dépendant de celui où montent les variables dans la proposée. Ainsi dans ce cas la suite convergente ne donne en elle-même aucun moyen de distinguer si l'intégrale est algébrique ou non. Cette connoissance ne peut se tirer que de la loi de la suite ; dans le cas où la vraie expression de l'équation seroit une courbe continue mais transcendante, elle ne donne à la place que des portions discontinues de courbes paraboliques ; d'ailleurs on ne peut déterminer quelles portions on doit choisir, parce qu'il faudroit pour cela donner aux arbitraires la forme générale qui leur convient, & qu'il n'est point possible de connoître indépendamment de la loi de la suite & de la fonction génératrice. Il faut donc pour employer une série convergente à la solution d'une équation différentielle, lui supposer une forme aussi compliquée que celle qu'elle peut avoir rigoureusement. La même chose a lieu dans les autres équations différentielles, & plus la solution en est compliquée, plus les inconvéniens se multiplieront.

Ma dernière réflexion enfin, est que si on a une suite de plusieurs variables égale à zéro, & qu'on veuille en tirer, soit une équation finie entre ces variables, soit la valeur d'une d'elles, il faut donner à la solution qu'on en tire l'étendue dont est susceptible la solution de l'équation qu'on auroit en prenant la fonction génératrice de l'équation proposée. Je vais éclaircir tout ceci par des exemples tirés de la théorie des équations finies, différentielles, aux différences finies & partielles.

EXEMPLE I.er

Soit $y = (\sqrt{1 - a^2 - 2ax - x^2})$, x étant très-petit & a très-peu différent de 1, en sorte que $(\sqrt{1 - a^2})$ soit

de l'ordre $(\sqrt{x})$, j'ai $y = \pm (\sqrt{1 - a^2}) \mp \frac{1}{2}$, $\frac{2ax + x^2}{(\sqrt{1 - a})^2} - \frac{1}{2} \frac{a^2 x^2}{(1 - a^2)^{\frac{3}{2}}}$ pour équation approchée ; d'où il suit 1.° qu'au lieu du cercle qui est le lieu de l'équation proposée, j'ai deux portions de courbes paraboliques pour le lieu de la série convergente qui, à cause de deux valeurs de $(\sqrt{1 - a})^2$, a deux valeurs discontinues entr'elles. 2.° Que $\frac{dy}{dx}$ devient $\frac{1}{0}$, lorsque $y = 0$ dans le cercle & dans la proposée, & que lorsque $y = 0$ dans la série convergente & dans les deux paraboles, $\frac{dy}{dx}$ est égal à une quantité finie, en sorte qu'au lieu d'une seule courbe continue quant à son équation & à sa description, j'ai deux courbes discontinues quant à l'une & à l'autre.

EXEMPLE II.

Soit $dy = \frac{dx}{(\sqrt{1 - x})^2}$; j'ai en réduisant en série $dy = dx \times 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \frac{7}{128} x^8 \ldots$ & intégrant, $y = a + x + \frac{1}{2 \times 3} x^3 + \frac{3}{5 \times 8} x^5 + \frac{5}{7 \times 16} x^7 + \frac{7}{9 \times 128} x^9 \ldots$ si x représente un sinus, & qu'il soit conséquemment plus petit que 1, la série ci-dessus est convergente, mais pour qu'elle représente d'une manière approchée toutes les valeurs de y, il faut que l'arbitraire a soit l'angle plus petit que la demi-circonférence qui répond à $x = 0$ plus $\frac{m\Pi}{2}$, m étant un nombre entier. Et alors on aura une suite convergente qui donnera la valeur de y, & qui aura les inconvéniens dont j'ai parlé dans l'article précédent. Mais si cette série m'étoit proposée, & que je ne susse pas d'ailleurs quelle valeur doit avoir a, je ne pourrois l'apprendre qu'en

qu'en cherchant immédiatement la fonction génératrice de la suite, & la série convergente ne m'apprendroit rien sur l'étendue que peut ou doit avoir la solution, parce que j'ignorerois au bout de quel temps les valeurs discontinues qu'elle donne pour y, doivent changer, & que je ne pourrois le savoir exactement qu'en comparant continuellement une infinité de valeurs de y, connues d'ailleurs, avec celles que donne la proposée. Au reste, cette quantité a qui doit être $a' + \frac{m\Pi}{2}$ explique, & comment la série qui représente l'arc en sinus ou cosinus, donne toutes les valeurs possibles de cet arc, & comment (faisant pour abréger $a' = 0$) l'expression connue du sinus en l'arc, représente le sinus de tous les arcs.

En effet, j'ai $x = \text{fin.}\, y = \left(y - \frac{m\Pi}{2}\right) - \frac{\left(y - \frac{m\Pi}{2}\right)^3}{2\times 3} + \frac{\left(y - \frac{m\Pi}{2}\right)^5}{2\times 3\times 4\times 5} \ldots\ldots$ & faisant $\left(y - \frac{m\Pi}{2}\right) = z \times \text{fin.}\left(z + \frac{m\Pi}{2}\right) = z - \frac{z^3}{2\times 3} + \frac{z^5}{2\times 3\times 4\times 5} \ldots\ldots\ldots$

EXEMPLE III.

Soit l'équation $\varphi(x+q) - \varphi(x) = 0$, je fais $\varphi x = a + bx + cx^2 + ex^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ & j'ai $a = a + bq + cq^2 + cq^3 \ldots a = \varphi q$,

$$b = b + 2cq + 3cq^2 \ldots\ldots\ldots\ldots b = \frac{d \times \varphi q}{dq},$$

$$c = e + 3eq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots e = \frac{d^2 \varphi q}{2\, dq^2}.$$

On voit donc d'abord que la série proposée ne peut représenter φx, que lorsque la valeur de a, dont dépend toutes les autres, a toute l'étendue dont elle est susceptible, étendue qui dépend de la solution générale de l'équation proposée, puisqu'il faut que

$a = \varphi q$. Soit maintenant l'équation . . . .

$$\frac{dy}{dx}\, q + \frac{ddy}{2dx^2}\, q^2 + \frac{d^3y}{2\times 3\times dx^3}\, q^3 \ldots\ldots = 0.$$

équation ensuite à laquelle se rappelle la solution du même Problème, & qu'on peut déduire des valeurs de a, b, c, &c. trouvées ci-dessus.

J'ai d'abord en multipliant par dx

$$a + qy + \frac{dy}{2.dx}\, q^2 + \frac{d^2y}{2\times 3\times dx^2}\, q^3 \ldots = 0.$$

Multipliant ensuite par $e^{fx}\, dx$ pour avoir une nouvelle intégrale, j'ai l'équation de condition $qf + \frac{q^2 ff}{2} + \frac{q^3 f^3}{2\times 3} \ldots = 0$, c'est-à-dire, $e^{qf} - 1 = 0$,

& l'intégrale est $a' + \frac{ae^{fx}}{f} + \frac{qy}{f}\, e^{fx} + \frac{q^2 - 2fq}{f^2\times 1\times 2}\, e^{fx}\, dy \ldots$ d'où soit en supposant des intégrations successives, soit en prenant toutes les intégrales qui donnent les différentes valeurs de f, on aura $y = A + Be^{fx} + Ce^{f'x} + De^{f''x} + Ee^{f'''x} \ldots\ldots$ où A, B, C, D, sont des arbitraires, & la suite est infinie ; ainsi un nombre indéfini de ses termes ne peut représenter y, il doit avoir une forme plus générale, & on trouve en effet que c'est une fonction quelconque de e^{fx}, telle pourtant que substituant $x + q$ pour x, c'est-à-dire, mettant $e^{fq}\, e^{fx}$ à la place de e^{fx}, les deux valeurs qui en naissent pour l'expression de la fonction, ne se trouvent pas les racines inégales d'une même équation.

Ainsi, 1.° y peut être égale à toute fonction de e^{fx} qui contienne des radicaux composés & des exponentielles ou des logarithmiques, en exceptant la fonction le^{fx} qui se réduit à fx, toutes ces fonctions peuvent être mises sous la forme infinie de la série ci-dessus, mais ne peuvent être représentées en général par un nombre indéfini de termes de cette série. 2.° Les termes $e^{\frac{fx}{n}}$ & sin. $(fx)^{\frac{1}{n}}$ ou cos. $(fx)^{\frac{1}{n}}$ peuvent également

entrer dans les fonctions, en observant que e^{fq} doit être 1, ce qui a lieu pour une de ses valeurs; car ayant $a = e^{\frac{fq}{n}}$ l'hypothèse me donne $a^n - 1 = 0$ qui a pour racine $a - 1$; ainsi pour que la fonction soit une vraie valeur de y, il faut prendre cette racine, & les autres en donnent une fausse comme dans la courbe dont l'équation seroit $y = \sqrt{(a \pm \sqrt{ax})}$; la racine est réelle lorsque $x > a$ si on prend le signe $+$, & imaginaire si on prend le signe $-$. 3.° Les fonctions $\text{sin.}\,\frac{fx}{n}$, $\text{cos.}\,\frac{fx}{n}$ en sont exclues lorsque $\frac{1}{n}$ n'est pas un nombre entier, parce que la valeur de $\text{sin.}\,\frac{fq}{n}$, $\text{cos.}\,\frac{fq}{n}$ doit être 0 ou 1 pour satisfaire à l'équation, & que la vraie valeur de ces fonctions ne peut être supposée telle sans que $\text{cos.}\,\frac{fx}{n}$ ne soit $\text{cos.}\,\frac{f'x}{n}$, f' étant une autre valeur de f. Soit, par exemple, la fonction $\text{cos.}\,\frac{fx}{2}$ & que je l'appelle z, j'aurai $2zz - 1 = \text{cos.}\,fx$, & appelant z', $\text{cos.}\,\frac{fq + fx}{2}$ j'ai $2z'z' - 1 = \text{cos.}\,fq + fx = \text{cos.}\,fx$ par l'hypothèse; donc $z = \pm \frac{\sqrt{(1 + \text{cos.}\,fx)}}{2}$; $z' = \mp \frac{\sqrt{(1 + \text{cos.}\,fx)}}{2}$. Mais si je prends le signe $+$ pour la valeur de z, il faudra prendre le signe $-$ pour la valeur de z' toutes les fois que fq ne sera pas égal à 2Π.

EXEMPLE IV.

Soit l'équation $\frac{dz}{dx} = \frac{mdz}{dy}$, & que pour la résoudre j'emploie la substitution de la suite infinie $z = a + bx + b'y + cx^2 + c'xy + c''y^2 + ex^3 + e'x^2y + e''xy^2 + e'''y^3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Comparant les coëfficiens, j'ai $b = b'm$, $2c = c'm$, $c' = 2c''m$, $3e = e'm$, $e' = e''m$, $e'' = 3e'''m$; & ainsi de suite, en sorte que faisant les substitutions, la suite devient $a + b\left(x + \frac{y}{m}\right) + c\left(x + \frac{y}{m}\right)^2 + e\left(x + \frac{y}{m}\right)^3 \ldots$ les a, b, c, restant arbitraires, d'où je conclus que $z = \varphi\left(x + \frac{y}{n}\right) + N$, N étant arbitraire de même que φ.

EXEMPLE V.

Soit l'équation $\frac{ddz}{dx^2} = \frac{c^2 ddz}{dt^2}$, & que je suppose $z = a + a'x + b't + a''x^2 + b''xt + c''t^2 \ldots + (n)^{(n)}x^n + (n-1)^{(n)}x^{n-1}t + (n-2)^{(n)}x^{n-2}t^2 \ldots\ldots + (1)^{(n)}xt^{n-1} + (0)^{(n)}t^n + \ldots$ Cette série étant infinie, j'aurai pour déterminer les coëfficiens, les équations $(n)^{(n)}n(n-1) = (n-2)^{(n)}1 \times 2 \times c^2$, $(n-1)^{(n)}(n-1) \times (n-2) = (n-3)^{(n)}2 \times 3 \times c^2 \ldots\ldots$ & en général $(n-m)^{(n)}(n-m) \times (n-m-1) = (n-m-2)^{(n)}(m+1) \times (m+2)c^2$, en sorte que dans chaque rang les coëfficiens $(n)^{(n)}$ & $(n-1)^{(n)}$ resteront arbitraires.

Je suppose maintenant la fonction ordonnée par rapport à t; & j'ai le terme en x purs $(0)^{(0)} + (1)^{(1)}x + (2)^{(2)}x^2 + (3)^{(3)}x^3 \ldots + (n)^{(n)}x^n \ldots$ le terme multiplié par t^2 $(0)^{(2)} + (1)^{(3)}x + (2)^{(4)}x^2 + (3)^{(5)}x^3 \ldots\ldots\ldots\ldots + (n-2)^{(n-2)}x^{n-2}; \ldots\ldots\ldots\ldots$ & ainsi de suite, appelant le 1.er A, & le second A', j'ai en comparant avec les équations ci-dessus, $A' = \frac{ddA}{1 \times 2}c^2$, & en général le coëfficient de t^{m+2} sera égal à la seconde différence du coëfficient de t^m multipliée par c^2 & divisée par $(m+1) \times$

$(m + 2)$. J'ai donc cette partie de la série qui contient les puissances paires de t égale à $\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)$. On aura également pour les puissances impaires le coëfficient de t égal à $(0)^{(1)} + (1)^{(2)} x + (2)^{(3)} x^2 \ldots\ldots + (n - 1)^{(n)} x^{n-1}$, & celui de t^3 $(0)^{(3)} + (1)^{(4)} x + (2)^{(5)} x^2 \ldots + (n - 1)^{(n+2)} x^{n-1}$,

& ainsi de suite, ce qui donne, appelant le premier B, & le second B' $B' = \frac{ddB}{2 \times 3} c^2$, & généralement le coëfficient de t^{m+2} égal à la seconde différence de celui de t^m multiplié par c^2, & divisé par $(m + 1) \times (m + 2)$, ce qui donne pour la somme de ces puissances impaires de t,

$\varphi'(x + ct) - \varphi'(x - ct)$; on aura donc en général

$$z = \varphi(x + ct) + \varphi(x - ct) + \varphi'(x + ct) - \varphi'(x - ct).$$

Si, cela posé, on veut que x étant zéro, z le soit, quelque valeur qu'ait t, on aura dans chaque rang le terme en t nul, & par conséquent les coëfficiens de toutes les puissances paires de x le seront aussi; donc φ sera une fonction impaire, & φ' une fonction paire.

Si on veut ensuite que lorsque $t = 0$, $z = 0$, ou $\frac{dz}{dt} = 0$, quel que soit x, on aura pour le premier cas $\varphi = 0$, & $\varphi' = 0$ pour le second. Si on veut enfin, que faisant $x = a$, $z = 0$, quel que soit t, on aura $\varphi(x + ca) = -\varphi(x - ca)$ & $\varphi'(x + ca) = \varphi'(x - ca)$, ce qui donne φ' fonction de cos. $\left(\frac{\pi}{2ca} \times (x + ct)\right)$, & φ fonction de cos. $\left(\frac{\pi}{4ca} \times (x + ct)\right)$, cette seconde fonction ne devant point contenir de cosinus multiples pairs de $\left(\text{cos.}\ \frac{\pi}{4ca} \times (x + ct)\right)$,

c'eſt-à-dire, étant ſemblable à la première multipliée par coſ. $\frac{\pi}{4ca} \times (x + ct)$.

Le dernier de ces deux exemples fournit une ſolution très-ſimple du Problème des cordes vibrantes, & tous deux prouvent également ce que j'ai avancé; on voit en effet que la ſuite ſubſtituée, ou telle autre qu'on voudra, donne une forme fauſſe pour la valeur de z, en ſorte que, même lorſque y & x ſont très-petits, on ne peut employer l'expreſſion indéfinie. Mais on peut faire ici une remarque; c'eſt que, dès que l'équation eſt telle qu'on peut déterminer les coëfficiens de la ſuite, ce qu'il eſt toujours facile de faire par des ſubſtitutions, il y aura dans chaque rang de la ſuite autant de nouveaux coëfficiens arbitraires que de fonctions arbitraires dans l'intégrale, cette remarque eſt inutile à l'intégration de ces équations, parce que (de même que dans les équations aux différences ordinaires) la forme de l'intégrale dépend de celle de la loi de la ſuite, mais elle eſt très-importante en ce qu'elle fait connoître le nombre des fonctions arbitraires qui entrent dans cette intégrale, connoiſſance ſans laquelle il n'eſt pas poſſible d'avoir l'intégrale complette de ce genre d'équations.

L'emploi des ſuites ne peut donc être avantageux qu'autant que la forme que doit avoir l'équation eſt connue, du moins pour chaque cas particulier, à moins qu'on ne veuille paſſer de la connoiſſance d'une ſuite divergente à celle de la fonction génératrice, travail ſouvent plus difficile que celui d'une ſolution directe, & ſi on ſait quelle doit être la forme de la ſérie, elle ne donne de ſolutions plus commodes que la ſolution exacte, que lorſqu'on ne peut avoir exactement y égale à une fonction de x, & la connoiſſance de la forme que doit avoir la ſérie dépendant de la forme que doit avoir la ſolution rigoureuſe, il eſt aiſé de voir qu'on ne peut guère employer les ſéries que dans la vue de rendre le calcul plus court, & qu'on ne peut avoir de méthode vraiment générale pour la ſolution approchée, ſans en avoir pour la ſolution exacte.

Les méthodes d'approximation où dans une propoſée $a + by + cy^2 + ey^3 \ldots\ldots = 0$, on néglige les termes

ſupérieurs à by, ſont fondées ſur la ſuppoſition que dans $a + by + cy^2 \ldots\ldots = (a' + b'y) \times (a'' + b''y + c''y^2 \ldots$ les quantités a'', b'', c'', ſont finies; en effet, dans ce cas j'ai $a = a'a''$, $b = a'b'' + a''b'$; donc faiſant $a + by = 0$, j'ai $y = -\frac{a'}{b' + \frac{b''a'}{a''}}$, au lieu de la vraie équation $y = -\frac{a'}{b'}$. Mais ces deux équations ne diffèrent entr'elles que d'un terme de l'ordre y^2, parce que $\frac{b''}{a''}a'$ eſt du même ordre que a' & que y^2. Il faut donc pour que les méthodes d'approximation ſoient légitimes, que ſi j'ai z en x, & que je ſache que $z = X + y$, z n'ait qu'une ſeule valeur en x, ou qu'il n'en ait du moins qu'une ſeule qui ſoit x à peu près. Il en eſt de même lorſqu'on ne néglige qu'une puiſſance ſupérieure à $y^2, y^3, \ldots$ il faut également qu'il n'y ait qu'un facteur de la forme $a' + b'y + c'y^2$, $a' + b'y + c'y^2 + e'y^3$, qui donne y très-petit. Si dans la même hypothèſe d'une ſeule valeur très-petite de y, j'ai l'équation différentielle $ay + bdy + cd^2y \ldots\ldots + X = 0$. Je remarque 1.° que ſi l'intégrale ne contient pas de logarithmes élevés à des puiſſances ſupérieures ou multipliés les uns par les autres, on a pour l'ordre n, n équations $a'A + b'dA = 0$, A étant le facteur qui rend la propoſée une différentielle exacte, & a' b', des fonctions algébriques de x & des fonctions de x qui ſe rencontrent dans a, b, c. 2.° Que ſi l'intégrale contenoit un terme $(lX)^2$ ſeulement, j'aurois en général $(B) \times a'y + b'dy + c'dy^2 \ldots + p'd^{n-3}y + (lX)^2 + X'lX + X'' = 0$. Différentiant, j'aurai $(C)\, a''y + b''dy + c''dy^2 \ldots\ldots + pd^{n-1}y + \left(\frac{2\,dX}{X} + dX'\right), lX + \frac{X'\,dX}{X} + dX'' = 0$, d'où tirant la valeur de lX qui contient une arbitraire & la ſubſtituant dans l'équation (B), j'aurai une ſeconde intégrale de la propoſée, où y ſera au ſecond degré; & comme ſa différence doit donner la propoſée, le facteur doit être du 1.er degré en y, & ne point

contenir y dans son dénominateur. Il en sera de même de l'équation dont l'intégrale contiendroit $(lX)^3$, $(lX)^4$, $(lX)^5$ ......, en sorte qu'en général pour ce cas de l'intégrale, on peut supposer que le facteur est A, $A + By + Cdy$ ...., $A + By + Cdy \ldots + A'y^2 + B'ydy + C'dy^2 \ldots$, & ainsi de suite jusqu'au degré n. 3.° Si l'intégrale contenoit $lXlX'$ qui demande trois différenciations, on trouvera de même deux intégrales linéaires de l'ordre $n - 1$, & une du second degré, ce qui donne deux facteurs A & un $A + By + Cdy \ldots$, en sorte qu'en général, lorsque l'intégrale ne contient que des produits de logarithmes au numérateur seulement, on peut supposer le facteur $A + Bdy + Cdy \ldots + A'y^2 + B'ydy + C'dy^2 \ldots + A''y^3 \ldots$ jusqu'au degré n, une des valeurs au moins de $B, C \ldots$ étant zéro, deux au moins des valeurs des A', B' étant zéro, trois au moins des valeurs des $A'' \ldots$ étant zéro, & ainsi de suite, les quantités $B \ldots A' \ldots A'' \ldots$ sont algébriques. 4.° Si on multiplie par A l'équation $ay + bdy + cd^2y \ldots + X = 0$, on a A par une équation de l'ordre n & n, valeurs de A, qui donnent les intégrales de la proposée.

Je vais donc chercher maintenant les moyens de trouver A en général, & ensuite y, & pour cela je remarque que l'équation qui donne A est toujours de la forme

$$a'A + b'dA + c'd^2A \ldots\ldots\ldots + q'd^nA = 0;$$

& que supposant que j'en eusse l'intégrale,

$$A = nA' + A' \int (n'A'' + A'' \int (n''A''' + A''' \int (n'''A'''' + A'''' \ldots,$$

& ainsi de suite. Je pourrai faire $n = 0$, le reste de la valeur de A sera alors un facteur, & par conséquent nA' en sera un aussi. Cela posé, il est clair que A' peut ne pas contenir d'arbitraires, & par conséquent point d'autre transcendante qu'une exponentielle; en effet, sans cela, supposant d'abord l'équation du second ordre $nA' + A' \int n'A''$, valeur complette de A, contiendroit plus de deux arbitraires, ce qui est impossible; & si on donne à nA' une valeur qui contienne deux arbitraires, alors les trois qui se trouveroient dans $nA' + n'A' \int A''$, se réduiront à deux,

à deux, & par conséquent il y aura une autre valeur de $n A'$ qui ne contiendra qu'une arbitraire. On fera le même raisonnement pour les autres ordres, & on en conclura en général que quel que soit l'ordre de l'équation, on pourra faire $Ac + dA = 0$, c étant algébrique.

Mais lorsque la proposée ne contient pas de radicaux, c peut-il en contenir, & quels doivent-ils être? Il est clair qu'en général c doit être rationnel, & qu'il n'y a que certaines déterminations des coëfficiens de x dans c irrationnel qui puissent faire évanouir ces irrationnalités, & il y a de telles déterminations; en effet, le principe général que toute équation différentielle sans radicaux, & où les plus hautes différences sont à la première puissance, a un facteur rationnel, n'a point d'application ici; parce que dans les équations au-dessus du premier ordre, ce facteur rationnel peut n'être pas fonction de x seulement. Pour le prouver, soit pour le second ordre $V + N = 0$ & $V' + N' = 0$, les intégrales du premier ordre d'une équation proposée, différentiant une fonction quelconque de ces deux intégrales, on aura $B\,dV + B'dV' = 0$, & appelant A le facteur qui a rendu la proposée égale à dV, & A' celui qui l'a rendu dV', on aura $BA + B'A'$ pour le facteur général de la proposée; & comme B & B' sont des fonctions quelconques de V & V', avec cette condition que $\frac{dB}{dV'} = \frac{dB'}{dV}$, il peut se faire que A & A' étant rationnels, & contenant y, $BA + B'A'$, soit irrationnel & sans y. Pour en donner un exemple, soit l'équation $y^m + ay^{m-1} + by^{m-2} + cy^{m-3} \ldots + q = 0$, où $a, b, c \ldots q$ sont des fonctions de x; je dis que différentiant & faisant dx constant, j'aurai successivement les équations rationnelles

$$(A)\ \frac{dy}{dx} + a'y^{m-1} + b'y^{m-2} \ldots\ldots + q' = 0;$$

$$(B)\ \frac{ddy}{dx^2} + a''\frac{dy}{dx} + b''y^{m-2} \ldots\ldots + q'' = 0;$$

& enfin $(M)\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + a_{,}\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + b_{,}\frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} \ldots + q_{,} = 0$;

(les $a', b', \ldots q', a'', b'', \ldots q'', \ldots a_{,}, b_{,}, \ldots q_{,}$ étant des

fonctions rationnelles de x). En effet, différentiant la proposée, substituant dans l'équation (A) la valeur de $\frac{dy}{dx}$ qu'elle fournit, faisant évanouir le dénominateur, & substituant pour y^m, y^{m+1} ... leurs valeurs tirées de la proposée, j'aurai une fonction $Ay^m + By^{m-1} \ldots + Q$, telle que $A = 0$, $B = 0 \ldots Q = 0$. Or ces équations sont au nombre de m, le nombre des coëfficiens a', $b' \ldots q'$ est aussi m, & ils n'y entrent que sous une forme linéaire; donc, &c. On trouvera de même en prenant deux différentielles successives de la proposée, des valeurs rationnelles pour les a'', $b'' \ldots q''$, & ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve également des valeurs rationnelles pour $a_{,}$ $b_{,} \ldots q_{,}$. Supposant maintenant que j'aie $a_{{,}{,}} \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + b_{{,}{,}} \frac{d^{m-3}y}{dx^{m-3}} \ldots q_{{,}{,}} + N = 0$, pour une des intégrales, qui étant différenciée & divisée par une fonction de x, donne l'équation proposée; il est clair que $a_{{,}{,}}$ $b_{{,}{,}} \ldots q_{{,}{,}}$ doivent avoir un nombre $m - 1$ de valeurs algébriques, pour que, en éliminant ses différences supérieures, la valeur de y qui en résulte soit la racine de la proposée; donc c doit contenir des fonctions irrationnelles, parce que sans cela la racine ne contiendroit que des radicaux simples, ce qui n'est pas vrai au-dessus du second degré.

Sachant donc que A peut contenir des fonctions irrationnelles, j'observe 1.° que les radicaux contenus dans c ne peuvent être d'un degré plus élevés que l'ordre de l'équation : en effet, chaque valeur de c donne une intégrale différente, & si les radicaux étoient d'un ordre plus élevé, c auroit plus de valeurs qu'il ne doit y avoir d'intégrales. Je dis que c ne contient pas de radicaux plus élevés que l'ordre de l'équation, & non pas qu'il est donné par une équation d'un degré égal ou moins élevé, parce qu'il suffit que c ne donne pas un trop grand nombre d'intégrales différentes, ce qui n'a lieu nécessairement que dans le premier cas.

J'observe 2.° que s'il y a dans une équation proposée un radical qui ne se trouve pas sous un autre signe radical, & qu'ayant différentié cette équation, je veuille que ce radical

n'y entre plus, la plus haute différence restant sous une forme linéaire, l'arbitraire sera le coëfficient de ce radical, parce que la différence du radical est égale au radical multiplié par une fonction qui ne le contient pas; or il est aisé de voir que les radicaux qui entrent dans la valeur de c, ne sont pas ceux dont le coëfficient est arbitraire, sans quoi les faisant zéro, c deviendroit rationnel; donc on peut supposer que ces derniers radicaux n'entrent point dans la valeur de c. J'observe enfin que le degré de l'équation en c ne peut être plus grand que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots . n + 1$, divisé par le plus petit diviseur de $n + 1$, la proposée étant de l'ordre n. Car une équation plus élevée produiroit nécessairement plus de n valeurs de A, ce qui ne doit pas être.

Cela posé, j'aurai c par une équation de l'ordre $n - 1$, & je saurai qu'il suffit d'en tirer c par une équation algébrique, ce qui me donne le moyen de le trouver par la méthode des coëfficiens indéterminés. c étant trouvé, j'aurai A par les quadratures, & par conséquent l'intégrale finie. On peut avoir cette intégrale donnée en x & en c, sans avoir résolu l'équation en c & x (*Voyez ci-dessous*); mais pour avoir l'intégrale en x, il faudra résoudre cete équation en c & x, or c'est ce qui sera toujours possible. En effet, différentiant cette équation en c, & la mettant sous la forme $ac + b\,dc \ldots\ldots + d^n c + X = 0$, appellant A' son facteur, & supposant $A'c' + dA' = 0$, il suit de la seconde observation que l'équation en c' sera ou moins élevée que l'équation en c, ou du moins ne sera pas d'un degré plus élevé que $\frac{1 \times 2 \times 3 \ldots . n + 1}{4}$ ou $1 \times 2 \times 3 \ldots$ $n + 1$ divisé par le produit des deux plus petits diviseurs de $n + 1$ ou $n + 1$, & le plus petit diviseur de n, si $n + 1$ est un nombre premier; ayant cette équation, on la mettra en différentiant sous la forme $a'c' + b'\,dc' \ldots\ldots + d^{n}c' + X = 0$, & appellant A'' son facteur, & faisant $A''c'' + dA'' = 0$, on aura l'équation algébrique en c'' moins élevée que celle en c' ou que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \ldots\ldots . n + 1$ divisé par les trois plus petits diviseurs de $n + 1$, ou $n + 1$ & les deux

plus petits de n, &c. D'où il suit que répétant cette opération autant de fois moins une que $2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \ldots n + 1$ a de diviseurs, on aura enfin c par une équation rationnelle. On voit que par la même méthode on parviendroit à résoudre une équation algébrique ordinaire d'un degré quelconque. *Voyez les Recherches profondes que M. Bezout a faites sur cette matière.*

Lorsque je n'ai qu'une intégrale d'un ordre moindre & non-finie, on peut ou chercher les autres valeurs de A, ou traiter l'équation intégrale en y, qu'on a trouvée comme on a traité la proposée; cette seconde manière est d'autant plus facile, que A est nécessairement ou algébrique ou exponentielle, & qu'ainsi l'équation intégrale trouvée ne contient de transcendantes que dans son dernier terme en x purs, terme qui n'entre ni dans la valeur du facteur, ni conséquemment dans celle de c. La première seroit plus avantageuse, si les valeurs de A ne pouvoient pas contenir des transcendantes logarithmiques, mais elles en peuvent contenir: soit en effet $y = \int (X \int X' dx + NX) dx + N'$, il est clair que j'ai en général l'équation $d \times \frac{dy}{X} = X' dx$, dont une des intégrales du premier ordre qui contient l'arbitraire N, est $\frac{dy}{X} = \int X' dx + N)$. Mais l'autre équation qui est $d \times \frac{y - N' - \int (X \int X' dx) dx}{SXdx}$ ne peut se trouver sans qu'on connoisse $SXSX' dx$, & contient cette fonction; les cas que j'ai développés au commencement de cet article sont les seuls où l'on puisse se passer d'intégrations répétées, lorsqu'on veut se servir d'une méthode particulière de résoudre la proposée, & par conséquent ce sont les seuls où il soit plus avantageux de chercher toutes les valeurs de A. (*Voyez ci-dessus*), & en général la seconde méthode est préférable.

Soit maintenant prise pour exemple l'équation du second ordre; $Xy + \frac{X' dy}{dx} + \frac{X'' d^2 y}{dx^2} + X''' = 0$, & que A soit le facteur qui la rende une différentielle exacte, j'ai l'équation $(X - dX' + d^2 X'') \times A - (X' - 2 dX'') \times dA + X'' d^2 A = 0$,

je fais $Ac + dA = 0$, & $d^2A = -Adc + Ac^2$, & par conséquent, l'équation (A), $X - dX' + d^2X'' + c(X' - 2dX'') + X''c^2 - X''dc$. Je dois avoir une équation $(B)\ c^2 + A'c + B' = 0$, A' & B' étant des fonctions algébriques & rationnelles de x; j'ai donc $c^2 = -A'c - B'$, & $dc = \frac{A'dA' - 2dB'c + 2B'dA' - Ad'B'}{A'^2 - 4B'}$, je fais disparoître de l'équation (A) c^2 & dc, & égalant à zéro le coëfficient de c & le terme en x, j'ai deux équations en A', B', dA' & dB', & éliminant, j'ai A' en B', & B' donné par une équation, en B', dB', & d^2B', où l'on fait que B' peut être une fonction rationnelle & algébrique de x; l'ayant trouvée, j'aurai A, c, & le reste par les quadratures; soit donc $X = 2 + 8x + 8x^2 + x^3$, $X' = -12 - 8x - 7x^2 - x^3$; $X'' = 3 - 6x - x^2$, je trouverai, en faisant les opérations ci-dessus, $A' = 1 + x$, $B' = 1 - x$, $c = -\frac{1+x}{2} \pm \sqrt{(\frac{-3}{4} + 3x + \frac{1}{4}x^2)}$, & par conséquent $A = [e \frac{\int -1 + x}{2} \pm \sqrt{(-\frac{3}{4} + \frac{3}{2}x\ 1\ \frac{1}{4}x^2)}]\,dx$, ce qui donne deux valeurs de x, & par conséquent y par deux intégrations successives. Soit l'équation de Ricaty, $dy + y^2dx' + px'^q dx' = 0$, je fais $y = \frac{dm}{mdx'}$, $dy = \frac{ddm}{mdx'} - \frac{dm^2}{m^2dx'}$, & substituant $ddm + mpx'^q dx'^2 = 0$, je fais ensuite $x' = x^n$ & dx constant, ces deux suppositions me conduisent à l'équation $xd^2m - (n-1)\,dm + n^2pm = 0$; ou $n = \frac{1}{q+1}$. Soit A le facteur qui rend cette équation une différentielle exacte, j'ai $pn^2A + ndA + xd^2A = 0$, je fais $dA = cA$, & j'ai $pn^2 + nc + xc^2 + xdc = 0$; je fais $c^2 = Bc + C$, & j'ai les deux équations $4pn^2C - pn^2BC + 4xBC - xB^2C + 2CdB - BdC = 0$, $n4C - nBC +$

$4xC^2 - xBC^2 + 3BdB + dC = 0$. Au lieu de B & C, je mets $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$, D étant un dénominateur commun, afin de n'avoir à traiter que des fonctions entières, & j'ai les équations $4pn^2CD^2 - pn^2BCD + 4xBCD - xB^2C + 2CDdB - BCdD - BDdC = 0$, & $(n)\,4CD^2 - (n)BCD + 4xC^2D - xBC^2 + 3BDdB - 3B^2dD + D^2dB - BDdD = 0$. Je suppose ensuite que

$$B = a + bx + cx^2 \ldots\ldots + (p)\,x^p \ldots$$
$$D = a'' + b''x + c''x^2 \ldots\ldots + (p)''\,x^p \ldots$$
$$C = a' + b'x + c'x^2 \ldots\ldots + (p)'\,x^p \ldots$$

& il est aisé de voir que les a, & un quelconque des $b, c, \ldots p$ resteront indéterminés, & qu'il faudra les déterminer par la condition que tous les termes au-dessus de x^p se trouvent nuls. On pourra toujours remplir cette condition; en effet, il est clair 1.° que les deux équations différentielles en B & C doivent donner une valeur algébrique de ces quantités (il en est de même de toutes les équations différentielles possibles, & cela suit de la forme dont leurs intégrales sont susceptibles). 2.° Que les valeurs de B & C doivent être rationnelles; en effet, si elles ne l'étoient pas, on auroit plus d'une valeur pour B & C, plus de deux par conséquent pour c, plus de deux pour A, & par conséquent plusieurs valeurs différentes de m qui devroient avoir lieu en même temps, ce qui est impossible.

L'intégration des équations, dont je parle ici, se réduit donc à des quadratures répétées, c'est-à-dire à trouver $\int ydx$, lorsqu'on a $Ady + Bdx = 0$; en effet, soit $\int Xdx$ à trouver, & que X contienne deux transcendantes, faisant $X = y$, on aura $\int ydx$ & $Ady + Bdx = 0$, A & B contenant l'autre transcendante: trouvant donc une différentielle exacte de y & de x, intégrant par rapport à y, il ne restera à intégrer par rapport à x qu'un terme qui contiendra une transcendante; le Problème se réduit donc à trouver une fonction de

x, y, dx, dy, différentielle exacte qui devienne $y\,dx$, lorſque $dy = -\frac{B\,dx}{A}$. J'ai traité ailleurs de ce Problème; je remarquerai ſeulement ici que faiſant $\int y\,dx = X + Ay + By^2 + Cy^3 \ldots$ & $dy = a + by + cy^2 \ldots$ $A, B, C \ldots X$ étant des fonctions de x de même que $a, b, c \ldots$ ce qu'on ſait pouvoir toujours ſuppoſer après une ſubſtitution convenable, j'aurai les équations $A = -\frac{dX}{a}$, $B = \frac{-Ab - dA + 1}{2a}$, & ainſi de ſuite; ce qui me donne la ſérie $X + Ay + By^2 \ldots$ au premier terme près; différentiant cette ſérie, le terme qui multipliera dy & celui qui multipliera dx, ſeront des ſéries récurrentes, & il reſtera à déterminer par cette condition le terme X qui eſt auſſi une ſérie récurrente. Au reſte, le cas de $X =$ à une conſtante doit être examiné le premier, & peut-être même cette ſuppoſition eſt-elle générale.

Si la quantité y a m valeurs très-petites, ou que je ne veuille négliger que des termes de l'ordre y^m, j'aurai une équation de l'ordre n & du degré m, qui ne contiendra que des puiſſances rationnelles & entières de y & ſes différences, & où $d^n y$ ne ſera qu'au premier degré. La fonction qui multiplie $d^n y$ eſt du degré $m - 1$, celle qui n'eſt pas multipliée par $d^n y$ du degré m, & toutes deux de l'ordre $n - 1$. Suppoſons qu'on ait une différentielle exacte du même ordre & du même degré, & telle qu'elle ne diffère de la propoſée que des termes du degré $m + 1 \ldots$ il eſt clair que cette hypothèſe laiſſe, pour remplir les conditions qui ſont néceſſaires pour que la fonction ſoit réellement une différentielle exacte, autant de coëfficiens qu'il y a de termes dans une fonction de l'ordre $n - 1$ & du degré $m - 1$; or ce nombre eſt ſuffiſant. En effet, il eſt clair 1.° qu'une fonction rationnelle & entière de y & de ſes différences, n'eſt une différentielle exacte, que lorſque chaque rang de la fonction ordonnée par rapport à y, ſe trouve l'être auſſi. 2.° Que pour que $AZ + BdZ + Cd^2Z + Dd^3Z \ldots$ ſoit une différentielle exacte, il ſuffit d'une ſeule condition. 3.° Que par cette raiſon, ſi j'ai une fonction homogène de y & de ſes différences, qui doive être une

différentielle exacte, soit m le degré & n l'ordre des différences; j'ai 1.° le terme en $d^n y$ & y^{m-1} qui est le dernier terme de $d^n y^m$, ce qui me donne n, termes de la fonction pour lesquels il suffit d'une condition. 2.° J'ai chaque terme $y^p dy^{m-1-p} d^n y$ qui est le dernier terme de $d^{n-1} . y^p dy^{m-p}$, ce qui me donne à chaque terme, $n - 1$ termes de la fonction pour lesquels il ne faut qu'une condition. 3.° J'ai chaque terme $y^p dy^q d^2 y^{m-1-p-q} d^n y$, qui est le dernier terme de $d^2 y^{m-p-q} dy^{2m-p-q}$, ce qui pour chaque terme me donne $n - 2$, termes de la proposée, pour lesquels une condition suffit. 4.° Par conséquent le nombre des conditions est égal au nombre des termes d'une fonction de l'ordre $n - 1$ & du degré $m - 1$, & il me reste à prouver que le nombre des termes, pour lesquels ces conditions suffisent, est égal à celui de la proposée. Or la proposée peut être représentée sous cette forme $y^{m-1} \times ay + b dy \ldots\ldots + p d^n y$, plus tous les termes du degré $m - 1$, en y, & dy sans termes en y purs multipliés par $b' dy$, $c' d^2 y \ldots\ldots\ldots p' d^n y$, plus tous les termes du même degré en y, dy, ddy, sans termes en y, & dy purs multipliés par $c'' ddy \ldots\ldots\ldots\ldots p'' d^n y$ & ainsi de suite, & le nombre des termes d'une fonction ainsi ordonnée, est égal à celui pour lequel on a les conditions. Donc, &c.

Soit, par exemple, $n = 3$, $m = 3$, j'ai la fonction

$$Ay^3 + By^2 dy + Cy dy^2 + D dy^3 + Ey^2 ddy + Fy dy ddy + G dy^2 ddy + Hy ddy^2 + I dy ddy^2 + K ddy^3 + Ly^2 d^3 y + My dy d^3 y + N dy^2 d^3 y + Oy ddy d^3 y + P dy d^2 y d^3 y + Q ddy^2 d^3 y.$$

Et $A' y^3 + B' d \times y^3 + C' d^2 \times y^3 + D' d^3 \times y^3 \ldots$

Quatre termes & une condition.

$+ A'' y dy^2 + B'' d (y dy^2) + C'' d^2 (y dy^2) \ldots\ldots$

Trois termes & une condition.

$+ A''' dy^3 + B''' d \times (dy)^3 + C''' d^2 (dy)^3 \ldots\ldots$

Trois termes & une condition.

$+ A^{v}$

$+ A^{IV} y d^2 y^2 + B^{IV} d \times (y d d y^2) \ldots\ldots\ldots\ldots$

Deux termes & une condition.

$+ A^{V} d y d d y^2 + B^{V} d \times (d y d d y^2) \ldots\ldots\ldots\ldots$

Deux termes & une condition.

$+ A^{VI} \times d d y^3 d d' y^3 + B^{VI} d \times (d d y^3) \ldots\ldots\ldots$

Deux termes & une condition.

En, tout ſeize termes & ſix conditions, nombre des termes multipliés par $d^3 y$; prenant enſuite ces ſix termes, on trouvera que celui qui eſt en y purs ſe trouve multiplié dans toute la propoſée par quatre termes $d^3 y$, $d^2 y$, dy, y; que les deux qui contiennent y & $d\,y$, ſont multipliés par trois termes $d^3 y$, $d^2 y$, dy; que les trois qui reſtent ſont enfin multipliés par deux termes $d^3 y$, $d^2 y$, ce qui me donne également ſeize termes. Ainſi en général toutes les fois qu'on a une équation approchée pour y du degré m, & qu'on peut négliger les termes ſupérieurs à ce degré, on peut trouver une fonction du même degré égale à des termes ſupérieurs près, & qui ſoit une différentielle exacte.

La valeur des coëfficiens en x purs eſt toujours donnée ici par des équations où ils ne montent pas au-deſſus du premier degré. Ainſi le nombre des équations étant égal à celui de ces coëfficiens, & leur ordre à celui de l'équation, on aura pour chacun un pareil nombre de valeurs, & par conſéquent on aura toutes les intégrales de la propoſée d'un ordre immédiatement inférieur, & on en déduira ſon intégrale finie. La partie de l'intégrale qui eſt multipliée par y, ou ſes différences, ſe trouve immédiatement, & celle du terme en x purs ſe trouve par les quadratures.

Revenons à la méthode d'approximation. Il eſt aiſé de voir 1.° que les ſeules équations dont l'intégrale eſt ſuſceptible de la forme ſous laquelle elle les préſente, ſont ſûrement réſolues par elle; & qu'ainſi comme cette forme n'eſt pas générale, la méthode ne l'eſt pas non plus. 2.° Que quand bien même elle réuſſit, on ne peut pas juger par le degré qu'on néglige dans l'équation différentielle, de celui qu'on néglige dans l'intégrale. Ce ne peut donc être que d'après la connoiſſance des intégrales

qu'on trouve pour la propoſée, qu'on peut juger ſi la méthode s'y applique & à quel degré il faut s'arrêter.

Voici un exemple fort ſimple du procédé de la méthode, & de la manière de l'employer.

Soit, par exemple, l'équation propoſée

$$X + ay + bdy + cd^2y + edyddy + gyddy + hy^2 + iydy + Kdy^2 = 0,$$

& que je cherche une équation de la même forme qui n'en diffère que de puiſſances de y ſupérieures à la ſeconde, & qui ſoit différentielle exacte, j'ai en multipliant par $A + By + Cdy$, l'équation

$$\begin{array}{llllll} AX & + Aa \times y & + Ab \times dy & + Acddy & + Agyddy & + Aedyd^2y \\ & + BX & + CX & & + Bc & + Cc \\ & + Ahy^2 & + Aiydy & + AKdy^2 = 0, & & \\ & + Ba & + Bb & + Cb, & & \\ & & + Ca & & & \end{array}$$

& les trois conditions

$$d^2 \times Ac - d \times (Ab + CX) + Aa + BX = 0,$$

$$d^2 (Ag + Bc) - d \times (Ai + Bb + Ca) + 2 \times (Ah + Ba) = 0;$$

$$d \times (Ae + Cc) - 2 \times (Ad + KC - Ag - Bc) = 0.$$

On a donc les trois coëfficiens A, B, C, donnés pour des équations linéaires, je les ſuppoſe réſolues, & que j'aie les deux valeurs de ces coëfficiens A, A', B, B', C, C', j'aurai les deux intégrales

$$\int AX + Acdy + [Ab + CX - d(Ac)]y + \frac{Ag + Be}{2} d \times y^2 + \frac{Ac + Bb + Ca}{2} - \frac{d \times Ag + Be}{2} y^2 + \frac{Ae + Cc}{2} dy^2 = 0,$$

deſquelles éliminant dy, j'ai l'intégrale finie; & ſi les fonctions qui multiplient les y^2, ydy, dy^2 ſont du même ordre, quant à la grandeur, que les coëfficiens de y & dy, on aura des valeurs approchées de y.

Si on vouloit avoir une méthode d'approximation qui fût réellement générale, on pourroit l'avoir en obſervant qu'elle doit pouvoir donner la vraie valeur de y, lorſqu'on a y égal à une fonction de x, & que lorſque cela n'eſt pas poſſible, elle doit en donner une valeur approchée; on aura donc en général, ſi la propoſée n'a point de radicaux,

$$\frac{A + A'y + B'dy \ldots\ldots + A''y^2 + B''ydy \ldots\ldots}{P + P'y + Q'dy \ldots\ldots + P''y^2 + Q''ydy \ldots\ldots} + N = 0,$$

pour une des intégrales de la propoſée où tous les coëfficiens ſont des fonctions de x données par des équations de la forme $aA + bdA = 0$, avec cette condition que n étant l'ordre de l'équation, & m le degré où montent les y, l'intégrale de l'ordre $n - 1$ puiſſe être égalée à une fonction rationnelle en y, où $d^{n-1}y$ ſoit au premier degré & multiplié par une autre fonction ſemblable: ces conditions donnent pour les A, A', B', des conditions qu'il faut remplir, & qui ſerviront à déterminer les coëfficiens.

En négligeant un degré quelconque, le nombre des conditions égalera celui des indéterminées; mais il faut obſerver qu'ici les A, A' . . . . ne ſont plus donnés par des équations linéaires, & qu'il faut néceſſairement employer les intégrations ſucceſſives; que cependant il n'eſt pas poſſible d'avoir une méthode d'approximation générale qui ſoit plus ſimple, à moins qu'on ne prouve qu'en général une fonction tranſcendante de x dont la valeur ſoit grande ou petite, peut toujours être changée en une fonction d'une autre forme qui n'en diffère que très-peu; ce qui me paroît devoir être vrai, pourvu que la valeur approchée ait la même étendue que la vraie valeur: alors la méthode propoſée ci-deſſus ſeroit générale, mais il me ſemble que cette matière mériteroit d'être encore examinée.

M. de la Grange a donné dans les Mémoires de l'Académie de Turin, *tome III, page 262 & ſuiv.* une méthode qui s'étend à tous les ordres & à tous les degrés, mais qui ſuppoſe que x ne ſe trouve pas dans la propoſée, ce qu'on peut toujours faire par une différentiation; celle que je propoſe ici a ſeulement l'avantage d'être déduite immédiatement des principes généraux du Calcul intégral.

Cette méthode réduit les Problèmes à la ſommation des ſuites récurrentes, ou à la recherche de fonctions rationnelles de quantités données, & je crois devoir terminer ce Mémoire par quelques réflexions ſur cette matière, qui peuvent être, ce me ſemble, de quelqu'utilité.

Soit $\frac{a + bx + b'y + b''z + cx^2 + c'xy + c''y^2 + c'''xz + c^{iv}yz + c^{v}z^2 \ldots\ldots + (m, n, p)\, x^m y^n z^p}{A + Bx + Cy + Dz \ldots\ldots + Q x^{m'} y^{n'} z^{p'}} = P.$

où $P.$ est une fonction rationnelle entière & finie des variables; & $A, B, C, \ldots\ldots Q$, des constantes. Il est clair que lorsque $m > m', n > n', p > p'$, & que le terme $x^m y^n z^p$ ne se trouve plus dans P, on a en général $A\,(m, n, p) + B\,(m - 1, n, p) + C\,(m, n - 1, p) + D\,(m, n, p - 1) \ldots\ldots\ldots + Q\,(m - m', n - n', p - p',) = 0$, où je désigne en général par (m, n, p) le coëfficient $x^m y^n z^p$; dans la série, on aura donc le coëfficient (m, n, p) donné en général par une équation linéaire d'un nombre de termes fini indépendant de la valeur de m, n, p, & égal à celui des termes du dénominateur, & si on connoît la loi d'une série, qu'elle soit donnée par une équation pareille, & qu'on cherche la valeur des coëfficiens du dénominateur de la fonction que cette série représente, on aura en général le coëfficient de $x^{m'} y^{n'} q^{p'}$ dans le dénominateur égal à celui de $(m - m', n - n', p - p')$ dans la loi de la série; cette théorie n'a pas plus de difficulté que celle des suites récurrentes à une seule variable, & quel qu'en soit le nombre, elle peut s'y appliquer également.

Je suppose que j'aie une fonction $\frac{A' + By + Cy^2 + \ldots\ldots\ldots + (M - 1)\, y^{m-1}}{A' + B'y + C'y^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + (M - 1)'\, y^{m-1}}$; que de plus j'aie une équation $y^m = (m - 2)\, y^{m-2} + (m - 3)\, y^{m-3} + (m - 4)\, y^{m-4} \ldots + a\, A, B, C, \ldots (M - 1); A', B', C' \ldots (M - 1)', (m - 2)\ (m - 3) \ldots\ldots a$ sont des fonctions rationnelles, entières & finies de x. Je réduis cette fonction en série de la forme.

$(0)'' + (1)''\, y + (2)''\, y^2 \ldots\ldots + (M - 1)''\, y^{m-1}$ les fonctions $(0)'', (1)'', (2)'' \ldots\ldots\ldots\ldots (M - 1)''$ étant des suites infinies en x. Je multiplie cette série par le dénominateur; mais avant que d'en développer le produit, il me faut chercher quel est le coëfficient de y^p dans y^{m+n} après qu'on met à la place de y^m sa valeur $(m - 2)\, y^{m-2} + (m - 3)\, y^{m-3} \ldots$

& je trouve qu'il eſt

$$(p-n)+(m-2)(p-n+2)+V(p-n+4)+Z(p-n+6)+T(p-n+8)$$
$$+(m-3)(p-n+3)+V'(p-n+5)+Z'(p-n+7)+T'(p-n+9) \ \&c.$$

où V eſt ce que deviennent les termes précédens en y faiſant $p = m + n - 4$; V' ce que deviennent les mêmes termes lorſque $p = m + n - 5$; Z, Z' ce que deviennent les termes précédens lorſque $p = m + n - 6$, ou $m + n - 7$; TT' ce que deviennent les précédens lorſque $p = m + n - 8$ ou $m + n - 9$, & ainſi de ſuite. Cette formule ainſi ordonnée a un nombre n de termes; & les produits des coëfficiens ſont du degré $\frac{n}{2} + 1$ ou $\frac{n+1}{2}$ ſelon que n eſt pair ou impair. Si donc les x montent à un degré p' dans les coëfficiens de la valeur de y^m, ils monteront au degré $\left(\frac{n}{2} + 1\right) p'$ ou $\left(\frac{n+1}{2}\right) p'$ dans les coëfficiens de la valeur de y^{m+n}.

Cela poſé, déſignant par $(p)^{(n)}$ le coëfficient de y^p pour le terme y^{m+n}, j'aurai

$$A = A' \times (0)'' + (0)^{(0)} \times [B'(M-1)'' + \overline{(1)''(M-1)' + C'(M-2)''}^{\,P} + (2)''(M-2)'] \ldots$$
$$+ (0)^{(1)} \times C' [(M-1)'' + \overline{(2)''(M-1)' + (3)'(M-2)''}^{\,P'} + (3)''(M-2)'] \ldots$$
$$+ (0)^{(2)} \times [(D)'(M-1)'' + \overline{(3)''(M-1)' + (4)'(M-2)''}^{\,P''} + (4)''(M-2)'] \ldots$$

& ainſi de ſuite juſqu'au terme $o^{(m-2)}$, j'aurai ſemblablement

$$B = (0)'' B' + A'(1)'' + (1)^{(0)} P + (1)^{(1)} P' + (1)^{(2)} P' \ldots\ldots\ldots$$
$$C = (0)'' C' + A'(2)'' + B'(1)'' + (2)^{(0)} P + (2)^{(1)} P' + (2)^{(2)} P'' \ldots$$
$$\text{Et } (M-1) = (M-1)'' \times A' + (M-2)'' B' + (M-3)'' B' \ldots$$
$$+ A''(M-1)' + (M-1)^{(0)} P + (M-1)^{(1)} P' + (M-2)^{(2)} P'' \ldots$$

En ſorte que dans ces formules, on doit avoir égal à zéro, chaque coëfficient d'une puiſſance de x ſupérieure à la plus haute puiſſance de x dans le numérateur; j'appelle cette puiſſance q, &

je remarque 1.° que chacun des coëfficiens de x^q qui doit être égal à zéro, contient la première puissance des coëfficiens de x^q dans toutes les séries $(0)''$ $(1)''$ $(2)''$ $(3)''$ . . . . 2.° Qu'il contient également la première puissance des coëfficiens qu'ont dans ces séries les puissances inférieures à x^q; mais que la puissance la plus basse, dont il puisse contenir le coëfficient sera, appellant q' la plus haute puissance de x dans le dénominateur,

$$q - q' \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ -\frac{n+1}{2} \end{array} \right\} p', \text{ } n \text{ étant successivement } 0,$$

1, 2, 3, $(m - 1)$.

Ainsi on aura en général le coëfficient de x^q dans $(0)''$, $(1)''$, $(2)''$ donné par une équation linéaire qui contiendra le coëfficient de $x^{q-q'}$ dans $(0)''$, celui de $x^{q-q'-p'}$ dans $(1)''$, celui de $x^{q-q'-p'}$ dans $(2)''$, celui de $x^{q-q'-\frac{m}{}p'}$ ou $x^{q-q'-\frac{m+1}{2}p'}$ dans $(M - 1)''$; & ceux des puissances supérieures jusqu'à x^q.

Si maintenant on a une suite donnée dont les coëfficiens suivent une pareille loi, & qu'on en cherche le dénominateur, la valeur de y''' étant connue, c'est-à-dire, m & p'; substituant dans les formules que donne la théorie ci-dessus les valeurs des coëfficiens de x^q, égalant à zéro les quantités qui multiplient les coëfficiens des puissances inférieures, on parviendra à déterminer les coëfficiens du dénominateur; mais il faut observer que lorsqu'on a le terme général donné par une équation qui contient les coëfficiens des termes inférieurs, non-seulement dans la même série, mais dans toutes les séries $(0)''$, $(1)''$ . . . $(M-1)''$ on peut en avoir une valeur qui ne contienne que les coëfficiens des puissances inférieures de la même série $(0)''$, par exemple, également en nombre fini: en effet, soit n' le nombre des termes des autres séries qui entrent dans cette valeur, je prends les équations que donnent les coëfficiens de x^{q-1}, x^{q-2} . . . . $x^{q-n'}$ dans chaque série; les équations sont au nombre $(m + 1) \times n'$, & ne contiennent que $m \times n'$ coëfficiens des séries différentes de $(0)''$; Donc on pourra éliminer tous les coëfficiens; donc le coëfficient de x^q dans $(0)''$ dépendra de n'

termes pris dans cette même suite. Par conséquent, chaque suite $(0)''$ $(1)''$ ...... $(M + 1)''$ sera elle-même une suite récurrente, ce qui est évident d'ailleurs ; en effet, soit une fonction $A' + B' y + C' y^2 \ldots + (M - 1)' y^{m-1}$, & que je la multiplie par une fonction semblable du même nombre de termes, & que je mette à la place de y^m sa valeur, j'aurai une fonction d'un nombre m de termes, & j'aurai m facteurs indéterminés, & par conséquent je pourrai en trouver des valeurs convenables pour que les termes multipliés par y s'évanouissent, & qu'il ne reste que le terme constant, car cette condition n'exige que de satisfaire à $m - 1$, équations linéaires.

Ces réflexions me fournissent deux moyens de sommer les sortes de séries que je vais appliquer successivement au même exemple.

Soit la série

$$1 + x + ax^2 + bx^3 + c'x^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ (1 + x + a'x^2 + b'x^3 + cx^4 \ldots) \sqrt{(3 + \frac{1}{2} x)},$$

& que j'aie $a = -3$, $a' = 0$, & en général le coëfficient de x^q dans la première série étant p, celui de x^{q-1} p', celui de x^{q-2} p''; & n, n', n'', les coëfficiens des termes correspondans de la seconde $p + p' + n' + n'' = 0$ $2n + n' - n'' = 0$. Je suppose que le dénominateur soit $A + Bx + (A' + B'x)(\sqrt{3} + \frac{1}{2} x)$, j'ai les équations

$$A'p' + B'p + An + Bn' = 0$$
$$Ap + Bp' + 3A'n + 3n'B' + \frac{1}{2} A'n' + \frac{1}{2} B'n'' = 0.$$

Substituant dans la première les valeurs de p & de n, & égalant à zéro les coëfficiens de n' n'' p, j'ai $A = 2A'$, $B = 2A'$, $B' = A'$, valeurs qui satisfont également à la deuxième. Pour déterminer le numérateur, je trouve qu'il ne peut être que $A'' + B''x + (A''' + B'''x) \sqrt{(3 + \frac{1}{2} x)}$, & j'ai

$$A'' = A + 3A', A''' = A + A', B'' = A + B + 3 \times (A' + B') + \frac{1}{2} A'.$$

Et comme A' ſe trouve à tous les termes du numérateur & du dénominateur, la fonction cherchée ſera

$$\frac{5 + \frac{21}{2} x + (3 + 6x) \sqrt{(3 + \frac{1}{2} x)}}{2 + 2x + (1 + x) \sqrt{(3 + \frac{1}{2} x)}}.$$

Telle eſt la première méthode; voici la ſeconde: j'ai d'abord $2n + n' - n''$ qui, ſuivant la théorie connue, à cauſe des premiers termes $1 + x \ldots$ donne la fonction $\frac{2 + 3x}{2 + x - x^2}$; J'ai enſuite $p' + p' + n' + n'' = 0$, & à cauſe de $p' + p'' + n'' + n''' = 0$, & de $2n' + n'' - n''' = 0$, $2p + p' - p'' = 0$, d'où, à raiſon des trois premiers termes $1 + x - 3x^2 \ldots$ j'ai la fonction $\frac{2 + 3x - 6x^2}{2 + x - x^2}$; la fonction totale ſera donc $\frac{2 + 3x - 6x^2}{2 + x - x^2} + \frac{(2 + 3x)\sqrt{(3 + \frac{1}{2}x)}}{2 + x - x^2}$, fonction qui eſt la même que ci-deſſus, en multipliant le numérateur & le dénominateur par $2 + 2x - (1 + x)\sqrt{(3 + \frac{1}{2}x)}$.

De ce que toute fonction algébrique de x & de y, lorſque y eſt donné par une équation $y^m = (m - 2) y^{m-2} + (m - 3) y^{m-3} \ldots$ ſe trouve être de la forme $A + By + Cy^2 + Dy^3 + \ldots Qy^{m-1}$, ou $A, B, C, D \ldots Q$ ſont des fonctions égales à une ſérie récurrente; il eſt aiſé de voir que j'ai à intégrer une fonction ſemblable de x & de y, je pourrai toujours m'aſſurer ſi elle a une intégrale algébrique, & ſi elle en a une, la trouver par la ſomme d'une ſérie récurrente; en effet, quel que ſoit l'intégrale, pourvu que j'aie fait la ſubſtitution de $x + g$, afin d'avoir un terme conſtant dans toutes les fonctions; j'aurai cette intégrale de la forme $A' + By' + Cy'^2 \ldots + Q'y^{m-1}$. $A', B', C', \ldots Q'$ étant des ſéries, & il faudra pour que la propoſée ſoit algébrique, que le coëfficient de x^q dans chacune de ces ſéries, dépende d'un nombre fini de termes pris dans toutes les ſéries indifféremment; alors

alors on aura immédiatement l'intégrale par les méthodes que je viens d'expoſer, cette manière d'intégrer des fonctions, quoiqu'affectées de radicaux, peut être très-commode dans la pratique.

Appliquant maintenant aux ſuites de ſinus & de coſinus multiples, les principes que je viens d'expoſer.

Soit donc premièrement une ſérie

$$a + b \operatorname{coſ.} x + c \operatorname{coſ.} 2x + e \operatorname{coſ.} 3x \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ b' \operatorname{ſin.} x + e' \operatorname{ſin.} 2x + e' \operatorname{ſin.} 3x \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si la fonction dont le développement l'a produite eſt une fonction rationnelle, on aura le coëfficient de coſ. nx donné par un nombre fini de coëfficiens de coſ. $(n - 1)x \ldots$ & de ſin. $(n - 1)x \ldots$ ou bien, mettant la ſérie ſous la forme

$$a + b \operatorname{coſ.} x + c \operatorname{coſ.} 2x + e \operatorname{coſ.} 3x \ldots\ldots$$
$$+ (a' + b' \operatorname{coſ.} x + c' \operatorname{coſ.} 2x \ldots\ldots\ldots\ldots) \operatorname{ſin.} x \ldots$$

on aura deux ſéries dont la ſomme ſera rationnelle, & par conſéquent le coëfficient de coſ. nx dépendra d'un nombre déterminé de termes, ainſi la recherche de coëfficiens du dénominateur n'aura aucune difficulté, ſoit qu'on conſidère la loi de la ſuite ſous un point de vue ou ſous l'autre, & dès que l'équation entre les coëfficiens eſt linéaire & d'un nombre conſtant de termes, la fonction génératrice eſt rationnelle.

Soit de plus un angle $\frac{x}{p}$, p étant un nombre entier, la ſuite ne contiendra que les termes coſ. $mx + \frac{p'}{p}x$, ſin. $mx + \frac{p'}{p}x$ où m eſt un entier poſitif, de même que p' & $p' < p$; il eſt clair encore que les coëfficiens de ſin. ou coſ. $\left(m + \frac{p'}{p}\right)x$ ſeront donnés par des équations d'un nombre fini de termes qui contiendront les coëfficiens des ſin. & coſ. où m ſe trouve être plus petit, p' ayant ſucceſſivement toutes ſes valeurs.

Mais ſi l'on veut mettre la ſuite ſous la forme

$$A + B \text{ cof. } \frac{x}{p} + C \text{ cof. } \frac{2x}{p} \dots\dots\dots$$
$$+ B' \text{ fin. } \frac{x}{p} + C' \text{ fin. } \frac{2x}{p} \dots\dots\dots$$

$A, B, C \dots\dots\dots\dots B' \dots C' \dots$ ſeront des fonctions rationnelles de ſinus x & coſinus x. En effet, de l'équation qui donne les coëfficiens de cof. ou fin. $(m + \frac{p'}{p} x)$, on déduit très-facilement les équations entre les coëfficiens de fin. ou cof. mx dans $A, B, C \dots . B', C'$, en obſervant qu'ici p' ne peut être plus grand que $\frac{p+1}{p}$, & qu'au lieu de cof. $(m - 1 + \frac{p''}{p})x$ qui donne cof. $(m - 1)x$ cof. $\frac{p''}{p}x$, il faut prendre cof. $(m - \frac{p-p''}{p})x$ qui donne cof. $mx \times$ cof. $\frac{p - p''x}{p}$, lorſque p'' eſt plus grand que $\frac{p+1}{p} \dots\dots\dots$ On aura donc un moyen ſûr de ſommer ſi une telle ſérie de ſinus & de coſinus (qui en faiſant p égal aux produits de tous les dénominateurs des angles ſous-multiples, ſe trouve être très-générale) lorſqu'elle a une ſomme algébrique. Cette méthode peut être très-commode lorſqu'on emploie les approximations; en effet, en intégrant, on trouve dans ce cas l'angle x & ſes ſinus & coſinus, & ſi la ſomme de la ſuite en ſinus n'eſt pas algébrique, & que cependant on puiſſe n'avoir aucun égard aux différentes valeurs que peuvent fournir les tranſcendantes, on pourra ſans beaucoup d'erreur ſuppoſer entre les coëfficiens, l'équation qui donne une ſomme algébrique, & la trouver, quoique ſouvent la ſérie elle-même ſoit divergente.

Lorſque les ſuites contiennent un angle px, p étant irrationnel, on aura la loi des coëfficiens de la ſuite, lorſque la fonction génératrice eſt rationnelle, comme on l'a pour deux variables;

& on peut tirer les mêmes avantages de cette manière de déterminer les fonctions rationnelles. En général, toutes les fois que le coëfficient d'un terme quelconque est donné par une équation linéaire & d'un nombre fini de termes, quelles que soient les fonctions qui entrent dans la série, la fonction génératrice est une fonction rationnelle des variables & de ces fonctions.

Lorsqu'on a $a + by + cy^2 + ey^3$.............. série récurrente de y & de x, on voit aisément qu'il suffit que a, b, e..... étant des fonctions rationnelles, on ait entre ces coëfficiens des équations linéaires d'un nombre déterminé de termes, & dans lesquels les facteurs soient des fonctions de x.

On remarquera de plus que lorsqu'il est question de s'assurer si une série proposée est récurrente, il est souvent plus commode de chercher son terme général en n, n étant l'exposant de x dans ce terme. Cela est sur-tout utile lorsque la série a d'autres fonctions génératrices que des fonctions rationnelles, & que celles-ci ne sont que des valeurs particulières : dans ce cas on remarquera que faisant le terme général égal à $e^{an} b$, il satisfera à l'équation linéaire en (n), $(n - 1)$, *&c.* qu'on a pour une série récurrente, & qu'on aura e^a pour une équation d'un degré égal à $m + 1$ si l'équation linéaire va jusqu'au terme $n - m$; & il est aisé de voir 1.° que b reste arbitraire; 2.° soit e^a, $e^{a'}$, $e^{a''}$, *&c.* les racines de l'équation en e^a; la vraie expression du terme général sera $e^{an} b + e^{a'n} b' + e^{a''n} b''$, *&c.* b, b', b'', *&c.* étant des arbitraires différentes; 3.° que si l'équation en e^a a deux racines égales $a = a'$, il faudra, au lieu de $e^{an} b + e^{a'n} b'$, mettre $e^{an} (b + b'n)$, & ainsi de suite pour un plus grand nombre de racines égales. Quant aux séries qui représentent des fonctions algébriques non rationnelles, on a en général l'équation

$$\left.\begin{array}{l} a\ (n)^{(m)} + b\ (n - 1)^{(m)} + \ldots \\ a'\ (n)^{(m-1)} + b'\ (n - 1)^{(m-1)} + \ldots \\ + a_{,}\ (n) + b_{,}\ (n - 1) \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Cette équation ayant un nombre déterminé de termes, cette manière d'exprimer le terme général est suffisante pour trouver la somme d'une série de ce genre lorsque m est connu, ce qui a lieu dans tous les cas dont je me suis occupé ici, & qu'on a une autre équation de ce terme général, à qui il la faut comparer; mais le cas où m seroit inconnu est beaucoup plus indéterminé, & renfermeroit beaucoup plus de difficultés.



OBSERVATION DU PASSAGE DE VÉNUS SUR LE DISQUE DU SOLEIL,

Faite à l'Obſervatoire royal le 3 Juin 1769.

Par M. CASSINI DE THURY.

LES nuages nous cachèrent le Soleil juſqu'à $7^h\ 38'$ du ſoir, 7 Juin 1769.
que nous commençames à apercevoir ſon bord ſupérieur, ſortant d'un nuage, & Vénus dont le diſque ne nous parut pas encore entré ſur le Soleil; j'ai jugé le contact intérieur à $7^h\ 38'\ 53''$ avec une lunette de Dollond de $3^d\frac{1}{2}$.

M. le duc de Chaulnes a eſtimé ce contact 4 ſecondes plus tard, comme on le verra par le détail de ſon Obſervation.

M. du Séjour a jugé le contact 10 ſecondes plus tôt avec une lunette achromatique du ſieur Létang, qui faiſoit l'effet d'une lunette de 6 à 7 pieds.

Pendant le temps où Vénus paroiſſoit le plus diſtinctement, je n'ai rien aperçu ſur ſon diſque, ni couleur, ni anneau, ni alongement ſenſible; j'ai eſſayé de déterminer le diamètre de cette Planète, que j'ai trouvé de $1'\ 1''$, & une ſeconde fois de $1'\ 1''\frac{1}{2}$: mais les vapeurs faiſoient paroître les bords de Vénus & du Soleil, ondoyans, & je doute beaucoup de l'exactitude de cette détermination.

Les deux obſervations que j'ai faites dans l'intervalle d'un quart-d'heure pour déterminer la route de Vénus ſur le Soleil, en faiſant paſſer cette Planète par les fils horizontal & vertical d'un quart-de-cercle, ne nous promettent pas une préciſion ſuffiſante pour pouvoir en conclure la route de cette Planète, & les autres

élémens; à 7^h 48′ la distance du bord du Soleil au bord inférieur de la Lune a été trouvée de 1′ 12″.

J'ai avancé, dans un Mémoire sur la parallaxe du Soleil, qui fait partie de la relation de mon voyage en Allemagne, que j'avois trouvé le temps de la conjonction de Vénus avec le Soleil en 1761 à 2 minutes près de celui que donnoient les Tables de mon père, corrigées; & ayant calculé le lieu de Vénus pour le temps de la conjonction dernière, marquée dans la Connoissance des Temps à 10^h 9′ 53″, j'avois trouvé le lieu de Vénus pour ce temps, de 8^s 13^d 36′ 53″, plus petit de 17 secondes que celui du Soleil, qui étoit alors de 2^s 13^d 27′ 10″; d'où j'avois conclu que la conjonction arriveroit plus tard de 4 à 5 minutes de temps, & j'en avois prévenu les Astronomes qui devoient faire l'Observation avec moi: j'avois aussi trouvé la latitude géocentrique de Vénus de 10′ 15″ en supposant le lieu du nœud de 2^s 14^d 35′ 45″ selon la correction que j'ai indiquée dans le même Mémoire.

Relation du Voyage.

Mon père qui avoit calculé dès 1737 les deux conjonctions de Vénus de 1761 & de 1769, & les phases de ces deux éclipses, avoit remarqué que, tandis que selon les Tables de M. Halley, on ne devoit pas voir à Paris l'entrée de Vénus sur le Soleil dans le passage de 1769, qu'on la verroit selon ses Tables, une heure avant le coucher du Soleil, & il avoit déterminé l'heure du contact intérieur à 7^h 43′ 18″, sans tenir compte de la parallaxe qui devoit faire paroître l'entrée plus tôt de 7′ 10″, qu'il faut retrancher pour avoir l'immersion totale à 7^h 36′ 8″, à 2 minutes près de celle qui a été observée.

Mém. Acad. année 1737.

J'ai encore fait une autre remarque dans le même Mémoire sur la parallaxe du Soleil, que je ne croyois pas que l'Observation de la phase du contact intérieur fût aussi facile à déterminer, que plusieurs Astronomes l'avoient annoncée; j'étois fondé sur l'expérience *, & cette remarque a été confirmée en dernier lieu non-seulement par mes propres observations, mais par celles de

* Voyez dans mon Mémoire, la Table des différences dans l'heure du contact intérieur, déterminé par les Astronomes de l'Académie.

tous ceux qui les ont fait de concert avec moi, & qui m'ont dit qu'ils n'avoient pas diſtingué cette phaſe, avec cette évidence qui ne laiſſe aucun doute ſur le moment précis d'une Obſervation.

OBSERVATION de l'Éclipſe de Soleil du 4 Juin 1769.

Le ciel a été plus favorable pour l'Obſervation de l'éclipſe du Soleil; je me ſuis ſervi de la même lunette de Dollond pour déterminer le commencement de l'Éclipſe que j'ai jugé à $6^h\ 46'\ 49''$.

Il a été obſervé quelques ſecondes plus tard par M.rs du Séjour & du Vaucel.

J'ai quitté cette lunette pour obſerver avec une autre de huit pieds, garnie d'un micromètre, la quantité de l'Éclipſe, & mon fils rendra compte de la quantité des doigts qu'il a meſurés; j'ai déterminé avec la lunette de Dollond, les inſtans où le bord de la Lune éclipſoit les taches que l'on apercevoit ſur le bord du Soleil, & l'émerſion des mêmes taches: cette dernière phaſe eſt incertaine à cauſe de la quantité des taches dont le diſque du Soleil étoit couvert, & de la difficulté de reconnoître la même tache à l'entrée & à la ſortie.

A $6^h\ 51'\ 39''$ la tache *A* à moitié éclipſée.
7. 13. 24
7. 14. 20 une autre tache *O* éclipſée.
7. 23. 14 une tache *B*.
7. 23. 43 entièrement éclipſée.
7. 26. 14 le bord de la Lune touche à une autre tache.
7. 28. 16 le bord touche pluſieurs petites taches *C*.
7. 33. 26 une tache ſort.
7. 42. 7 le bord a une tache.
7. 45. 59 une tache *C* ſort.
7. 53. 24 } les taches *CC* ſortent.
7. 54. 59 }

A 7^h 57′ 44″ la tache *B* ſort.
8. 21. 24 une tache *A* ſort.
8. 23. 4 la tache ſort.
8. 27. 18 fin de l'Éclipſe.

La grandeur m'a paru de 5 doigts $\frac{1}{3}$; j'ai examiné avec la plus grande attention pendant toute la durée de l'Éclipſe, la circonférence du diſque de la Lune, & je n'ai remarqué ni inégalité, ni altération, ni couleur: les cornes paroiſſoient fort aiguës par les extrémités.



MÉMOIRE

Sur l'éboulement qui arrive quelquefois à des portions de Montagnes & autres terreins élevés; & sur les moyens de prévenir ces éboulemens & de s'en garantir dans plusieurs circonstances.

Par M. PERRONET.

ON voit quelquefois des terreins assez considérables, se détacher des montagnes & descendre dans la plaine, en ravageant & empotant tout ce qui se rencontre sur leur passage. Tel est, par exemple, l'accident arrivé en 1733, à Pardines, près Issoire en Auvergne; le terrein, sur environ quatre cents toises de longueur & trois cents de largeur, descendit sur une prairie assez éloignée, avec les maisons, les arbres & ce qui étoit dessus; tout fut culbuté & mis dans une espèce de cahos; une partie de vigne assez considérable, s'est cependant conservée en état d'être exploitée utilement pour le propriétaire du terrein sur lequel elle étoit descendue, & il a continué d'en jouir depuis ce temps.

5 Juillet 1769.

Des montagnes entières peuvent aussi quelquefois s'écrouler, comme cela est arrivé à une montagne fort haute & presque adjacente à celle de Chimboraço, province de Quito, la plus élevée des Cordillères.

On voit encore des portions considérables de terreins emportés, soit par des réservoirs supérieurs d'eau, dont les digues viennent à se rompre, ou par une fonte subite de neige, telle que celle qui est arrivée en 1742, sur la montagne ou volcan de Cotopaxi, aussi province de Quito, laquelle renversa cinq à six cents maisons, fit périr environ neuf cents personnes, & entraîna dans sa chute une grande partie du terrein qu'elle parcourut; la vîtesse des eaux étant prodigieuse, à cause de la hauteur de sept à huit cents toises dont elles étoient descendues.

Des évènemens de cette nature doivent être attribués à des tremblemens de terre, des volcans, ou à des cauſes qui dépendent plus particulièrement de la diſpoſition & de la qualité du terrein; celles-ci ſeulement ſont plus à portée d'être obſervées & prévues; il eſt intéreſſant d'en faire la recherche pour connoître les terreins qui ſont les plus expoſés à s'ébouler, afin de n'y pas faire d'édifices publics, ni d'habitations, & pour garantir, s'il y avoit moyen, les ouvrages qui s'y trouveroient établis. C'eſt cette recherche, & celle des glacis que prennent les terres & autres matières éboulées ou jetées, après avoir été fouillées pour en former des digues, des chemins ou des terraſſes élevées, qui font eſſentiellement l'objet du préſent Mémoire.

Je vais commencer par expoſer quelques obſervations & expériences qui me ſerviront à établir ce que j'ai à dire.

La terre, le ſable & les autres matières ſemblables doivent être conſidérées comme étant contiguës & faiſant maſſe, ce que l'on nomme communément *terre vierge*, ou bien comme étant diviſées après avoir été fouillées & remuées, ou par quelqu'autre cauſe que ce ſoit.

La terre en maſſe, les pierres & tous les autres corps ne ſauroient rouler ni deſcendre que leur centre de gravité ne ſoit mis en mouvement; les plus grandes maſſes & celles qui ſont dures, étant auſſi les plus difficiles à déplacer: on conçoit qu'une certaine portion de terrein un peu conſidérable, qui aura exiſté un nombre de ſiècles dans le même état de repos, y reſtera toujours, s'il ne ſurvient quelques changemens à ſon état naturel.

Ces changemens peuvent arriver dans la maſſe des corps.

Si l'on vient, par exemple, à charger le ſommet d'un terrein qui auroit peu de conſiſtance, & dont le glacis ſeroit roide, ſoit en y portant des terres, ou en y élevant des édifices trop peſans, les terres qui pouvoient auparavant ſe ſoutenir, ſeront ſollicitées à s'ébouler dans une partie inférieure à cette ſurcharge, & formeront après leur chute & celle de l'édifice, un nouveau glacis, qui ſera moins roide que le premier.

Si l'on vient à couper au pied d'un terrein qui eſt en glacis, une portion de ſa maſſe, la partie ſupérieure ſera auſſi ſollicitée

à deſcendre, à moins que la force de la cohéſion ne la retienne, comme cela arrive aſſez ordinairement dans les terres vierges d'une certaine conſiſtance, & dans celles qui ſont pierreuſes ou garnies de racines d'arbres.

Il eſt aiſé de reconnoître ces terreins au coup d'œil, & de juger, à peu près, juſqu'à quel point on pourroit, ſans trop riſquer, les charger au ſommet des glacis, ou les fouiller à leur pied.

Il peut arriver du changement dans les parties qui compoſent une maſſe de terre.

L'eau, en s'introduiſant dans cette maſſe, peut la diviſer & en diminuer la cohéſion, pour lors il devra s'en ébouler une portion, le glacis naturel changera & deviendra plus incliné avec l'horizon.

La peſanteur de l'eau qui ſe ſera introduite dans la terre, en chargera auſſi la partie ſupérieure; l'équilibre pourra être rompu, & cette cauſe ſe trouvant réunie avec la diminution de la cohéſion, il en réſultera un plus grand & plus prompt éboulement du terrein.

La terre la plus légère, la plus douce & poreuſe eſt auſſi la plus facile à être pénétrée & atténuée par l'eau; cette ſorte de terre s'y met même en quelque ſorte en diſſolution pendant que le fluide eſt en mouvement ſur le terrein en pente qu'il parcourt, & ſur lequel il fait auſſi des ravines ſouvent profondes, & des éboulemens plus ou moins conſidérables.

On connoît en Tiérache & dans pluſieurs autres endroits de la France, de la terre de cette eſpèce, dans les temps ſecs elle ſe rapproche & ſe raffermit cependant aſſez conſidérablement.

Si on fouille une terre vierge, les côtés de cette fouille prennent un glacis naturel, qui varie ſuivant les différentes conſiſtances & cohéſions des terres. On en connoît de fortes, telles que la terre à pot qui ſe tient à plomb juſqu'à 30 pieds & plus de hauteur; les terres franches & de certains ſables gras ſe tiennent auſſi aſſez verticalement, les terres légères, les ſables fins & ſecs les plus déſunis prennent un talus d'environ 30 degrés avec l'horizon.

La terre qui a été anciennement fouillée a moins de cohéſion

que la terre vierge, & celle qui eſt nouvellement remuée en a encore moins, étant jetée à terre coulante elle prend différens talus ou glacis, leſquels paroiſſent avoir quelques rapports avec le premier état de conſiſtance de ces terres.

La terre la plus forte, par exemple, prend, d'après l'examen que j'en ai fait, un talus de 35 à 36 degrés, avec l'horizon, au lieu de 45 degrés, que beaucoup de perſonnes ſont dans l'uſage de lui attribuer; la terre plus légère & le ſable prennent (comme les terres vierges de la moindre conſiſtance qui ont été fouillées & qui s'éboulent), un glacis d'environ 30 degrés, les autres terres à proportion. La plus grande différence de l'angle n'eſt *que de 6 degrés* pour les terres & les ſables remués; on en excepte cependant les terres glaiſes humectées, leſquelles ſe placent ſur un plus petit angle qui ſe réduit quelquefois à 18 degrés, & même encore moins.

Du gros gravier, des cailloux ou des pierres caſſées, forment un angle de 40 juſqu'à 45 degrés au plus.

Tous ces angles ont été meſurés au ſommet des terreins rapportés, ou qui ſe ſont éboulés, leurs glacis pouvant être conſidérés dans cette partie comme étant en ligne droite; ce qui arrive effectivement quand le glacis a peu de hauteur, & qu'il eſt fait de ſable ou de terre légère, mais j'ai reconnu que dans les cas contraires, les glacis ſe forment une courbure qui eſt occaſionnée par l'accélération que les corps, qui ſont d'une certaine figure & groſſeur, acquièrent en roulant; la corde de cette courbure peut former, avec l'horizon, un angle d'environ 2 degrés de moins que ceux qui ſont indiqués ci-devant, ce qui peut cependant encore varier, ſuivant les différentes hauteurs des levées & la nature des terreins : je vais rapporter un exemple très-ſenſible de cette courbure.

La vallée des bois de Haie, au-delà de Toul, route de Paris à Nanci, a été comblée principalement avec des roches & pierres caſſées ſur 142 pieds de hauteur, pour y faire paſſer le nouveau chemin; cet ouvrage, qui eſt très-conſidérable, ſeroit vraiment digne des Romains; j'y ai reconnu que le glacis forme une courbure très-ſenſible, dont la plus grande flèche ou abſciſſe,

mesurée perpendiculairement à la courbure du glacis, se trouve vers les deux tiers, à compter du sommet du chemin; cette flèche a 6 pieds 8 pouces de longueur : il ne paroît pas que l'on ait jusqu'à présent fait attention à cette courbure que forme le glacis des grands remblais *(a)*.

L'angle & la courbure du glacis des remblais sont importans à connoître pour le toisé de ces remblais. Un Ingénieur qui auroit un pont à faire construire sous un chemin élevé, devroit aussi y avoir égard pour déterminer la longueur de ce pont; faute de cette attention, il est souvent arrivé que l'on a fait les ponts trop courts, & d'autant plus que le chemin étoit plus élevé.

Indépendamment des angles & de la courbure que prennent les différens terreins qui s'éboulent, ou que l'on porte en remblai, je dois aussi, pour le but que je me propose, examiner l'inclinaison des plans sur lesquels les grosses masses de terrein peuvent commencer à se mettre en mouvement.

J'ai reconnu, par l'expérience, que si l'on pose des pierres taillées, de différens poids & grosseurs, & successivement, sur une pièce de bois qui soit seulement sciée sans avoir été rabotée, ces pierres ne commencent à glisser que lorsque la pièce de bois fait, avec l'horizon, un angle de 39 à 40 degrés.

On sait qu'un corps poli étant posé sur un plan qui le soit aussi, ne commencera à glisser que lorsque ce plan formera, avec l'horizon, un angle de $18^d\ 26$ à $27'$, & pour lors la hauteur de ce plan sera le tiers de sa base; cette inclinaison est communément nommée l'*angle des frottemens.*

L'angle des frottemens que l'on vient de citer, a été établi par M. Parent *(b)*, d'après les expériences de M. Amontons, rapportées dans les Mémoires de l'Académie, *année 1699 ;* ces expériences servent communément encore aujourd'hui de règle aux Mécaniciens pour le calcul du frottement des machines; ce qui peut convenir lorsque l'on n'a à mouvoir que des poids peu considérables, & qui soient proportionnés à la force des

(a) Terrein remué & déposé au-dessus du terrein naturel.

(b) Voyez le premier Mémoire de M. Parent, inséré dans le Recueil de ceux de l'Académie, *année 1704.*

reſſorts que M. Amontons a employés pour établir ſes expériences, ou à des preſſions médiocres; mais s'il étoit queſtion du déplacement de plus groſſes maſſes, telles que celles que j'ai à conſidérer dans le préſent Mémoire, l'angle d'inclinaiſon ſur lequel elles pourroient ſe mettre en mouvement deviendroit beaucoup plus petit que celui de 18^d 26 à 27' que l'on vient de citer; c'eſt ce qu'il eſt intéreſſant d'examiner pour rectifier à cet égard les idées que nous ont donné les expériences de M. Amontons.

Les Conſtructeurs ſont dans l'uſage de ne donner que depuis 10 juſqu'à 13 lignes d'inclinaiſon par pied, aux plans ſur leſquels les Vaiſſeaux ſont conſtruits & portés ſur leurs quilles, que l'on graiſſe de ſuif, pour être lancés à la mer. Le vaiſſeau *le Prudent*, de 74 canons, & celui de *la Ville de Paris* de 90 canons, que j'ai vus lors de leur conſtruction à Rochefort, ont été lancés à la mer ſur des plans inclinés de 11 & 12 lignes par pied; pluſieurs Conſtructeurs ne donnent que 10 lignes par pied pour les plus gros Vaiſſeaux de guerre; & celui de la Ville auroit vraiſemblablement pu être conſtruit ſur une pareille inclinaiſon. A l'égard des frégates & des vaiſſeaux marchands, on donne 12 à 13 lignes au plus d'inclinaiſon par pied à ces plans. La moindre inclinaiſon eſt donc de 10 lignes, & la plus grande de 13 lignes par pied, ce qui donne 3 degrés 58 minutes pour la plus petite inclinaiſon & 5 degrés 9 minutes pour la plus grande, & pour angle moyen 4 degrés 33 minutes $\frac{1}{2}$, que je nommerai l'*angle des frottemens pour les groſſes maſſes,* afin de le diſtinguer de celui qui a été calculé par M. Parent.

Il y a lieu de préſumer que de plus groſſes maſſes encore, telles que des portions conſidérables de terreins, pourroient être miſes en mouvement ſur un plus petit angle, les autres circonſtances étant d'ailleurs ſuppoſées les mêmes.

L'inclinaiſon que l'on donne aux plans pour lancer les vaiſſeaux à la mer, réduit le frottement ſeulement aux douzième & quinzième au lieu du tiers ou à peu près, de la peſanteur des corps mus, à quoi il a été évalué par M. Amontons, quelle que fût d'ailleurs leur maſſe & la ſuperficie de leur baſe; on ſuppoſe au ſurplus que ces baſes ſont planes & graiſſées: ce frottement pourra

être encore plus petit pour de plus ſortes maſſes, comme je viens de l'expliquer.

M. Bouguer, dans ſon Traité du Navire, *page 74*, dit que l'*on donne ſouvent 6 lignes d'inclinaiſon ſur chaque pied de longueur au plan ſur lequel on bâtit les navires pour les lancer à la mer, ou 2 degrés un tiers.* Cet habile Académicien aura vraiſemblablement été trompé par les perſonnes qu'il aura conſultées à ce ſujet; car ſuivant les connoiſſances que j'ai priſes avec ſoin ſur différens ports de mer, il eſt conſtant que l'on ne doit pas donner moins de 10 lignes par pied à ces plans, & que le vaiſſeau qui auroit été conſtruit ſur un plan dont l'angle avec l'horizon ſeroit plus petit, courroit riſque de ne pouvoir pas être lancé à la mer.

Dans l'application que je dois faire des expériences & des obſervations précédentes, aux maſſes de terrein qui pourroient ſe déplacer, on doit avoir égard à l'irrégularité & à la grandeur *(c)* des ſurfaces planes des corps qui les ſoutiennent, & dont elles viendroient à ſe détacher, ainſi qu'au plus ou moins d'aſpérité des corps, ce qui doit augmenter l'inclinaiſon du plan & peut-être le rapprocher de celui de 39 à 40 degrés rapportés ci-devant dans l'expérience que j'ai faite avec la pierre qu'on fait gliſſer ſur le bois.

Je vais préſentement examiner les autres circonſtances eſſentielles, dans leſquelles les terreins montueux ſont expoſés à s'ébouler par les cauſes les plus ordinaires ou par le travail des hommes.

Si dans la tranchée ou coupure à faire dans une montagne pour l'établiſſement d'une maiſon ou d'un chemin, il ſe trouve un banc de ſable fin ou de terre glaiſe d'une certaine hauteur, ce ſable pourra s'ébouler, la terre glaiſe ſe gerſera & ſe fendra en tous ſens en ſe ſéchant vers la partie entamée qui ſe trouvera expoſée à l'air; elle tombera ſucceſſivement par morceaux, & le terrein ſupérieur n'étant plus porté, s'éboulera néceſſairement

(c) On voit par les Mémoires de l'Académie de 1703, *page 105*, & par les Expériences de M. l'Abbé Nollet, *tome I, page 235*; que contre l'opinion qu'avoit M. Amontons, on doit, dans le calcul des frottemens, avoir égard à l'étendue, l'irrégularité & aſpérité des corps.

ſans qu'il ſoit poſſible de l'empêcher, ni même d'achever l'ouvrage qui aura été commencé, ſi l'on tarde trop d'y remédier.

S'il ne s'y trouvoit que du ſable fin, il ſuffiroit de couper les glacis ſur un angle de 30 degrés; mais la glaiſe étant une fois *éventée*, c'eſt-à-dire, expoſée à l'air, il ſera néceſſaire de la maſquer avant qu'elle ait eu le temps de trop ſe gerſer dans la partie qui aura été entamée: pour cet effet, un mur conſtruit en moëlon & mortier, le mortier, ne fut-il même que de terre, pourra ſuffire; il préviendra la chute des terres ſupérieures, n'étant queſtion pour cela que d'empêcher la glaiſe de ſe ſécher à l'air.

L'épaiſſeur réduite de ce mur pourra être fixée à moitié de ſa hauteur, non compris celle de ſa fondation; il conviendra de donner à ce mur un talus de 6 pouces par pied de hauteur.

Si le banc de glaiſe ſe trouvoit trop élevé au-deſſus du chemin, comme de 30 & 40 pieds, & qu'il fût d'une hauteur & qualité à faire craindre la chute d'un terrein ſupérieur trop conſidérable, la conſtruction du mur que je propoſe, pourroit devenir de trop grande conſéquence & difficulté dans l'exécution, à moins que le terrein qui ſeroit ſitué peu au-deſſous de cette glaiſe, ne fût rocheux ou aſſez ferme pour y établir le mur mentionné ci-devant: ce mur pourroit dans ce cas être élevé à plomb en-dedans; il conviendroit de lui donner à ſon parement extérieur un talus égal au glacis des terres.

Le banc de glaiſe ſans avoir été entamé, pourroit être incliné ſuffiſamment; pour que le terrein du deſſus n'étant plus retenu par celui que l'on auroit enlevé, ſoit pour y établir un chemin, ou pour un autre motif, vînt à gliſſer, & cela pourroit même arriver avec un peu d'inclinaiſon, parce que la ſurface des bancs de glaiſe eſt ordinairement aſſez plane & unie; rien ne pourra dans ce cas empêcher les grandes maſſes de deſcendre, il faudra abandonner les ouvrages qui auront été commencés, & les changer d'emplacement.

Cette conſidération doit engager un Ingénieur, qui a de pareilles tranchées à faire dans les montagnes, à commencer par connoître le terrein avant de décider ſans retour l'emplacement de ces ouvrages, ſur-tout lorſqu'il y aura lieu de penſer qu'il pourroit

pourroit s'y trouver de la glaise: pour cet effet, il doit faire faire des sondes & trous de tarière ou des puits dans les endroits que l'on ne pourroit connoître autrement, & ce jusqu'à la profondeur à laquelle les fouilles doivent être faites dans l'emplacement qu'il aura premièrement choisi.

Par ce moyen, on connoîtra les différens bancs de terre, sable ou glaise qui se trouveront dans l'étendue des fouilles à faire, ainsi que leurs inclinaisons ou qualités; si on a lieu pour lors d'appréhender les inconvéniens mentionnés ci-devant, il ne faudra pas hésiter à chercher un emplacement plus convenable, & ce travail préliminaire épargnera les frais d'une entreprise qui pourroit quelquefois devenir trop difficile, & même impossible à exécuter.

S'il est intéressant d'examiner le terrein que l'on auroit à fouiller pour la construction d'un édifice ou d'un chemin dans les endroits montueux, il ne l'est pas moins de bien choisir le lieu de l'emplacement, lors même que l'on n'auroit point de fouille à y faire.

On doit éviter, par exemple, la proximité d'un terrein ou d'un rocher escarpé qui seroit exposé à s'écrouler, & aussi les endroits qui seroient sujets aux fontes de neiges & lavanges.

On a été obligé, il y a environ quinze ans, de porter sur la droite du Drac en remontant, un chemin qui avoit été établi anciennement au côté opposé, près le village de Lesdiguières en Dauphiné, au pied d'une montagne nommée *Roche-mole*, de 6 à 700 pieds de hauteur presque perpendiculaire; les pierres qui se sont détachées successivement du rocher, ont formé jusqu'au Drac un glacis qui peut, avec l'horizon, faire un angle de 30 degrés vers le bas du glacis, à cause d'une courbe concave considérable, que prend ce glacis par la grande hauteur de la chute des pierres. La nature du roc est calcaire; il se divise aisément dans sa chute, étant plein de fils & de parties terreuses: le volume de la partie de ce rocher, qui paroît actuellement menacer de se détacher, à en juger par les crevasses qui se trouvent à son sommet, a été évalué à un million de toises cubes; & si cette partie vient à tomber dans le Drac, comme il y a lieu de l'appréhender, elle pourra former un lac dans cet endroit.

En pareilles circonſtances, on n'a pas d'autre parti à prendre que d'éloigner les édifices & les chemins de ces ſortes d'endroits, lorſqu'il eſt queſtion de les conſtruire, & on doit les tranſporter ailleurs (comme on l'a fait pour celui mentionné ci-devant) quand on n'a pas bien ſu choiſir leur premier emplacement.

Lorſqu'on aura une habitation établie proche des endroits trop eſcarpés, ou des terreins de mauvaiſe conſiſtance, la prudence exigera que l'on examine de temps à autre s'il ne ſe formeroit point de crevaſſes dans les parties ſupérieures; elles doivent ſervir d'avertiſſement & de marques ſouvent prochaines des écroulemens de rochers & portions de terreins dont on ſe trouveroit menacé, ſur-tout lorſqu'il peut s'introduire dans ces crevaſſes de l'eau, que par précaution on fera bien de tâcher d'en détourner auſſitôt.

Il ne ſeroit pas toujours néceſſaire que le terrein eût été fouillé, pour que la deſcente de celui qui ſeroit ſupérieur à la glaiſe pût avoir lieu. S'il ſurvenoit de l'eau ſur le banc de glaiſe, l'équilibre pourroit être rompu par la diminution du frottement qui auroit retenu avant ce temps le terrein ſupérieur, & il pourroit gliſſer ſur cette glaiſe.

C'eſt à une pareille cauſe que je crois devoir attribuer les fractions qui ſe ſont faites en 1758, aux maiſons des ouvriers de la Machine de Marly, dans une portion de la butte qui ſe trouve ſituée immédiatement au-delà de cette Machine, du côté de Saint-Germain. Cette partie de terrein commençoit à ſe fendre & à prendre un peu de mouvement vers la rivière, ainſi que la partie de la grande route de Saint-Germain, qui ſe trouve établie au pied de cette butte, & on eut lieu de concevoir les plus grandes inquiétudes. Par la viſite & les ſondes que M. Gabriel, premier Architecte du Roi, feu M. Hupeau, premier Ingénieur des Ponts & Chauſſées, mon prédéceſſeur, & moi, avons faite de ce terrein, on a reconnu qu'il s'y trouvoit à peu de profondeur, un banc de glaiſe incliné; on s'aperçut auſſi que l'eau qui s'étoit échappée des tuyaux de la Machine, dans la partie ſupérieure, étoit deſcendue juſqu'au banc de glaiſe: on a travaillé auſſi-tôt à empêcher que l'eau de la perte de ces tuyaux n'arrivât juſqu'au banc de terre glaiſe, & depuis ce temps

on n'a plus remarqué qu'il ſe ſoit fait aucun mouvement dans ce terrein.

Il eſt arrivé en 1765 pareille choſe à Croix-Fontaine, une partie du terrein qui ſe trouve ſitué à mi-côte avant d'arriver au château, s'entr'ouvrit en nombre d'endroits & s'éboula ſucceſſivement par partie, le mur de terraſſe qui retenoit le pied de ces terres fut renverſé, & on fut obligé de tranſporter plus loin le chemin qui étoit établi le long de ce mur. Feu M. de Parcieux & moi, fumes viſiter ce terrein, nous reconnumes qu'il étoit porté ſur un banc de glaiſe incliné, & nous penſames que la perte qui ſe faiſoit de l'eau d'un baſſin ſupérieur, pouvoit être la cauſe de cet évènement. D'après notre avis, on fit ſupprimer ce baſſin, & conſtruire des perrées ou petits aqueducs ſur le banc de glaiſe, dans la partie ſupérieure du terrein qui s'étoit éboulé, pour recevoir & détourner les eaux de pluie qui pourroient encore arriver ſur cette glaiſe. Depuis ce temps les terres ſe ſont entièrement fixées, ce qui nous a confirmé dans l'opinion que nous avons eue à ce ſujet.

Un rocher ſuffiſamment uni, & qui ſeroit incliné, pourroit auſſi occaſionner, comme le feroit un banc de glaiſe, la deſcente d'un terrein ſupérieur.

Il y a douze ans qu'au village de Guet, à ſix lieues de Grenoble, ſur la grande route de cette capitale à Briançon, tout le terrein, lequel eſt en pente, gliſſa & deſcendit en un inſtant vers le Drac, qui en eſt éloigné d'environ un tiers de lieue; la terre ſe fendit dans ce village, & la partie qui a gliſſé ſe trouve de 6, 8 & 10 pieds plus baſſe qu'elle n'étoit. Tout le terrein ſur une lieue juſque près du village de Corps, eſt établi ſur un rocher aſſez uni, ce dont on a pu juger par les parties que les ravines en ont rendu apparentes dans pluſieurs endroits. On a auſſi reconnu que ce rocher eſt incliné à l'horizon d'environ 40 degrés, que tout le terrein qui lui eſt inférieur, forme une eſpèce de coin ou priſme triangulaire, dont la berge du Drac fait la hauteur ſur 50 à 60 pieds; c'eſt à cette berge emportée par le torrent, que doit vraiſemblablement être attribué cet évènement, joint à ce que l'eau des ravines qui eſt deſcendue juſqu'au rocher, aura

pu détremper la partie du terrein qui porte immédiatement dessus, & contribuer avec l'action de sa pesanteur, à rompre l'équilibre & le faire descendre vers le Drac.

Une aussi grande masse ayant commencé à prendre du mouvement, se trouve ensuite presque en équilibre avec le frottement; & c'est avec grande raison qu'on appréhende dans le pays que ce terrein ne puisse encore descendre vers le Drac.

Des ouvrages d'art, tels que des digues, des éperons ou épis, qui auroient défendu la berge du Drac, & l'attention d'avoir détourné les eaux supérieures, & empêché qu'elles ne fussent descendues jusqu'au rocher par les parties ravinées, auroient vraisemblablement pu prévenir la descente du terrein.

Au moyen des différentes précautions que je viens d'indiquer, & des moyens qui sont proposés dans le présent Mémoire, il paroît que l'on aura fait ce que l'art & la prudence semblent prescrire de plus convenable pour la sûreté des hommes & la conservation des travaux que l'on auroit à construire, ou qui seroient déjà établis sur les montagnes & terreins élevés & périlleux.



OBSERVATION
DE L'ENTRÉE TOTALE DE VÉNUS SUR LE DISQUE DU SOLEIL,
Faite à l'Obſervatoire royal le 3 Juin 1769.

Par M. MARALDI.

LE Soleil a été couvert long-temps avant l'entrée de Vénus ſur ſon diſque, & il n'a paru que peu de temps avant l'entrée totale de cette Planète. J'ai obſervé le contact intérieur à $7^h\ 38'\ 50''$, avec une lunette achromatique de 36 pouces, dont l'objectif eſt composé de trois verres ; elle fait l'effet d'une bonne lunette ordinaire de 15 pieds : les bords du Soleil & de Vénus étoient alors aſſez bien terminés. 7 Juin 1769.

OBSERVATION
DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL *du 4 Juin, au matin.*

J'ai obſervé l'éclipſe du Soleil avec une lunette de 7 pieds, garnie d'un réticule compoſé de treize fils parallèles & également éloignés les uns des autres, qui partageoient en douze parties égales le diamètre du Soleil compris entre les deux extrêmes. Le ciel étoit parfaitement ſerein & l'air calme.

A $6^h\ 46'\ 54''$ du matin, temps vrai, commencement de l'Éclipſe.

6. 53. 12 l'Éclipſe eſt d'un doigt.

6. 58. 43 .... 2 doigts.

7. 6. 3 .... 3 doigts.

A 7h 14′ 14″ l'Éclipse est de 4 doigts.

7. 23. 14 .... 5 doigts

7. 35. 14 .... 5 ½ doigts, plus grande phase.

7. 47. 54 .... 5 doigts.

7. 57. 49 .... 4 doigts.

8. 6. 45 .... 3 doigts.

8. 14. 6 .... 2 doigts.

8. 20. 32 .... 1 doigt.

8. 27. 11 fin de l'Éclipse.



SUR LA COURBE DÉCRITE
PAR LES
BOULETS ET LES BOMBES,
EN AYANT ÉGARD
À LA RÉSISTANCE DE L'AIR.

Par M. le Chevalier DE BORDA.

LES Auteurs élémentaires qui ont écrit ſur l'Artillerie, ont ſuppoſé que la réſiſtance de l'air dérangeoit fort peu le mouvement des boulets & des bombes; & d'après cela ils ont calculé les portées de ces projectiles & leurs vîteſſes initiales, comme ſi les courbes décrites étoient exactement des paraboles. J'ai voulu examiner par le calcul juſqu'à quel point cette ſuppoſition pouvoit être permiſe, & j'ai été ſurpris de trouver qu'en ayant égard à cette réſiſtance, les rapports des portées étoient totalement changés, & que ces portées n'étoient quelquefois qu'une petite partie de ce qu'elles auroient été dans le vide. J'ai conclu de-là qu'il étoit néceſſaire de traiter de nouveau la théorie du mouvement des boulets & des bombes, en y faiſant entrer l'effet de la réſiſtance de l'air, & c'eſt l'objet que je me propoſe dans ce Mémoire.

Newton a déjà travaillé ſur le même ſujet, comme on peut le voir dans le ſecond livre des Principes mathématiques; ce grand Géomètre ayant cherché la courbe décrite par un corps peſant qui ſe meut dans un fluide, & ayant reconnu que l'équation différencielle de cette courbe n'étoit pas intégrable, recourut à une approximation, & trouva une eſpèce d'hyperbole qui approchoit de la courbe cherchée incomparablement plus que la parabole ordinaire; il détermina la poſition & les élémens de cette hyperbole, & il en déduiſit de nouvelles règles de Baliſtique, qui ſont

beaucoup plus exactes que les règles anciennes, mais qui ne le sont peut-être pas encore assez pour la pratique.

Depuis Newton, l'illustre M. Euler a donné dans le volume de l'Académie de Berlin, pour l'année 1756, une nouvelle approximation de la courbe des projectiles; & enfin on a sur le même sujet, dans le volume de la même Académie pour l'année 1765, un Mémoire fort étendu de M. Lambert.

Je n'entrerai point dans l'examen de ces différens ouvrages, je remarquerai seulement que les deux derniers Auteurs n'ont point appliqué leurs calculs aux effets connus de nos pièces d'Artillerie, & que par-là leurs travaux n'ont pas eu l'utilité qu'on en pouvoit attendre. Je me propose principalement dans ce Mémoire de suppléer à ce qu'ils ont omis, & d'examiner, à l'aide du calcul, les principales questions de la Balistique; je n'entrerai pas dans de longs détails sur chacune de ces questions, mais je donnerai des connoissances générales qu'un Lecteur instruit pourra étendre facilement.

Je vais d'abord chercher en général la courbe des projectiles, je donnerai après cela une approximation de cette courbe, fort simple & suffisamment exacte, & je terminerai mon Mémoire par différentes applications.

PROBLÈME.

Trouver la courbe décrite par un corps pesant sphérique, qui se meut dans un milieu résistant.

Fig. 1. SOLUTION. Soit AEO cette courbe; je tire à des distances infiniment petites & égales les ordonnées EB, FC & GD; j'appelle AB, x; BE, y; AE, s; la vîtesse avec laquelle le corps parcourt EF, u; le temps employé pour parcourir AE, t; la résistance du fluide au point E, R; & la force de la gravité g.

Considérons le corps lorsqu'il vient de parcourir EF avec la vîtesse u, il est clair que s'il étoit abandonné à lui-même, il parcourroit dans l'instant suivant une ligne FK dans le prolongement de EF qui seroit à cette ligne EF comme la durée

durée du second instant est à la durée du premier ; on aura donc $dt : dt', :: ds : FK = ds + \frac{ds\,ddt}{dt}$; mais si on suppose que pendant le second instant le corps éprouve l'action de la gravité & la résistance du fluide, & qu'en vertu de ces deux forces il parvienne en H, GH sera l'effet de l'action de la gravité, & GK sera celui de la résistance du fluide ; on aura donc $GH = gdt^2$, & $GK = Rdt^2$. Maintenant, puisque $BC = CD$, on aura $FG = EF = ds$, $FK = ds + \frac{ds\,ddt}{dt} = ds + GK$; donc $GK = \frac{ds\,ddt}{dt}$. Par la même raison, $GH = -ddy$; on aura donc $Rdt^2 = \frac{ds\,ddt}{dt}$, & $gdt^2 = -ddy$; éliminant dt, on aura $-2Rddy^2 = gdsd^3y$. *C. Q. F. T. & D.* Fig. 1.

La solution que nous venons de donner s'applique à une loi quelconque de résistance, mais l'expérience nous ayant appris que la résistance des fluides étoit à très-peu près proportionnelle au carré des vîtesses, nous supposerons l'existence de cette loi, sur laquelle nous ferons quelques réflexions dans la suite de ce Mémoire.

Soit donc dans l'équation précédente, $2R = \frac{u^2}{a}$, elle se changera en celle-ci, $dsddy = ad^3y$. Pour l'intégrer, soit $dy = zdx$, on trouvera $x = \int \frac{adz}{\int dz\sqrt{(1+zz)}}$, & $y = \int \frac{azdz}{\int dz\sqrt{(1+zz)}}$; Dans ces équations, la quantité $\int dz\sqrt{(1+zz)}$ est intégrable ; mais les valeurs entières ne l'étant pas, il est nécessaire de recourir à des approximations.

Exprimons d'abord la valeur de y par une suite de puissances de x ; pour cela, soit en général $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5$, &c. appelant e l'angle d'élévation, & h la hauteur dûe à la vîtesse initiale, on trouvera par les conditions du Problème, $A = \text{tang.}\,e$; $B = -\frac{1}{4h\,\text{cos}.e^2}$; $C = -\frac{1}{12ah\,\text{cos}.e^3}$;

Fig. 1. $$D = \frac{\text{ſin.}\, e}{96\, a\, h^2 \,\text{coſ.}\, e^4} - \frac{1}{48\, a^2\, h \,\text{coſ.}\, e^4};$$

$$E = \frac{1}{120}\left(\frac{\text{ſin.}\, e}{a^2 h^2 \,\text{coſ.}\, e^5} - \frac{1}{2\, a^3\, h \,\text{coſ.}\, e^5} - \frac{1}{8\, a\, h^3 \,\text{coſ.}\, e^3}\right);$$

& par conſéquent,

$$y = x \,\text{tang.}\, e - x^2 \times \frac{1}{4\, h \,\text{coſ.}\, e^2} - x^3 \times \frac{1}{12\, a\, h \,\text{coſ.}\, e^3}$$
$$+ \frac{x^4}{24} \times \left(\frac{\text{ſin.}\, e}{4\, a\, h^2 \,\text{coſ.}\, e^4} - \frac{1}{2\, a^2\, h \,\text{coſ.}\, e^4}\right)$$
$$+ \frac{x^5}{120}\left(\frac{\text{ſin.}\, e}{a^2 h^2 \,\text{coſ.}\, e^5} - \frac{1}{2\, a^3\, h \,\text{coſ.}\, e^5} - \frac{1}{8\, a\, h^3 \,\text{coſ.}\, e^3}\right) \text{\&c.}$$

Si on ſuppoſe la réſiſtance nulle, la quantité a ſera infinie, & tous les termes du ſecond membre s'évanouiront à l'exception des deux premiers, on aura donc $y = x \,\text{tang.}\, e - \frac{x^2}{4\, h \,\text{coſ.}\, e^2}$, équation à la parabole; de laquelle on déduiroit facilement toutes les règles de la Baliſtique ordinaire.

Si la quantité a n'eſt pas infinie, il faudra employer d'autant plus de termes de la ſérie, que la vîteſſe initiale ſera plus grande, & que la quantité a ſera plus petite.

Je me ſuis aſſuré, après avoir déterminé la conſtante a, qu'on pouvoit, en ne faiſant uſage que des cinq premiers termes de la ſérie, déterminer fort exactement les portées de nos pièces d'artillerie, lorſque les vîteſſes initiales n'excèdent pas 200 pieds par ſeconde; mais pour les grandes vîteſſes qui ſont quelquefois de 1800 à 2000 pieds par ſeconde (ainſi que nous le verrons dans la ſuite) il faudroit employer un très-grand nombre de termes de la ſérie qui peut-être même à la fin deviendroit divergente: il eſt donc néceſſaire pour ce cas-là d'avoir une autre eſpèce d'approximation, & voici celle que j'ai trouvée.

Nous avons ſuppoſé dans notre ſolution que la denſité du fluide étoit la même dans tous les points de la courbe; ſuppoſons maintenant qu'elle ſoit variable, on verra facilement qu'en appelant D la denſité qui eſt au commencement de la courbe, & Δ celle qui eſt à un autre point quelconque E, on aura $\frac{\Delta}{D}\, ds\,ddy = a\,d^3y$; j'imagine à préſent qu'on donne une

telle valeur à Δ que l'équation ſoit intégrable, il eſt clair que ſi cette valeur de Δ ne s'éloigne pas beaucoup d'une quantité conſtante, la courbe qu'on trouvera par l'intégration, s'éloignera très-peu de la courbe cherchée.

Soit d'abord pour première valeur $\frac{\Delta}{D} = \frac{n\,dx}{ds}$ (n étant une conſtante) on aura $n\,ddy\,dx = a\,d^3y$; & intégrant, on parviendra à cette équation finie, $y = \frac{Bx}{n} + (aD + B) \times (c^{\frac{nx}{a}} - 1)$, dans laquelle $D = \text{tang.}\,e$, & $B = -(\frac{a}{2h\,\text{coſ.}\,e^2} + n\ \text{tang.}\,e)$; mettant ces valeurs dans l'équation, on aura

$$y = x\left(\text{tang.}\,e + \frac{a}{2nh\ \text{coſ.}\,e^2}\right) - \frac{aa}{2n^2\ \text{coſ.}\,e^2} \times \left(c^{\frac{nx}{a}} - 1\right).$$

Maintenant la vîteſſe initiale étant ſuppoſée très-grande, & la réſiſtance étant par conſéquent beaucoup plus conſidérable au commencement AB de la courbe que dans le reſte BCE; je déterminerai n de manière que l'erreur ſoit nulle au point de départ; pour cela, il faut qu'on ait $n = \frac{1}{\text{coſ.}\,e}$; mettant cette valeur de n dans l'équation, on aura Fig. 2.

$$y = x\left(\text{tang.}\,e + \frac{a}{2h\ \text{coſ.}\,e}\right) - \frac{aa}{2h}\left(c^{\frac{x}{a\ \text{coſ.}\,e}} - 1\right).$$

Il eſt clair que dans cette équation la réſiſtance ſera ſuppoſée à peu de choſe près, telle qu'elle doit être dans la partie AB où le projectile a le plus de vîteſſe, qu'elle ſera ſuppoſée trop forte dans la partie BC où la vîteſſe ſera fort ralentie, qu'elle reviendra à ce qu'elle doit être dans la partie CD, & qu'enfin elle ſera ſuppoſée trop petite dans la partie DE. En général, il me ſemble que par cette ſuppoſition les erreurs ſeront aſſez bien compenſées, principalement lorſque l'angle d'élévation EAB ſera plus petit que 45 degrés.

Dans les cas où l'angle d'élévation ſera plus grand que 45 degrés, il ſera mieux de ſuppoſer $\frac{\Delta}{D} = \frac{m\,dy}{ds}$, ce qui donnera

$m\,dy\,ddy = a\,d^3y$, équation qu'on pourra ramener à des termes finis.

Voilà donc deux équations qui donnent des courbes aſſez approchantes de la courbe cherchée, principalement dans les cas extrêmes, c'eſt-à-dire, lorſque la première direction du projectile s'éloignera peu de la verticale ou de l'horizontale; mais l'exactitude n'étant peut-être pas aſſez grande pour les cas intermédiaires, nous allons donner une autre ſolution beaucoup plus approchée.

Nous ſuppoſerons dans cette ſeconde approximation, que $\frac{\Delta}{D} = \frac{n\,dx + m\,dy}{ds}$, & nous donnerons à n & à m des valeurs telles que les denſités ſuppoſées au commencement & au ſommet de la courbe ſoient égales à la vraie denſité du fluide; il eſt clair que par cette ſuppoſition il ne pourra y avoir d'erreur ſenſible ſur la denſité que dans de très-petites parties de la courbe.

Soit donc miſe cette valeur de $\frac{\Delta}{D}$ dans l'équation générale; on aura $a\,d^3y = (n\,dx + m\,dy)\,ddy$; intégrant & employant pour la détermination des conſtantes les dénominations dont on s'eſt ſervi dans la première approximation, on parviendra à cette équation finie

$$y = \left(b - \frac{n}{m}\right)x - \frac{2a}{m}\log.\left(\frac{1 + Pc^{\frac{mbx}{a}}}{1 + P}\right)$$ dans laquelle

$$P = \frac{b - \frac{n}{m} - \text{tang.}\,e}{b + \frac{n}{m} + \text{tang.}\,e};\quad bb = \frac{n^2}{m^2} + \frac{2B}{m}\ \&$$

$$B = \frac{a}{2h\,\text{coſ.}\,e^2} + n\,\text{tang.}\,e + \tfrac{1}{2}\,m\,\text{tang.}\,e^2.$$

Mais il faut remarquer que cette équation ne peut avoir lieu que pour la partie aſcendante de la courbe; en effet, nous avons ſuppoſé dans notre approximation, que $\frac{\Delta}{D} = \frac{n\,dx + m\,dy}{ds}$; or dy eſt négatif dans la branche deſcendante, par conſéquent en faiſant uſage de notre équation pour cette branche deſcendante,

nous supposerions une densité trop petite qui même quelquefois pourroit devenir négative. Il faut donc chercher séparément le mouvement du projectile lorsqu'il descend ; pour cela, soit $\frac{\Delta}{D} = \frac{v dx - \mu dy}{ds}$ (μ étant une quantité positive), on aura $a\, d^3y = (v\, dx - \mu dy)\, ddy$, équation qui étant de la même forme que la première, s'intégrera de la même manière; on aura donc

$$y = (\beta + \frac{v}{\mu})\, x + \frac{2a}{\mu} \log. \left(\frac{1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{a}}}{1 + \pi} \right) + Y,$$

dans laquelle Y est la plus grande ordonnée,

$$\beta^2 = \frac{v^2}{\mu^2} - \frac{2B}{\mu}, \ \& \ \pi = \frac{\beta + \frac{v}{\mu}}{\beta - \frac{v}{\mu}}.$$

Il faut encore remarquer dans cette dernière équation qu'il peut arriver que β ou $\sqrt{(\frac{v^2}{\mu^2} - \frac{2B}{\mu})}$ soit imaginaire; dans ce cas la valeur de y se réduira à des expressions de sinus & de cosinus; en effet, soit $\beta = E\sqrt{-1}$, on aura

$$\pi = \frac{E\sqrt{-1} + \frac{v}{\mu}}{E\sqrt{-1} - \frac{v}{\mu}} \ \& \ y = Y + (E\sqrt{-1} + \frac{v}{\mu})\, x$$

$$+ \frac{2a}{\mu} \log. \left(\frac{(E\sqrt{-1} + \frac{v}{\mu})\, c^{\frac{-\mu E x \sqrt{-1}}{a}} + E\sqrt{-1} - \frac{v}{\mu}}{2E\sqrt{-1}} \right)$$

$$= Y + \frac{v}{\mu} x + \frac{2a}{\mu} \log. \left[\frac{\frac{v}{\mu} c^{\frac{-\mu E x\sqrt{-1}}{2a}} - \frac{v}{\mu} c^{\frac{\mu E x\sqrt{-1}}{2a}}}{2E\sqrt{-1}} \right.$$

$$\left. + \frac{c^{\frac{\mu E x\sqrt{-1}}{2a}} + c^{\frac{-\mu E x\sqrt{-1}}{2a}}}{2} \right] = Y + \frac{v}{\mu} x.$$

$$+ \frac{2a}{\mu} \text{ log. } \left(\text{cos. } \frac{\mu E x}{2a} - \frac{v}{\mu E} \text{ sin. } \frac{\mu E x}{2a} \right).$$

Après avoir trouvé en général l'équation de la courbe, nous allons chercher l'expreſſion des portées des projectiles, & enſuite celles du temps & de la vîteſſe.

EXPRESSION des Portées.

Il faut d'abord trouver la partie de l'abſciſſe compriſe depuis le point de départ juſqu'à la plus grande ordonnée; pour, cela on différenciera l'équation de la partie aſcendante de la courbe, & après avoir égalé dy à zéro; on trouvera

$$X = \frac{a}{mb} \text{ log. } \left(\frac{b - \frac{n}{m}}{(b + \frac{n}{m}) \times F} \right);$$

mettant enſuite cette valeur dans celle de y, on aura la plus grande ordonnée ou

$$Y = (b - \frac{n}{m}) X - \frac{2a}{m} \text{ log. } \left(\frac{2b}{(b + \frac{n}{m}) \times (1 + P)} \right).$$

Maintenant, ſoit dans l'équation de la partie deſcendante $y = 0$; on aura, lorſque $\frac{v^2}{\mu^2} > \frac{2}{\mu}, \beta + \frac{v}{\mu} x$

$$+ \frac{2a}{\mu} \text{ log. } \left(\frac{1 + \pi c^{\frac{-\mu \beta x}{a}}}{1 + \pi} \right) + Y = 0, \ \&$$

lorſque $\frac{v^2}{\mu^2} < \frac{2B}{\mu}$, on aura

$$\frac{v}{\mu} x + \frac{2a}{\mu} \text{ log. } \left(\text{cof. } \frac{\mu E x}{2a} - \frac{v}{\mu E} \text{ fin. } \frac{\mu E x}{2a} \right) + Y = 0;$$

par conſéquent en cherchant la valeur de x dans l'une ou l'autre de ces équations & l'ajoutant à la quantité X, on aura la portée totale du projectile.

EXPRESSION du Temps.

On a dans l'équation générale, $g dt^2 = - ddy$; donc

$dt = \sqrt{-\frac{ddy}{g}}$; je mets d'abord pour ddy sa valeur prise dans l'équation de la partie ascendante, & j'ai

$$dt = b\sqrt{\left(\frac{2mP}{ga}\right)} \times \frac{c^{\frac{mbx}{a}}\,dx}{1 + Pc^{\frac{mbx}{a}}};$$

intégrant ensuite, on aura

$$t = \sqrt{\left(\frac{8a}{mg}\right)}\left[\text{arc}\left(\text{cos.} = \left(1 + Pc^{\frac{mbx}{a}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) - \text{arc}\left(\text{cos.} = (1+P)^{-\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Par la même raison, on aura, pour la partie descendante,

$$t = \sqrt{\left(\frac{8a}{-\mu g}\right)}\left[\text{arc}\left(\text{cos.} = \left(1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{a}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) - \text{arc}\left(\text{cos.} = (1+\pi c)^{-\frac{1}{2}}\right)\right].$$

Mais cette expression contient des imaginaires; pour les faire évanouir, je multiplie les deux membres par $\sqrt{\left(\frac{-\mu g}{8a}\right)}$, & j'ai

$$t\sqrt{\left(\frac{-\mu g}{8a}\right)} = \text{arc}\left(\text{cos.} = \left(1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{a}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) - \text{arc}\left(\text{cos.}\ (1+\pi)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

& par conséquent

$$t\sqrt{\left(\frac{-\mu g}{8a}\right)} = \text{cos.}\left[\text{arc}\left(\text{cos.} = \left(1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{a}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) - \text{arc}\left(\text{cos.} = (1+\pi)^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= \text{cos.}\left[\text{arc}\left(\text{cos.} = \left(1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{a}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \times \text{cos.}\left[\text{arc}\left(\text{cos.} = (1+\pi)^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$+ \text{sin.}\left[\text{arc}\left(\text{cos.} = \left(1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{a}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \times \text{sin.}\left[\text{arc}\left(\text{cos.} = (1+\pi)^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{2a}}}{(1+\pi)^{\frac{1}{2}} \times \left(1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}},$$ & mettant pour cos. t sa valeur exponentielle, on aura enfin:

$$\frac{c^{t\sqrt{(\frac{\mu g}{8a})}} + c^{-t\sqrt{(\frac{\mu g}{8a})}}}{2} = \frac{1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{2a}}}{(1+\pi)^{\frac{1}{2}} \times (1 + \pi c^{\frac{-\mu\beta x}{2a}})^{\frac{1}{2}}}$$

équation qui ne contient plus d'imaginaires si β est réel, mais si β est imaginaire on prendra la valeur de ddy dans l'équation

$$y = \frac{v}{\mu} x + \frac{2a}{\mu} \log. \left(\text{cos.} \frac{\mu E x}{2a} - \frac{v}{\mu E} \text{fin.} \frac{\mu E x}{2a}\right) + Y,$$

on la substituera dans celle de dt, & on aura

$$dt = \frac{dx \sqrt{(\frac{B}{ga})}}{\text{cos.} \frac{\mu E x}{2a} - \frac{v}{\mu E} \text{fin.} \frac{\mu E x}{2a}}. \text{ Soit } \frac{v}{\mu E} = \text{tang.} M,$$

on aura

$$dt = \frac{dx \times \text{cos.} M \times \sqrt{(\frac{B}{ga})}}{\text{cos.} (M + \frac{\mu E x}{2a})}; \text{ d'où on tirera}$$

$$t = \sqrt{(\frac{2a\mu}{2a})} \times \log. \left[\frac{1 + \text{fin.} (M + \frac{\mu E x}{2a})}{(1 + \text{fin.} M) \times (\text{cos.} (M + \frac{\mu E x}{2a}))}\right]$$

EXPRESSION de la Vîtesse.

On a $u = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{\sqrt{(-\frac{ddy}{g})}}$; mettant dans cette équation les valeurs de ds & ddy prises dans les équations ci-dessus, on aura une expression finie de la vîtesse.

DÉTERMINATION des Constantes.

Nous avons supposé dans notre solution, que la résistance des fluides étoit, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelle aux quarrés des vîtesses; les expériences de Newton, & celles que j'ai

j'ai rapportées dans le *Volume des Mémoires de l'Académie pour l'année 1763*, prouvent que cette loi a lieu pour l'air, du moins dans les vîtesses médiocres, telles que 25 à 30 pieds par seconde; peut-être ne s'accorde-t-elle pas aussi-bien avec l'expérience lorsqu'il s'agit de très-grandes vîtesses, comme sont celles des boulets: en effet, ainsi que l'a remarqué Robins dans son *Traité d'Artillerie*, les boulets chassés par de fortes charges de poudre ont une telle vîtesse, que, malgré la grande force expansive de l'air, il se forme quelquefois un vide derrière ces globes; il est probable qu'alors les boulets éprouvent une nouvelle résistance qui vient de ce que la pression de l'atmosphère sur la partie antérieure n'est plus contre-balancée par la pression sur la partie opposée: quoi qu'il en soit de cette augmentation de résistance qui n'est peut-être pas aussi grande qu'on l'imagine ordinairement, je crois pouvoir me dispenser d'y avoir égard d'autant mieux que les boulets ne conservent que dans une petite partie de leur trajectoire ces grandes vîtesses qui produisent le vide dont j'ai parlé; d'ailleurs il n'est pas nécessaire, pour l'objet que je me propose, d'avoir une solution parfaitement exacte; il suffit qu'elle soit fort approchée, & je pense qu'en me servant de la loi communément reçue, je n'aurai que de petites erreurs.

Je regarderai donc, avec Newton, la résistance qu'éprouve un globe en se mouvant dans l'air, comme proportionnelle aux quarrés des vîtesses, & je supposerai outre cela, d'après les expériences rapportées dans le *second Livre des Principes mathématiques*, que cette résistance est égale à l'action d'un poids d'une colonne d'air qui auroit pour base un grand cercle du globe, & pour hauteur la moitié de celle qui est dûe à sa vîtesse actuelle: mes expériences donnent à la vérité une quantité un peu plus grande que celle-là, mais la différence est assez petite pour pouvoir être regardée comme provenant d'une simple variation de la densité de l'atmosphère.

Cela posé, soit le diamètre du globe $= A$, son poids $= Q$; sa vîtesse $= u$, la force de la gravité $= g$, & le rapport de la circonférence au diamètre $= \varpi$: le poids d'un pied cube d'air

étant à peu près égal à $\frac{70^{\ddagger}}{800}$, on aura le poids de la colonne d'air dont nous venons de parler $= \frac{\varpi \times A^2 \times u^2 \times 70^{\ddagger}}{16 \times 800 \times g}$, & la force retardatrice exercée sur le globe $= \frac{\varpi \times A^2 \times u^2 \times 70^{\ddagger}}{16 \times 800 \times Q}$; or c'est cette force retardatrice que nous avons appelée R dans notre solution, & comme nous avons ensuite supposé $2R = \frac{u^2}{a}$, on aura $a = \frac{16 \times 800 \times Q}{\varpi \times A^2 \times 140^{\ddagger}}$.

Quant aux constantes n & m, nous avons déjà dit que nous déterminerions leurs valeurs, de manière que les densités supposées au commencement & au sommet de la courbe, fussent égales à la vraie densité du fluide; pour cela il faudra qu'on ait au commencement & au sommet de la courbe, $n\,dx + m\,dy = ds$, ce qui donnera $n = 1$ & $m =$ tang. $\frac{1}{2} e$.

On pourroit, sans une grande erreur, donner la même valeur à ν & à μ; mais pour plus d'exactitude, il faudra d'abord chercher l'angle de chute que j'appellerai ε, & qu'on trouvera à peu près par cette équation tirée de la première approximation,

$$\text{tang. } \varepsilon = \text{tang. } e - \frac{X \text{ tang. } e}{a \text{ cos. } e} - \frac{X}{2h \text{ cos. } e^2}$$

(X étant la portée entière à peu près connue); cette quantité ε étant déterminée, on fera $\mu =$ tang. $\frac{1}{2} \varepsilon$ & $\nu = 1$.

Enfin nous remarquerons que, lorsque les boulets & les bombes sont jetés par de fortes charges de poudre sous de grands angles d'élévation, ils s'élèvent jusqu'à des hauteurs où la densité de l'air est considérablement diminuée; pour avoir égard à cette diminution de densité qui produit un grand changement dans les portées, on cherchera d'abord par cette équation approchée,

$$y = \frac{aa}{2h} \times \left(\frac{2h \text{ sin. } e}{a} + 1\right) \times \log. \left(\frac{2h \text{ sin. } e}{a} + 1\right) - a \text{ sin. } e$$

la plus grande hauteur à laquelle les boulets s'élèvent, & la densité qui convient à cette hauteur; ensuite on supposera pour la partie ascendante, que la densité qui est au commencement de la courbe, est égale à celle qui convient au quart de la hauteur,

& que la densité au sommet de la courbe est égale à celle qui convient aux trois quarts de cette même hauteur: cela posé, la densité à la surface de la Terre étant 1, & la densité au sommet de la courbe étant $1 - \delta$, on aura pour la partie ascendante,

$$n = 1 - \frac{3}{4}\delta, \; \& \; m = \frac{1}{\text{sin.}\, e} - \frac{1}{\text{tang.}\, e} + \left(\frac{3}{4\,\text{tang.}\, e} - \frac{1}{4\,\text{sin.}\, e}\right)\delta;$$

quant à la partie descendante, il sera mieux de faire $\nu = 1 - 6$

$$\& \; \mu = \frac{1}{\text{sin.}\, \frac{3}{4}\varepsilon} - \frac{1}{\text{tang.}\, \frac{3}{4}\varepsilon} + \left(\frac{1}{\text{tang.}\, \frac{3}{4}\varepsilon} - \frac{1}{4\,\text{sin.}\, \frac{3}{4}\varepsilon}\right)\delta.$$

Toutes les constantes ainsi déterminées, on aura une approximation assez exacte de la courbe des projectiles, sur-tout pour les plus grandes portées, & même dans ce cas-là on peut dire qu'une solution qui seroit complette, mais qui supposeroit la densité constante dans tous les points de la courbe, seroit moins exacte que celle que nous venons de donner.

APPLICATIONS aux effets des pièces d'Artillerie.

Comme ces applications sont l'objet principal de mon Mémoire, je vais entrer dans des détails assez étendus sur les questions qui regardent le mouvement des boulets; je traiterai ensuite séparément du mouvement des bombes.

DU MOUVEMENT DES BOULETS.

J'examinerai d'abord les portées d'un même boulet jeté avec différentes vîtesses sous le même angle d'élévation, ensuite les portées sous différens angles avec la même vîtesse initiale, ce qui me donnera occasion de chercher l'angle de la plus grande portée possible; je parlerai après cela des portées de *but-en-blanc*, & enfin je comparerai les portées des boulets de différent calibre.

PORTÉES du même boulet jeté avec différentes vîtesses sous le même angle d'élévation.

Pour donner une idée un peu étendue de l'effet de la résistance

de l'air ſur ces portées, j'ai calculé la Table ſuivante, dans laquelle je ſuppoſe un boulet de 24 qui partiroit avec différentes vîteſſes ſous un angle d'élévation de 45 degrés. La première colonne marque les vîteſſes ſuppoſées, la ſeconde donne les diſtances auxquelles le globe parviendroit s'il ſe mouvoit dans le vide, la troiſième donne les portées dans l'air, & j'ai mis dans la quatrième les hauteurs auxquelles il s'élève dans l'atmoſphère.

J'ai ſuppoſé dans le calcul que le diamètre du boulet de 24 étoit de 5,444 pouces, & que la conſtante g qui indique la gravité $= \frac{30,2 \text{ pieds}}{(1'')^2}$.

VITESSES INITIALES exprimées en nombres de pieds parcourus par ſeconde.	PORTÉES DU BOULET de 24 jeté à 45 deg. d'élévation dans le vide.	PORTÉES DU MÊME BOULET jeté à 45 degrés d'élévation dans l'air.	HAUTEURS AUXQUELLES le boulet s'élève dans l'atmoſphère.
100 pieds	... 55 toiſes,5	... 53 toiſes,3	..... 13 toiſes,4
200	... 221 ...	... 192 ...	 53
400	... 883 ...	... 573 ...	 170
600	... 1987 ...	... 916 ...	 306
800	... 3532 ...	... 1207 ...	 442
1000	... 5519 ...	... 1445 ...	 570
1200	... 7947 ...	... 1642 ...	 685
1500	... 12417 ...	... 1899 ...	 839
1800	... 17881 ...	... 2108 ...	 975
2100	... 24338 ...	... 2284 ...	 1095
2400	... 31788 ...	... 2436 ...	 1203
2700	... 40232 ...	... 2562 ...	 1292
3000	... 49669 ...	... 2690 ...	 1407
3500	... 67605 ...	... 2863 ...	 1525

Examinons d'après cette Table, l'effet de la réſiſtance de l'air ſur les portées des boulets, lorſqu'ils ſont chaſſés par de fortes charges de poudre. Par une expérience rapportée dans la compilation de M. Surirei de Saint-Remy, ſur l'Artillerie, on voit qu'une pièce de 24, chargée de 16 livres de poudre, & pointée

à 45 degrés, jette un boulet à la distance de 2250 toises : or cette portée répond dans notre Table à une vîtesse initiale de 2038 pieds par seconde, & cette vîtesse de 2038 pieds par seconde donneroit dans le vide une portée de 22922 toises; d'où il suit que la portée de ce boulet dans l'air n'est que la dixième partie de ce qu'elle auroit été dans le vide: on voit par-là combien se trompent ceux qui croient que dans le calcul des portées des boulets, il est inutile d'avoir égard à la résistance de l'air.

L'effet de cette résistance seroit encore à proportion bien plus grand, si la poudre imprimoit plus de vîtesse aux boulets; par exemple, si la vîtesse initiale étoit de 3500 pieds par seconde, la portée dans l'air ne seroit que la 23.e partie de ce qu'elle auroit été dans le vide.

PORTÉES d'un boulet qui partiroit avec la même vîtesse sous différens angles d'élévation.

Dans la Table suivante, je suppose un boulet de 24, partant successivement sous cinq angles d'élévation différens avec une vîtesse de 1800 pieds par seconde. J'ai marqué dans la seconde colonne les portées dans l'air, & dans la troisième, les rapports qu'auroient entr'elles ces portées, si le mouvement se faisoit dans le vide.

ANGLES D'ÉLÉVATION.	PORTÉES DANS L'AIR.	RAPPORTS DES PORTÉES dans le vide.
15 degrés....	....1950 toises..	....1054 toises
30......	....2235....	1825
45......	....2108....	2108
60......	....1700....	1825
75......	.... 950....	1054

On sait que dans le vide, les portées d'un boulet qui partiroit avec la même vîtesse sous différens angles d'élévation, seroient proportionnelles aux sinus du double de ces angles; la même loi

auroit encore lieu à peu près dans l'air, ſi la vîteſſe initiale du boulet étoit fort petite; mais dans les grandes vîteſſes, le rapport des portées eſt totalement changé. Par exemple, on voit dans la Table que je viens de donner, que la portée de 15 degrés eſt plus que double de celle de 75 degrés, & cependant ces deux portées ſeroient égales, ſi le mouvement ſe faiſoit dans le vide.

Notre Table montre encore que l'angle de 45 degrés n'eſt pas celui qui donne la plus grande portée, comme on le croit communément; mais ceci mérite d'être examiné avec quelque détail.

De l'angle de la plus grande portée.

Si on vouloit déterminer cet angle avec une grande préciſion, il faudroit ſe ſervir des équations dont j'ai fait uſage dans la conſtruction des Tables précédentes; mais cette préciſion n'étant pas néceſſaire dans une pareille recherche, j'ai cru qu'il ſuffiroit d'employer la première approximation, quoique beaucoup moins exacte; on a par cette approximation,

$$y = x\left(\text{tang.}\,e + \frac{a}{2h\,\text{coſ.}\,e}\right) - \frac{aa}{2h}\left(c^{\frac{x}{a\,\text{coſ.}\,e}} - 1\right)$$

ſuppoſant $y = 0$, & cherchant enſuite le *maximum* en faiſant varier e, on trouvera l'équation

$$\frac{1}{\text{ſin.}\,e^2 + \frac{a\,\text{ſin.}\,e}{2h}} = \text{log.}\left(1 + \frac{2h}{a\,\text{ſin.}\,e}\right),$$ par laquelle

on déterminera l'angle de la plus grande portée.

Si dans cette expreſſion, on ſuppoſe $a = \infty$, c'eſt-à-dire, la réſiſtance nulle, on trouvera $\text{ſin.}\,e^2 = \frac{1}{2}$ ou $e = 45$ degrés, ce qu'on ſavoit déjà.

Si $h = \infty$, on aura $e = \frac{1}{\infty}$, c'eſt-à-dire, qu'en ſuppoſant la vîteſſe initiale infiniment grande, la direction qui donneroit la plus grande portée, ſe confondroit preſque avec l'horizontale.

Je joins ici une Table, dans laquelle on trouvera les angles de la plus grande portée pour différentes vîteſſes d'un boulet de vingt-quatre.

VITESSES INITIALES.	ANGLES de la plus grande PORTÉE.
300 pieds par 1″....	.... 42d 10′
600............	.... 36. 30.
1000............	.... 33. 0.
1200............	.... 31. 40.
1500............	.... 30. 10.
1800............	.... 28. 50.
2000............	.... 28. 10.

Je terminerai cet article par le détail d'une expérience que j'ai faite à Breſt avec une pièce de 6, pointée alternativement à 45 & à 30 degrés, & chargée de trois livres de poudre. J'ai fait tirer trois coups ſous chacun des deux angles d'élévation; la portée moyenne ſous l'angle de 45 degrés, a été à peu près de 1590 toiſes, & ſous l'angle de 30 degrés, elle a été de 1700 toiſes: maintenant, ſi on cherche par les équations ci-deſſus la vîteſſe qui répond à la portée de 1590 toiſes ſous l'angle de 45 degrés, on trouvera 2050 pieds par ſeconde, & ſi après cela on cherche la portée ſous l'angle de 30 degrés qui répond à une vîteſſe initiale de 2050 pieds par ſeconde, on trouvera 1715 toiſes, ce qui eſt à peu près la portée qu'a eu le boulet de 6, pointé ſous cet angle de 30 degrés.

Au reſte, je remarquerai que cette expérience n'a pas été faite avec aſſez d'exactitude pour qu'on puiſſe en conclure avec préciſion l'effet de la réſiſtance de l'air, elle prouve ſeulement qu'en effet l'angle de 45 degrés n'eſt pas celui qui donne la plus grande portée.

PORTÉES de But-en-blanc.

On appelle ordinairement portée de *but-en-blanc*, la partie de la ligne décrite par les boulets, qui ne diffère pas ſenſiblement de la ligne droite; mais cette définition eſt abſolument vague; pour lui donner un ſens déterminé, ſuppoſons qu'on demande la

diſtance après laquelle un boulet jeté horizontalement avec une vîteſſe donnée, ſera deſcendu d'une petite hauteur donnée : pour réſoudre cette queſtion, on ſe ſervira de l'équation

$$y = \frac{aa}{2h}\left(1 + \frac{x}{a} - c^{\frac{x}{a}}\right),$$ qu'il eſt facile de tirer de la première approximation.

Par le moyen de cette équation, j'ai déterminé les diſtances après leſquelles les boulets de différens calibres partis avec une vîteſſe de 1800 pieds par ſeconde, ſeront deſcendus de la hauteur de 24 pieds : la Table ſuivante donne ces diſtances.

CALIBRES DES PIÈCES.	DISTANCES après leſquelles les boulets ſont deſcendus de la hauteur de 24 pieds.
48	. . . . 2111 pieds
36	 2081
24	 2051
18	 2033
16	 2022
12	 2007
8	 1976
6	 1951
4	 1907

Voici encore par rapport aux premiers inſtans du mouvement des boulets, une recherche aſſez importante à faire; il s'agit de trouver l'eſpace après lequel les boulets ont perdu une partie donnée de leurs vîteſſes initiales. Pour trouver cette perte de vîteſſe, on peut ſe ſervir de l'équation $u = h\,c^{\frac{-x}{2a}}$ dans laquelle u eſt la vîteſſe du boulet lorſqu'il a parcouru la diſtance x, & h eſt la vîteſſe initiale. J'ai caculé dans la Table ſuivante, les eſpaces que les boulets de différent calibre doivent parcourir pour perdre la dixième & la cinquième partie de leurs vîteſſes.

CALIBRES.

CALIBRES des PIÈCES.	DISTANCES APRÈS LESQUELLES les boulets ont perdu la 10.e partie de leur vîteſſe initiale.	DISTANCES APRÈS LESQUELLES ils ont perdu la 5.e partie de cette vîteſſe.
48....	...... 982 pieds......	.... 2060 pieds
36....	...... 863	 1829
24....	...... 754	 1598
18....	...... 685	 1451
16....	...... 658	 1396
12....	...... 599	 1268
8....	...... 523	 1108
6....	...... 475	 1006
4....	...... 415	 877

PORTÉES des boulets de différens calibres qui partiroient avec la même vîteſſe ſous le même angle d'élévation.

Voici une manière de déterminer ces différentes portées en ne faiſant uſage que de la Table première, & ſans recourir aux équations générales, dont les calculs ſeroient longs & pénibles. Pour cela on ſe ſervira du Théorème ſuivant, dont la démonſtration eſt facile à déduire de nos équations générales. *Lorſque deux boulets de différent calibre jetés ſous le même angle d'élévation dans un fluide de denſité uniforme, ont des vîteſſes initiales, proportionnelles aux racines quarrées de leur diamètre, ils décrivent des courbes ſemblables, & leurs portées ſont proportionnelles à leur diamètre :* & en général, *lorſque les vîteſſes de deux globes jetés ſous le même angle d'élévation ſont en raiſon inverſe des racines quarrées des conſtantes qui expriment leurs réſiſtances, leurs portées ſont en raiſon inverſe de ces conſtantes.* En ſe ſervant de ce Théorème, on n'aura beſoin que de ſimples analogies & d'interpolations pour conclure de la Table première, les portées des boulets quelconques ; il faut cependant remarquer que dans

cette Table on a ſuppoſé une variation de denſité à différentes hauteurs de l'atmoſphère, au lieu que notre Théorème ſuppoſe une denſité uniforme; il ſuit de-là que ce Théorème n'eſt pas exactement applicable à notre hypothèſe, mais il eſt facile de voir que les erreurs qui en réſulteront, ne peuvent jamais être conſidérables.

Voici une Table qui donne les portées des boulets de tous les calibres pour deux différentes vîteſſes initiales, l'angle d'élévation étant de 45 degrés.

CALIBRES des PIÈCES.	PORTÉES POUR UNE VÎTESSE de 1500 pieds par 1″.	PORTÉES POUR UNE VÎTESSE de 1800 pieds par 1″.
48	. . . . . . 2221 toiſes	. . . . 2490 toiſes
36	. . . . . . 2083	 2324
24	. . . . . . 1899	 2108
18	. . . . . . 1781	 1968
16	. . . . . . 1731	 1912
12	. . . . . . 1610	 1776
8	. . . . . . 1463	 1607
6	. . . . . . 1362	 1492
4	. . . . . . 1234	 1348

On trouve dans le Livre déjà cité de M. Surirei de Saint-Remy, des expériences ſur les portées des boulets de différent calibre, faites par M. Dumetz, Lieutenant général d'Artillerie; les rapports de ces portées ſont aſſez différens de ceux que nous venons de donner dans la dernière Table: mais cette différence ne prouve rien autre choſe, ſinon que les vîteſſes initiales des boulets ne ſont pas les mêmes pour tous les calibres.

Voici ces expériences avec les vîteſſes initiales conclues de mes équations.

CALIBRES DES PIÈCES.	PORTÉES À 45^d.	VITESSES INITIALES.
24......	.... 2250	... 2038 pieds par 1".
16......	.... 2020	... 2014
12......	.... 1870	... 1995
8......	.... 1660	... 1928
4......	.... 1520	... 2380

Je finirai ces recherches ſur le mouvement des boulets par une queſtion particulière ſur l'effet du vent pour augmenter ou diminuer les portées. Suppoſons qu'une pièce d'Artillerie, pointée à l'angle d'élévation *DAC*, imprime à un boulet une vîteſſe *AD*, tandis que l'air a une vîteſſe de *C* vers *A*, repréſentée par *BD*, on demande la portée de ce boulet. Fig. 3.

Pour la trouver, je remarque que *AB* ſera la vîteſſe & la direction relatives du boulet par rapport à l'air dans lequel il ſe meut; par conſéquent en cherchant par ma ſolution générale, la portée qui convient à la direction & à la vîteſſe *AB*, on aura la portée relative du boulet dans l'air: ſi on retranche de cette portée, l'eſpace que l'air aura parcouru dans la direction & avec la vîteſſe *BD* pendant tout le temps du mouvement du boulet, on aura la vraie diſtance à laquelle ce boulet ſera parvenu par rapport au point fixe *A*.

Pour en donner un exemple, ſuppoſons qu'un boulet de 24 parte avec une vîteſſe de 1800 pieds par ſeconde ſous un angle de 15 degrés, & que l'air ſe meuve en ſens contraire avec une vîteſſe de 40 pieds par ſeconde, on trouvera d'abord que la portée dans l'air tranquille ſeroit de 1950 toiſes comme dans la Table *(page 261)*. On trouvera enſuite que la portée relative dans l'air en mouvement, ſera de 1972 toiſes; & comme l'air parcourra dans le même temps à peu près 112 toiſes, il s'enſuit que la portée réelle par rapport au point *A*, ſera de 1972 toiſes — 112 toiſes = 1860 toiſes, & par conſéquent le vent aura diminué la portée de ce boulet d'environ 90 toiſes.

On pourroit encore ſe propoſer beaucoup d'autres queſtions ſur le mouvement des boulets, telle que celle-ci, par exemple, de déterminer les portées de boulets de même diamètre & de différentes peſanteurs; on pourroit auſſi chercher combien un changement donné dans la denſité de l'atmoſphère peut augmenter ou diminuer les portées, &c. &c. Il ſera facile de réſoudre toutes ces queſtions en ſe ſervant de la première Table & employant le Théorème dont j'ai fait uſage *(page 265)*.

DU MOUVEMENT DES BOMBES.

Quoique ce que j'ai dit ſur les portées des boulets puiſſe s'entendre également des portées des bombes, j'ai cru cependant qu'il ſeroit utile d'appliquer ſéparément le calcul au mouvement de cette ſeconde eſpèce de projectiles; mais je ne m'occuperai que de deux ſeules queſtions qui m'ont paru les plus importantes, je comparerai d'abord entr'elles les portées des bombes de différens poids & de même diamètre, je chercherai enſuite les angles des plus grandes portées.

PORTÉES des Bombes de différens poids & de même diamètre.

Je donne dans la Table ſuivante, les portées de deux bombes de différente eſpèce, que je ſuppoſe partir avec des vîteſſes égales. La première eſpèce eſt notre bombe ordinaire, dont le diamètre eſt de 11 pouces 8 lignes, & qui pèſe toute chargée environ 140 livres; la ſeconde ſeroit une bombe, qui n'ayant que le même diamètre, pèſeroit cependant 175 livres, ce qui eſt très-poſſible lorſqu'on ne veut pas laiſſer dans la bombe un beaucoup plus grand vide qu'il n'eſt néceſſaire pour contenir la poudre qui peut la faire éclater.

VITESSES INITIALES.	PORTÉES D'UNE BOMBE de $140^{\text{£}}$ de poids & de $11^{p}\ 8^{l}$ de diamètre.	PORTÉES D'UNE BOMBE de $175^{\text{£}}$ de poids & de $11^{p}\ 8^{l}$ de diamètre.
600 pieds.....	..... 1020 toises	..... 1117 toises
700	..... 1200	 1335
800	..... 1360	 1535
900	..... 1520	 1722
1000	..... 1660	 1900
1100	..... 1788	 2059
1200	..... 1906	 2190

On voit par cette Table, que de deux bombes qui ont même vîtesse initiale & même diamètre, celle qui a une plus grande pesanteur, a aussi une plus grande portée; mais d'un autre côté il est plus que probable que cette bombe plus pesante acquiert moins de vîtesse par l'explosion de la poudre, d'où il suit qu'il y a une certaine masse que doit avoir une bombe d'un diamètre donné, pour qu'avec la même quantité de poudre elle parvienne à la plus grande distance possible.

Sans entrer dans de longs détails sur cette question, je vais rapporter une expérience qui tendroit à prouver que dans les portées fort considérables, notre bombe ordinaire du poids de 140 livres n'a pas la propriété dont je viens de parler, c'est-à-dire qu'elle n'est pas la bombe de la plus grande portée possible.

L'expérience dont il s'agit, a été faite à Mahon par des Officiers d'Artillerie, Anglois; on a trouvé qu'un mortier marin pointé à 45 degrés d'élévation & chargé de 27 livres & demie de poudre, jetoit à la distance de 2090 toises, une bombe du poids de 185 livres & d'un diamètre de 11 pouces 10 lignes *. Si on cherche par nos équations, la vîtesse initiale qui répond à

* On a réduit les mesures & poids Anglois, aux mesures & poids François.

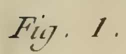
cette portée, on trouvera 1140 pieds par ſeconde; on trouvera auſſi par la Table ci-deſſus, que pour que notre bombe du poids de 140 livres parvint à cette diſtance de 2090 toiſes, elle devroit avoir une vîteſſe initiale de 1380 pieds par ſeconde: or il me ſemble qu'il faudroit admettre une hypothèſe bien extraordinaire ſur la loi de la force expanſive de la poudre pour trouver que la même quantité de poudre qui auroit imprimé une vîteſſe de 1140 pieds par ſeconde à la première de ces bombes, en imprimeroit à la ſeconde une de 1380 pieds; cette raiſon me porte à croire que ſi on donnoit à nos bombes ordinaires plus de peſanteur ſans augmenter leur diamètre, la même quantité de poudre leur donneroit de plus grandes portées.

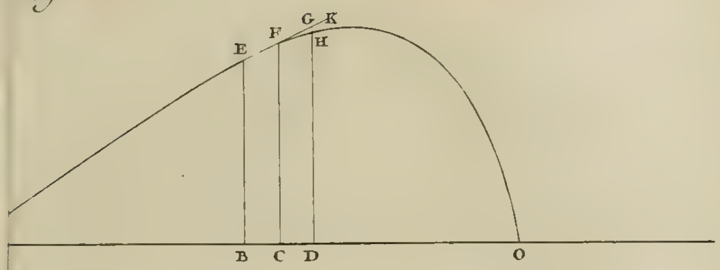
ANGLES de la plus grande portée.

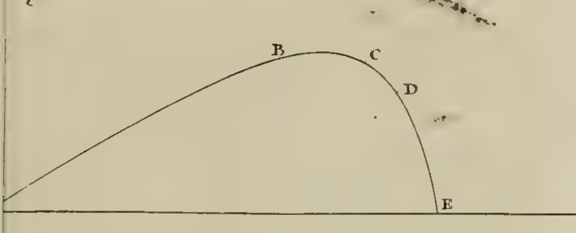
Je me ſuis ſervi de l'équation trouvée ci-deſſus *(page 262)* pour former la Table ſuivante, dans laquelle je ſuppoſe notre bombe du poids de 140 livres, partant avec différentes vîteſſes.

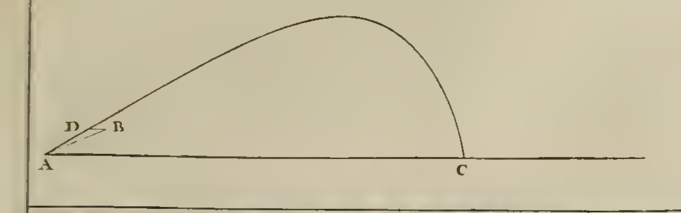
VITESSES INITIALES.	ANGLES DES PLUS GRANDES portées.	PORTÉES SOUS L'ANGLE de 45 degrés.	LES plus grandes PORTÉES.
600 pieds par 1″	...37d 15′...	...1020 toiſes	...1035 toiſes
700	...36. 20....	...1198...	...1225
800	...35. 20....	...1365...	...1405
900	...34. 35....	...1518...	...1576
1000	...33. 55....	...1659...	...1739
1100	...33. 20....	...1798...	...1894

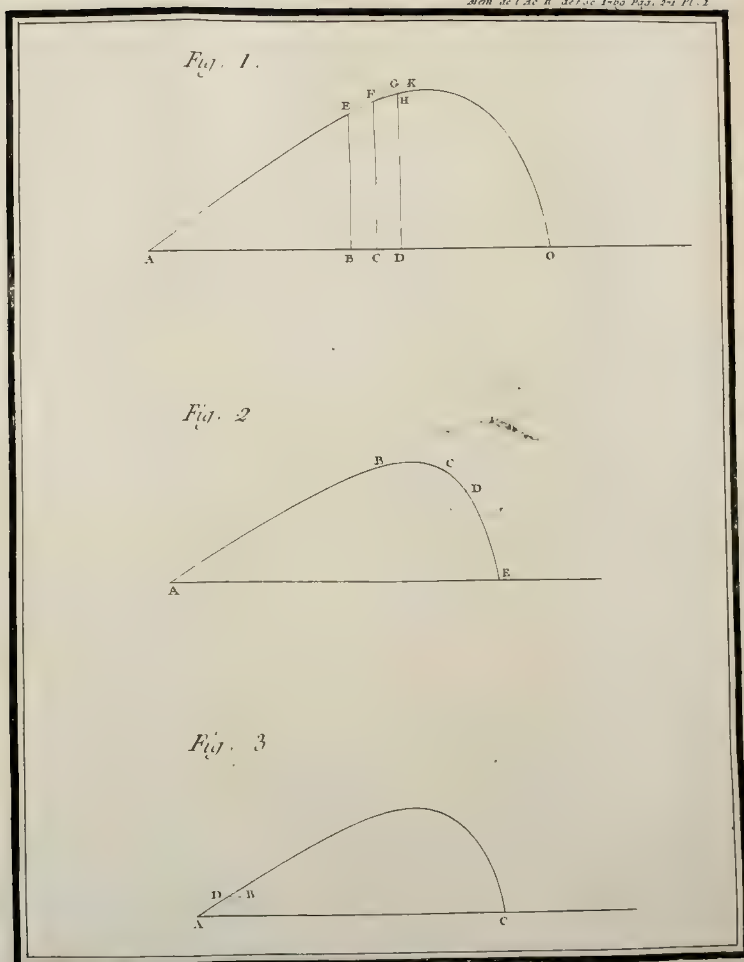
Nos mortiers marins qui ſont fondus ſur leurs ſemelles, avec leſquelles ils font un angle de 45 degrés, ont des portées de 18 à 19 cents toiſes; on voit par notre Table, qu'en réduiſant cet angle à 33 ou 34 degrés, la portée ſeroit augmentée d'environ 100 toiſes.


Fig. 1.


G
K
F
H
E
B
C
D
O


Fig. 2
B
C
D
E


Fig. 3
D
B
A
C



J I sc

Voilà les recherches ſur la Balliſtique, qui m'ont paru mériter le plus l'attention de ceux qui s'occupent de la ſcience de l'Artillerie ; il réſulte de ces recherches, que la réſiſtance de l'air change entièrement la courbe décrite par les boulets & par les bombes lorſque ces projectiles ſont chaſſés par de fortes charges de poudre, & qu'en général les règles de la Balliſtique ordinaire ne donnent que des idées fort imparfaites des effets de nos pièces d'Artillerie.



MÉMOIRE
SUR LA
PIERRE APPELÉE TRIPOLI.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

LA pierre connue ſous le nom de *Tripoli*, eſt utile pour polir les pierres dures, les verres & les glaces, &c. Cet uſage en a fait en France un objet de commerce.

Le tripoli tire vraiſemblablement ſon nom de cette ville de Barbarie, aux environs de laquelle on le trouve, & d'où on le tiroit autrefois.

Nous avons des carrières de tripoli en France *; on en tire beaucoup de celles de Polligné en Bretagne, de Menat, village à ſept lieues de Riom, &c. Cependant à Paris le tripoli de Veniſe eſt particulièrement eſtimé pour le poli des verres. Nous croyons devoir avertir ici que quoique l'on donne à cette pierre, le nom de *tripoli de Veniſe*, il n'y en a pas aux environs de cette ville, & que les Vénitiens qui nous l'envoient, & qui s'en ſervent beaucoup pour le poli de leurs glaces, le tirent des environs de Corfou, d'une montagne appelée *Épiro*, proche un bourg connu ſous le nom de *Santi-Quarenta*.

Pluſieurs Auteurs ont parlé du tripoli ; nous rapporterons ce qu'ils en auront dit à meſure que nous croirons leurs obſervations propres à appuyer un ſentiment ſur la formation de cette pierre. *Voyez* M. Pott, *Lithogeognoſis, Cont. Tom. II. pag. 84*.

Le tripoli eſt léger; il doit avoir peu de ſolidité, de conſiſtance, les parties en ſont peu liées, principalement quand on le tire de la carrière.

Il ſe ſépare & ſe diviſe dans l'eau, mais la diſſolution n'eſt

* Voyez le Mémoire de M. Guettard, ſur le Tripoli, *année 1755, page 177*.

pas

pas complette, puiſqu'après peu de temps il ſe précipite : la langue tient à cette pierre, & y reçoit une ſaveur de glaiſe, caractère qui ſe fait reconnoître auſſi à l'odorat lorſqu'on la frotte; les acides agiſſent peu ou point ſur elle; enfin le tripoli ſe vitrifie à un feu violent.

Ludwig en compte pluſieurs eſpèces; nous nous en tenons à ces caractères pour déterminer celles de ces pierres qui méritent d'être rangées dans la claſſe des tripolis.

La couleur eſt ordinairement d'un jaune plus ou moins foncé, mais des terres de différentes natures & hétérogènes peuvent faire varier celle qui eſt propre au tripoli. Nous ferons voir dans un moment que cette couleur peut changer ſuivant des circonſtances particulières à l'eſſence & à la formation de cette pierre.

D'habiles Chimiſtes ont ſoumis ces pierres à des épreuves & à celles d'un feu continu; ils en ont tiré des conſéquences ſur la nature de la pierre. C'eſt d'après ces examens que la plupart l'ont regardée comme argileuſe & vitriſiable; cependant pluſieurs l'ont rangée dans des claſſes différentes, & M. Pott en examinant les vrais caractères de cette pierre, a montré en quoi quelques-uns s'étoient trompés en la claſſant.

Cramer qui la regarde comme réfractaire, lui donne pour origine, une marne durcie ou une terre qui lui eſt particulière. *Docim, page 15.* Lugd. Bat. 1739, *in-12.*

Wallerius penſe que le fond de la pierre eſt un ſablon minéral. *Tom. I, pag. 58 & 59.*

M. Von-Linné range le tripoli avec les marnes; d'autres auteurs l'ont cru une craie. *Voyez Neumann, Prælect. Chymic.* part. V, pag. 1815. *Mémoires académiques de M. Homberg*, année 1712, page 193. *Mercatus metallotheca*, pag. 23. in-fol. 1719, &c.

Bromel croit que la pierre eſt formée d'une argile ou d'un limon fin & qui lui eſt particulier: ce ſentiment eſt adopté par M. Pott. C'eſt celui qui s'accorde avec les expériences que cet habile Chimiſte a faites, & qui eſt auſſi confirmé par les obſer-

vations ſuivantes. Mais qui eſt-ce qui a fait un tripoli de cette argile ou de cette pierre argileuſe ? Cette argile a-t-elle éprouvé des changemens ? Quels ſont ceux qu'elle a ſoufferts ? C'eſt ce que l'examen des carrières de tripoli m'a paru annoncer. J'ai cru que depuis ces obſervations, on pouvoit décider avec ſûreté ſa véritable origine.

M. Gardeil (*Mémoire des Savans étrangers, tome III, page 19*) a déjà donné la deſcription de la carrière de Polligné en Bretagne. Il imagine qu'elle eſt le produit du changement que des arbres, des bois foſſiles ont éprouvés en terre.

M. Pott n'y découvre en l'examinant chimiquement, aucune marque qui puiſſe par les produits indiquer que cette terre ait été formée de débris de végétaux.

M. Guettard, dans ſon Mémoire déjà cité ſur le *Tripoli, année 1755,* ne croit pas non plus que ce ſoient des végétaux qui ſervent toujours à former le tripoli.

Quelques Naturaliſtes enfin ont cru que cette pierre pourroit avoir ſouffert les effets d'un feu ſouterrain. *Lémery, Dict. au mot* Alana, *page 21.*

Examinons encore plus ſcrupuleuſement cette carrière, arrêtons-nous à voir les pierres des environs, comparons cette carrière avec une qui éprouve tous les jours des changemens par un effet connu, & nous tirerons des conſéquences ſur la nature de la pierre de tripoli & ſur ſon origine.

Les pierres des environs de Menat, celles de Polligné, près des carrières où ſe trouve le tripoli, ſont ſchiteuſes non litées : ce ſchiſte eſt jaune ou rouge & plus ou moins rouge ; cette dernière couleur eſt produite, comme nous le verrons, par une ocre qui prend une teinte rouge plus ou moins vive ſuivant qu'elle a ſouffert plus ou moins de chaleur ; car des pierres, particulièrement dans la carrière de Polligné, annoncent le feu qui y a paſſé : elles ſont réduites en écume plus ou moins légère ; ce ſont de vraies pierres brûlées.

Rien ne peut laiſſer d'incertitude ſur le feu qui a été aux

environs de cette carrière; des pierres ont été fondues, & on ne trouve le tripoli qu'aux environs de l'endroit où la présence du volcan est la plus apparente *.

A Polligné, la partie de la carrière qu'on a choisie préférablement pour l'usage, semble à la vérité avoir été lavée par les eaux, & s'être formée du dépôt des parties les plus légères & les plus fondues. C'est aussi le sentiment de M. Guettard, *année 1755, p. 188;* mais c'est la même pierre qui a souffert comme les voisines, la chaleur du feu souterrain.

Je crois devoir ajouter ici que ceux qu'interrogeoit M. Grangier sur le tripoli de Menat proche Riom, lui ont dit qu'on savoit par tradition que les carrières avoient été embrasées pendant sept à huit ans; quoique ce rapport parût peu vraisemblable à M. Grangier, ne semble-t-il pas qu'il ait été fondé sur la découverte de quelques morceaux brûlés qui lui auront échappé, & qu'il n'a pas seulement été établi sur la couleur noire qu'ont quelques bancs de cette carrière. *(Voyez Mém. Acad. an. 1755, p. 183)*, d'autant que M. Guettard parle de pierres brûlées, trouvées à une demi-lieue de Riom, & par conséquent près de la carrière de tripoli.

Outre ces pierres brûlées qui dénotent l'effet des feux souterrains, M. Grangier a retiré du tripoli de Riom, du soufre & du fer. J'ai obtenu de celui de Polligné, du soufre & de l'alun, que l'on sait être des produits de volcan. *Voyez Mém. 1755, page 189; & Mémoire sur l'Alun, année 1766, page 1.*

Dans les laboratoires, en couvrant de terre la glaise ou le schiste glaiseux, & l'exposant au feu dans des vaisseaux fermés, on parvient à faire une espèce de tripoli qui ressemble au mauvais de Bretagne; ce qui suffit, je crois, pour convaincre qu'avec de nouvelles épreuves, on pourroit parvenir à l'imiter plus parfaitement.

* Des morceaux tirés de la carrière de Polligné qu'a bien voulu me procurer M. Abeille, Correspondant de cette Académie, ne laissent aucun doute sur le feu qui les a attaqués; M. Abeille a déjà montré à l'Académie, des pierres tirées de Polligné qui prouvoient qu'il y avoit eu dans cet endroit un volcan.

L'Italie fournit auſſi des bandes argileuſes brûlées par les feux ſouterrains, dont on pourroit faire quelqu'uſage, & quelquefois ces argiles renferment des végétaux.

Le tripoli eſt donc une pierre brûlée; confirmons ceci par une preuve qui nous ſervira auſſi à aſſurer la nature de la pierre dont a été fait le tripoli. Nous trouverons ces preuves dans l'examen des pierres voiſines des carrières de tripoli. M. Guettard dans ſon Mémoire ſur le tripoli, a déterminé la nature de cette pierre, & j'ajouterai ſeulement ici à ce qu'il en a dit, une obſervation pour joindre à celles qu'on trouve dans ſon ouvrage.

La plupart des carrières de tripoli que j'ai vues, m'ont paru avoir été brûlées, mais aucune ne marque mieux le feu qui a attaqué certaines de ces carrières, & particulièrement celle de Polligné, aucune ne peut mieux déterminer la nature de cette dernière avant le changement qu'elle a éprouvé par le feu, qu'en la comparant avec une carrière des environs de Saint-Étienne en Forez, qu'on connoît ſous le nom de *Saint-Genis*, où le feu eſt depuis plus de cent ans. *Voyez Mémoires de l'Académie, année 1765, page 389.*

On ſait que les pierres de Saint-Étienne & d'une partie du Forès, ſont de ſchiſte; l'ardoiſe ou la croûte de charbon de terre, eſt couverte d'une pierre argileuſe ou d'un ſchiſte jaune ou rougeâtre lité ou non lité: cette pierre glaiſeuſe eſt aiſée à diſtinguer aux environs de la carrière brûlée dans les endroits où le feu n'a point été. Dans le lieu qui brûle, on y trouve les mêmes pierres qu'à Polligné; certaines ſont réduites en écumes, ou ſont poreuſes, d'autres ſont vitrifiées, enfin d'autres ſont tendres, ſe réduiſent en pouſſière, & ſont un vrai tripoli. Dans celles qui ont été brûlées, on voit une couleur plus ou moins rouge ſuivant qu'elles ſe ſont trouvées contenir plus ou moins d'ocre ferrugineuſe, & que le feu a développé la couleur produite par le fer.

Voici donc un terrein brûlé, un ſchiſte glaiſeux qui eſt expoſé au feu, & qui produit des pierres ſemblables aux carrières de tripoli de Polligné. N'eſt-on pas en droit de conclurre qu'au moins la carrière de Polligné a été brûlée par les feux ſouterrains, dont il y a d'anciens veſtiges dans la Bretagne, & que ce

tripoli eſt un ſchiſte ou une glaiſe brûlée, & que peut être le meilleur, ayant beſoin d'être lavé par les eaux, nous ne l'obtenons que de ce dépôt * ?

Si ces obſervations étoient confirmées par pluſieurs faits de la même eſpèce dans des carrières de tripoli, ſi l'on y trouvoit des marques auſſi certaines de feux anciens, ne pourroit-on pas conclure que les tripolis ſont formés par les volcans ? J'en ai vu pluſieurs en Italie qui ne laiſſoient aucun doute ſur leur origine. Je ne donne cependant cette idée ſur la formation du tripoli que pour engager à multiplier ces obſervations qui ſeules mettront en état de n'avoir plus aucun doute ſur l'origine de cette pierre.

Ces remarques doivent au moins exciter à étudier un plus grand nombre de carrières en s'attachant aux pierres voiſines ; ſi elles ne confirment pas l'idée que j'ai cru devoir prendre ſur l'origine de ces pierres, elles éclairciront la formation du tripoli *.

* C'eſt de ce tripoli le plus fin, dont on ſe ſert pour adoucir les verres.



MÉMOIRE
SUR LES
PRINCIPES DE LA MÉCANIQUE.

Par M. D'ALEMBERT.

CE Mémoire sera divisé en trois articles.

Dans le premier, je donnerai une démonstration nouvelle de la composition du mouvement, démonstration qui a l'avantage d'être renfermée dans une seule proposition.

Le second article contiendra quelques éclaircissemens & remarques nécessaires pour rendre complette la démonstration que j'ai donnée du principe de la force d'inertie dans le *Tome IV de mes Opuscules mathématiques.*

Enfin dans le troisième article, je donnerai une démonstration nouvelle du principe de l'équilibre dans le levier, celle qui est donnée dans les *Mémoires de Turin, tome II,* m'ayant paru laisser quelque chose à desirer.

(Les notes que j'ai ajoutées à ce Mémoire, se trouveront à la fin, & seront indiquées par des chiffres.)

ARTICLE PREMIER.

Sur la composition du mouvement.

Fig. 1. (1.) Soient $AC = a$ & $AB = b$, les valeurs & les directions des deux forces, par lesquelles le point ou corps A est poussé; l'angle $CAB = \alpha$; & soit $AF = z$, la valeur & la direction de la force qui en résulte, & l'angle $CAF = u$; soit fait à volonté l'angle CAc, dont la moitié CAD soit $= m$, & soient supposées deux autres puissances $Ac = a$, $Ad = b$, semblablement placées de l'autre côté de AD. Il est clair 1.° qu'elles produiront une autre force Af égale & semblable à $AF = z$, & semblablement placée; 2.° que la puissance

suivant AD, résultante des deux puissances égales AC, Ac, plus la puissance suivant AD résultante des deux puissances égales AB, Ab, sera égale à la puissance suivant AD résultante des deux puissances suivant AF & Af, puisque ces puissances AF & Af équivalent chacune à AB & AC, Ab & Ac. On aura donc $a\varphi(m) + b\varphi(\alpha + m) = z\varphi(u + m)$. Car la puissance suivant AD résultante des puissances égales AC & Ac, est évidemment égale à la valeur a de ces puissances multipliée par une fonction de l'angle m; puisque cette puissance suivant AD, est évidemment proportionnelle à a, & qu'elle dépend de l'angle m; & de même des deux autres b, z.

(2.) Cela posé, si dans la *fig. 2*, on fait coïncider les deux puissances égales AC, Ac, & qu'ensuite ayant pris les angles $B'AB$ & $b'Ab$ égaux à un angle quelconque $2m'$, on suppose le point A poussé par six puissances, savoir par les deux AC & $Ac = a$, & par quatre puissances égales à b suivant AB, AB', Ab, Ab', la résultante suivant AE, sera évidemment $= 2a + b\varphi m' \times \varphi(\alpha + m')$. De plus, soient AF & Af les forces résultantes des puissances AB & AC, Ab & Ac, il est évident que la puissance résultante de AF & Af, AB & Ab' sera $= z\varphi u + b\varphi(\alpha + 2m')$. Or cette puissance doit être égale à la précédente; donc $z\varphi u + b\varphi(\alpha + 2m') = 2a + b\varphi m' \times \varphi(\alpha + m')$. Or on a en général, quel que soit m, (*art. 1.*) $a\varphi m + b\varphi(\alpha + m) = z\varphi(u + m)$, ou en faisant $m = 0$, $2a + b\varphi(\alpha) = z\varphi u$, parce que φm devient évidemment $= 2$, quand $m = 0$. Donc, substituant cette dernière valeur de $z\varphi u$ dans l'équation précédente, on aura après les réductions $\varphi\alpha + \varphi(\alpha + 2m') = \varphi m' \times \varphi(\alpha + m')$, ou en faisant $\alpha + m' = \delta$, $\varphi(\delta - m') + \varphi(\delta + m') = \varphi m' \times \varphi\delta$. Or il est aisé de voir, par ce que j'ai démontré dans les *Mém. de Berlin, 1750, p. 355 & suiv.* qu'il faut pour satisfaire à cette condition que $\varphi(\delta - m')$ ou $\varphi\alpha = c^{\alpha\sqrt{A}} + c^{-\alpha\sqrt{A}}$ (1). Donc, en considérant de plus que $\varphi\alpha$ doit être $= 0$, lorsque $\alpha = 90^d$, & doit seulement dans ce

cas être $= 0$, on trouvera que $\sqrt{A} = \sqrt{-1}$ & $\varphi\alpha = 2$ cos. α.

(3.) Maintenant, puisqu'en général on a $\frac{a\varphi m + b\varphi(\alpha + m)}{\varphi(u + m)} = z$, quel que soit m, & que $\varphi m = 2$ cos. m; donc en prenant successivement m quelconque & $m = 0$, on aura $\frac{a \text{ cos. } m + b \text{ cos. } (\alpha + m)}{\text{cos. } (u + m)} = \frac{a + b \text{ cos. } \alpha}{\text{cos. } u}$ ou a cos. $m \times$ cos. $u + b$ cos. u (cos. α cos. m — sin. α sin. m) $= a$ (cos. $u \times$ cos. m — sin. u sin. m) $+ b$ cos. α (cos. u cos. m — sin. u sin. m); donc en réduisant, on aura $\frac{a \text{ sin. } u}{b} =$ sin. α cos. u — sin. u cos. α; ou sin. u : sin. $(\alpha - u) :: b : a$, ce qui donne la direction de la puissance résultante de AC & de AB. À l'égard de la valeur de z, elle est égale, comme on vient de le voir, à $\frac{a}{\text{cos. } u} + \frac{b \text{ cos. } \alpha}{\text{cos. } u}$; & à cause de $\frac{\text{cos. } \alpha}{\text{cos. } u} = \frac{\text{sin. } \alpha}{\text{sin. } u} - \frac{a}{b \text{ cos. } u}$, on aura $z = \frac{b \text{ sin. } \alpha}{\text{sin. } u}$. (2).

ARTICLE II.

Sur la force d'inertie.

(1.) J'ai fait voir dans le *quatrième Volume de mes Opuscules mathématiques, page 349*, que l'espace y décrit durant le temps x par un corps abandonné à lui-même, doit être représenté par l'équation $y = \Xi(a + x) - \Xi a$, a étant une constante telle que $\frac{d\,\Xi a}{da} =$ la vîtesse initiale a. Cette équation est tirée, comme on l'a vu au même endroit, de l'équation différentielle $\frac{ddy}{dx} = \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$, ou (en faisant $\frac{dy}{dx} =$ à la vîtesse u) $du = dx\,\varphi u$.

(2.) Il

(2.) Il résulte d'abord de ces formules, qu'un corps mis en mouvement, & abandonné à lui-même, ne peut suivre d'autres loix que celles qui sont contenues dans les équations précédentes; ce qui exclut déjà une infinité de loix qu'on auroit pu imaginer, & dont il auroit paru difficile de prouver l'impossibilité avant notre démonstration.

(3.) Nous avons de plus exigé cette condition, que $a = 0$; rende $y = 0$, ce qui exclut encore une infinité d'autres loix. Mais on peut douter si cette seconde condition est absolument nécessaire; en effet, il est aisé de voir que si φu renferme un terme de cette forme $B u^n$, n étant < 1, $a = 0$ ne rendra pas $y = 0$; conclura-t-on de-là que cette loi est impossible? Il paroîtroit s'ensuivre qu'un corps ne doit jamais éprouver dans un milieu résistant, une altération de mouvement proportionnelle à une fonction de la vîtesse qui renfermeroit un terme de la forme $B u^n$, n étant < 1. Or cette assertion seroit pour le moins très-hasardée.

(4.) Il faut donc pour prévenir cette objection, tâcher de prouver que quand un corps est mis en mouvement, & abandonné à lui-même, l'équation qui représente son mouvement, ne sauroit être $du = dx \varphi u$, φu représentant une fonction de la vîtesse. Par ce moyen, on répondra non-seulement à l'objection proposée, mais encore à toutes celles qu'on pourroit faire d'ailleurs *(3)*, dans l'hypothèse que φu ne fût ni $= 0$, ni égale à une constante, cas particulier que nous examinerons ensuite.

(5.) Il est d'abord évident que le rapport initial de dy à dx étant $= a$, le corps en vertu de la seule puissance impulsive, se mouvroit de lui-même uniformément dans le premier instant, si ce mouvement n'étoit altéré par une cause quelconque, résidente dans le corps même. Donc en général on peut considérer le cas de $du = dx \varphi u$, comme si d'une part le corps tendoit à se mouvoir uniformément par l'effet naturel de la puissance impulsive, & que de l'autre une cause quelconque, différente de la puissance impulsive, cause résidente dans le corps, & proportionnelle à une fonction de la vîtesse, tendît à altérer le mouvement uniforme. Cette expression *résidente dans le corps*, qui

peut-être ſeroit peu exacte & illuſoire dans tout autre cas, devient ici néceſſaire, puiſque *(hyp.)* il n'y a point de cauſe extérieure d'altération de mouvement. Il faut donc ſuppoſer ici une cauſe motrice qui réſide dans le corps, & qui n'ayant point d'action tant que le corps eſt en repos, ne reçoive ſon activité & ſa direction, que de la puiſſance impulſive. Or c'eſt ce qui ne paroît pas facile à concevoir, & qu'on peut même regarder comme une ſuppoſition abſurde, ſur-tout ſi cette cauſe motrice tend à retarder le mouvement du corps, comme il eſt aſſez naturel de le ſuppoſer d'après l'expérience, qui nous fait voir que les corps perdent peu à peu leur mouvement; car alors la cauſe motrice recevroit de la puiſſance impulſive, une direction contraire à cette puiſſance même, ce qu'il eſt ridicule d'imaginer. En ſecond lieu, ſoit que la cauſe motrice réſidente dans le corps, tende à retarder ou à accélérer ſon mouvement, ſoit cette force $= \pm \varphi a$; & comme *(hyp.)* cette force n'a point d'action tant que le corps eſt en repos, il s'enſuit qu'au commencement du mouvement, on doit regarder le corps comme animé par la force impulſive qui tend à lui donner la vîteſſe a, & en même temps par deux forces égales & contraires $+ \varphi a$ & $- \varphi a$, qui le conſerveroient en repos, ſi elles agiſſoient ſeules. Or ſuppoſons que de ces deux forces, la première $+ \varphi a$ agiſſe pour altérer le mouvement du corps, la ſeconde $- \varphi a$ agira pour l'altérer en ſens contraire, & par conſéquent le corps conſervera ſa vîteſſe uniforme, au moins dans le premier inſtant. Quand un corps ſe meut dans un fluide qui réſiſte comme une fonction de la vîteſſe, ou en général quand il éprouve une cauſe extérieure quelconque de réſiſtance, comme le frottement ou quelqu'autre ſemblable, on peut de même le conſidérer au commencement du mouvement comme animé d'abord de la vîteſſe impulſive a, & enſuite de deux forces égales & contraires $+ \varphi a$ & $- \varphi a$; celle-ci détruit en partie le mouvement du corps, & l'autre $+ \varphi a$ eſt employée à vaincre la réſiſtance extérieure; mais quand il n'y a point de milieu environnant, la force $+ \varphi a$ ne peut agir que ſur le corps, & lui reſtituer le mouvement qu'il a perdu, en ſorte que ce

mouvement redevient néceſſairement uniforme au premier inſtant, & par une conſéquence néceſſaire, dans les inſtans ſuivans.

(6.) Les mêmes raiſonnemens qu'on vient d'employer pour prouver que la cauſe qui altère le mouvement ne peut être une fonction de la vîteſſe, ſerviront auſſi à prouver qu'elle ne peut être conſtante. Donc il ne reſte d'autre ſuppoſition que celle de $\varphi u = 0$. Donc le mouvement eſt naturellement uniforme.

(7.) Je ſais que la plupart des Géomètres n'ont regardé cette vérité que comme une vérité d'expérience; mais j'avoue que je ne puis être en cela de leur avis. L'obſervation journalière, bien loin de prouver l'uniformité naturelle du mouvement, ſemble bien plutôt prouver qu'il tend à ſe ralentir de lui-même; & ce n'eſt qu'en enviſageant de plus près la queſtion, qu'on peut s'aſſurer que l'obſervation nous trompe à cet égard, & que le mouvement ne peut être altéré que par des cauſes extérieures & étrangères.

ARTICLE III.

Sur l'équilibre.

(1.) Soient ſuppoſées deux puiſſances égales bq, DF, appliquées en ſens contraires à deux points quelconques D, b, d'un levier indéfini. Je dis qu'on ne ſauroit placer en aucun point e une puiſſance équivalente à ces deux-là. Fig. 4.

Car ſi cela ſe pouvoit, imaginons deux autres puiſſances DG, bg égales & contraires aux deux puiſſances données. Il eſt viſible qu'en prenant $DE = de$, on aura une puiſſance EL égale & parallèle à la puiſſance el, dirigée dans le même ſens & équivalente aux deux puiſſances DG, bg. Or les quatre puiſſances égales & contraires bq, bg, DG, DF ſont évidemment en équilibre; donc les puiſſances équivalentes el, EL devroient l'être auſſi, ce qui eſt impoſſible, puiſqu'elles ſont dirigées dans le même ſens.

(2.) Soient maintenant quatre puiſſances égales DF, df, bq, BQ appliquées à un levier, & $BD = bd$; je dis qu'elles Fig. 5.

Fig. 5. ſeront en équilibre. Car ſoit C le milieu du levier ; s'il n'y avoit pas équilibre, il y auroit en C une puiſſance CR réſultante de l'action des puiſſances données ; & il eſt viſible qu'au lieu de cette puiſſance CR on pourroit en ſuppoſer deux autres el, $e'l'$, qui lui ſeroient équivalentes, & qui le ſeroient de manière que la puiſſance el équivaudroit aux puiſſances DF, bq; ce qui eſt impoſſible par le Lemme précédent. Donc la puiſſance $CR = 0$. Donc, &c.

(3.) Donc ſi on ſuppoſe les points B & b réunis en C, il eſt clair que la puiſſance équivalente aux deux DF, df, ſera $= 2\,DF$ *(4)*.

(4.) Cette propoſition étant une fois démontrée, il ne reſte plus de difficulté pour établir la loi générale de l'équilibre ; le Problème ſe réduit, comme on peut le voir dans les *Memoires de Turin, tome II, page 321*, à un Problème purement analytique, d'où l'on tire la propoſition fondamentale du levier, avec la plus grande facilité *(5)*.

NOTES relatives au Mémoire ci-deſſus.

(1) Il réſulte des *Mémoires de Berlin*, à l'endroit cité, que $\varphi\delta = Mc^{\delta\sqrt{A}} + gc^{-\delta\sqrt{A}}$; $\varphi m' = Mc^{m'\sqrt{A}} + gc^{-m'\sqrt{A}}$; $\varphi(\delta + m') = MMc^{(\delta + m')\sqrt{A}} + ggc^{-(\delta + m')\sqrt{A}}$; $\varphi(\delta - m') = Mgc^{(\delta - m')\sqrt{A}} + Mgc^{-(\delta - m')\sqrt{A}}$; d'où $MM = M = Mg$; $gg = g = Mg$, & par conſéquent $M = 1$ & $g = 1$.

(2) La démonſtration générale devient beaucoup plus ſimple quand
Fig. 3. les deux puiſſances ſont égales. En effet, ſoient CD & Cd deux forces ou puiſſances égales que j'appelle n, & l'angle ECD moitié de $DCD = \alpha$; on aura la force réſultante ſuivant $CE = n\varphi\alpha$; ſoient CB, & Cb deux autres forces n, en ſorte que les angles DCB, & dCb ſoient chacun $= 2\beta$, on aura la force ſuivant CE, réſultante des forces CB & $cb = n\varphi(\alpha + 2\beta)$; donc la ſomme de ces deux forces réſultantes eſt $n\varphi\alpha + n\varphi(\alpha + 2\beta)$. Or ſi on prend CG & Cg pour les deux forces réſultantes de CD & CB, Cd & Cb, on aura chacune

de ces forces $= n \varphi \beta$, & la force suivant CE résultante des deux forces CG & $Cg = n \varphi \beta \times \varphi$ angl. $ECG = n \varphi \beta \times \varphi (\alpha + \beta)$; & comme cette dernière force résultante doit évidemment être égale à la somme des deux précédentes, on aura $n \varphi \beta \times \varphi (\alpha + \beta) = n \varphi \beta + n \varphi (\alpha + 2\beta)$. Donc (*art.* 2) $\varphi \alpha = c^{\alpha \sqrt{A}} + c^{-\alpha \sqrt{A}}$; &c.

Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai trouvé une nouvelle solution analytique du Problème de la composition du mouvement, & je vourrai la donner dans une autre occasion.

(3) M. Euler a remarqué, dans sa *Mécanique, tome I, article 396*, que $a = 0$ donne $y = 0$ quand $\varphi u = A u^m$, m étant $=$ ou > 1. Ainsi l'*article 11, page 355 du tome IV de nos Opuscules* a besoin de restriction à cet égard. Il faut donc s'attacher à prouver en général que $\varphi u = 0$, & c'est ce que nous avons tâché de faire, au moins métaphysiquement, la question n'étant peut-être pas susceptible de preuves purement mathématiques.

En général, $a = 0$ ne donnera $y = 0$ que quand φu sera telle qu'en faisant u infiniment petite, elle se réduira à un terme $A u^m$ où m ne sera pas < 1. J'observerai en passant à cette occasion, que M. Euler, dans sa *Mécanique*, a tâché d'expliquer analytiquement pourquoi dans les autres hypothèses de résistance, la nature & le calcul sont en contradiction. Je crois que cela vient uniquement de ce que le corps n'a point de direction selon laquelle il doive être mu, & que sans cela il se mouvroit; comme il arrive aux corps pesans, quoique a soit $= 0$ lorsque $x = 0$, parce que ces corps tendent à se mouvoir suivant une ligne de position déterminée.

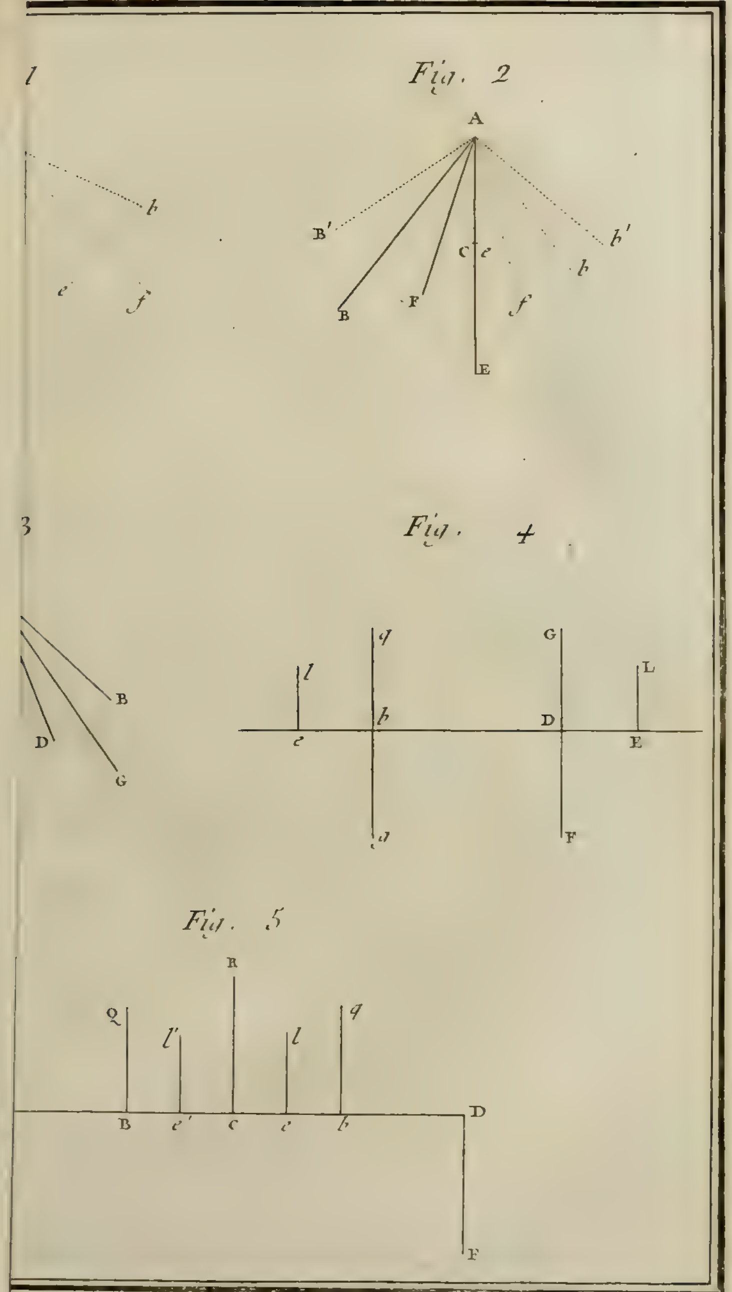
(4) En supposant que la puissance équivalente soit comme φx; (DC étant $= x$) on trouve dans les *Mémoires de Turin, tome II, page 320*, que $(\varphi x)^2$ doit être $= 2 + \varphi (2x)$; d'où l'on conclut que φx est constant; en quoi l'on s'est trompé, puisque $\varphi x = c^{x \sqrt{A}} + c^{-x \sqrt{A}}$ satisfait à l'équation $(\varphi x)^2 = 2 + \varphi (2x)$. Au reste, on pourroit remarquer à cette occasion une analogie analytique singulière entre les démonstrations du paralélogramme des forces, & celle du levier.

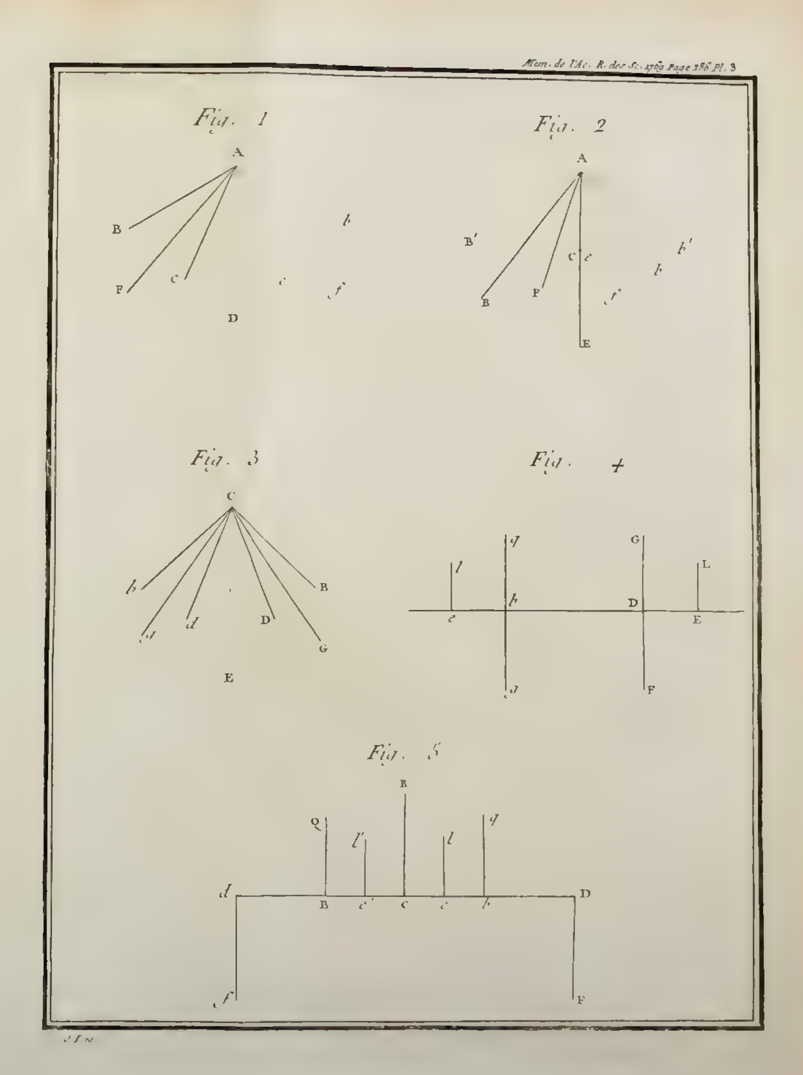
(5) Voici quel est ce Problème. On demande la fonction φx telle que $2 \varphi x = \varphi (x + z) + \varphi (x - z)$. Différentions cette équation

en faisant varier x, nous aurons $\frac{2 d\varphi x}{dx}$ ou $2 \Delta x = \Delta (x + z) + \Delta (x - z)$; différentions ensuite la même équation en ne faisant varier que z, nous aurons $\Delta (x + z) - \Delta (x - z) = 0$, d'où il est clair que $\Delta (x + z) = \Delta x$. Différentions cette dernière équation en faisant varier successivement x & z, on aura $\frac{d\Delta x}{dx}$ ou $\Gamma x = \Gamma (x + z)$; & $\Gamma (x + z) = 0$; donc $\Gamma x = 0$, donc Δx est constante; donc faisant $\Delta x = H$, on aura $H = \frac{d\varphi x}{dx}$; donc $\varphi x = Hx + B$.

Ce Problème a été résolu d'une autre manière, mais ce me semble, moins rigoureuse & moins simple, dans les *Mémoires de Turin, tome II*, à l'endroit cité; on y emploie les séries infinies, dont nous n'avons pas eu besoin.




Fig. 2
A
B'
h'
C
e
h
B
F
f
E
Fig. 4
q
G
l
L
h
D
e
E
d
F
Fig. 5
R
Q
q
l'
l
D
B
e'
C
e
b
F
B
D
G


Fig. 1
A
B
b
F
c
c
f
D
Fig. 2
A
B′
b′
C c
b
B
F
f
E
Fig. 3
C
b
B
d
d
D
G
E
Fig. 4
q
G
l
L
b
D
c
E
d
F
Fig. 5
R
Q
l′
l
q
d
B
c′
C
c
b
D
f
F

MÉMOIRE

SUR LA STRUCTURE ET SUR LES USAGES DE L'OURAQUE DANS L'HOMME.

Par M. PORTAL.

L'OURAQUE a été très-ſouvent l'objet des recherches des plus célèbres Anatomiſtes, mais ce ſujet, bien loin d'être épuiſé, offre encore tous les jours des ſingularités frappantes. Les différentes opinions qui retardent toujours les progrès des Sciences, lorſqu'elles ne ſont que l'objet d'une imagination prévenue, & purement ſpéculative, n'ont ſervi qu'à répandre de l'obſcurité ſur cet objet; & beaucoup de diſputes, dont la plupart ſont vaines, ont été les ſeuls fruits que nous ayons retirés des travaux des Anatomiſtes; au lieu de trouver dans les deſcriptions de l'Ouraque cette clarté, cette préciſion qui fait le mérite d'une expoſition anatomique, on n'y voit que confuſion & diverſités de ſentimens; les uns ont regardé l'Ouraque comme un vrai ligament; les autres ont cru y apercevoir une cavité, & l'ont comparé à un canal; ce ſentiment a été reçu avec d'autant plus de plaiſir qu'il paroiſſoit fondé ſur ce que l'on obſerve dans les animaux.

Les partiſans de ces deux différentes opinions ſont de part & d'autre très-nombreux & très-reſpectables; il me paroît inutile d'en faire ici l'énumération. Quand on n'eſt point d'accord ſur la ſtructure d'une partie, on ne peut guère l'être ſur ſes fonctions; c'eſt ce qui eſt arrivé; les Anatomiſtes ne s'accordent pas plus aujourd'hui ſur la ſtructure de l'Ouraque que ſur ſon uſage; ceux qui regardent, après Arantius, l'Ouraque comme une extenſion ligamenteuſe ne lui donnent d'autre uſage que celui de ſuſpendre & de retenir le fonds de la veſſie urinaire, à la manière d'une bride ou d'une corde qui ſert à fixer une partie. Ceux qui ſoutiennent avec Galien que l'Ouraque eſt creux, lui font faire l'office d'un tuyau de com-

munication entre la vessie & la membrane allantoïde, destinée; selon eux, à recevoir l'urine qui va de la vessie du fœtus dans cette membrane. Quelqu'ingénieux & vraisemblable que paroisse ce sentiment au premier coup d'œil, il ne peut s'appliquer qu'à l'Anatomie comparée; il tombe de lui-même, lorsque par le moyen de la dissection la plus délicate, & de l'injection la plus fine, on ne peut apercevoir aucune cavité dans l'Ouraque du fœtus humain. L'on peut regarder de même comme très-hypothétique, pour ne pas dire faux, ce que M. Hales a dit à ce sujet. Ce savant Académicien croyoit que l'Ouraque étoit un composé de vaisseaux spongieux, pareils à ceux dont Leeuwenhoek vouloit que les intestins fussent composés; c'est en admettant une pareille structure, dit-il, qu'on peut expliquer pourquoi l'urine passe de la vessie dans la membrane allantoïde du fœtus humain; & il n'est pas pour cela nécessaire, continue ce grand homme, que l'Ouraque soit proprement creux, l'urine se filtrant doucement à travers de ce tissu spongieux, plutôt qu'elle ne coule. Cette application ne sauroit se faire sur le fœtus humain, l'Ouraque ne présente rien qui nous annonce l'existence de ces tuyaux spongieux; & d'ailleurs la membrane allantoïde est un être de raison dans l'homme, & qui n'existe que chez les animaux. On peut donc regarder ce que M. Hales dit de l'Ouraque comme une pure dépense d'esprit. L'Anatomie comparée est ici en défaut, & on ne peut rien conclure pour le fœtus humain.

C'est cette application à l'homme qui a induit en erreur Galien & ses Sectateurs: cette erreur s'est ensuite fortifiée par des observations mal faites; les Anatomistes n'ont considéré l'Ouraque que dans certains âges de la vie, sans le comparer à celui du fœtus; ils ont donné une description générale, au lieu de n'en donner qu'une très-particulière; ils ont d'abord conclu pour le corps en santé, des observations qu'ils avoient faites sur les malades; méthode encore très-vicieuse, puisqu'ils ont confondu par-là l'ouvrage de la Nature avec les effets de la maladie.

Pour ne pas tomber dans les mêmes défauts, nous allons examiner, 1.° quelle est la structure de l'Ouraque dans tous les âges

âges de la vie; 2.° indiquer les changemens qui lui surviennent, & quelle est la cause de ces changemens; 3.° établir son usage; 4.° enfin démontrer comment la structure de l'ouraque peut être altérée par maladie.

L'ouraque, comme M. Senac l'a observé dans ses *Essais de Physique,* est composé dans le fœtus humain de cinq à six mois, de quatre filamens; le nombre est toujours le même, & il n'y a point d'irrégularité dans aucun sujet; les filets sont exactement réunis ensemble, & paroissent presque confondus depuis l'ombilic jusqu'à très-peu de distance de la vessie; là ces quatre filets se séparent l'un de l'autre, & il en résulte par cet écartement, une espèce de patte-d'oie, dont les branches filamenteuses se distribuent sur la vessie urinaire; de ces quatres filets, deux embrassent les parties latérales de la vessie, les deux autres se divisent, l'un occupe la partie antérieure, l'autre la partie postérieure; on peut suivre ces filets très-loin dans certains sujets; je les ai plusieurs fois suivis jusqu'au col de la vessie: ces filets ne contractent presque aucune adhérence vers le haut avec la tunique qui les recouvre, au lieu que vers le bas ils se trouvent unis avec les fibres musculaires de la vessie; l'endroit de réunion présente au premier coup d'œil la figure d'un véritable ligament; mais quand on se donne la peine de l'examiner de près, on voit clairement, dans quelques sujets, qu'il est composé de quatre filets; on peut même, avec un peu d'adresse & beaucoup de patience, les séparer, & réduire par-là ce ligament en ses propres élémens, s'il est permis de parler ainsi.

Tous ces filets, soit avant, soit après leurs divisions, sont enveloppés par le tissu cellulaire du péritoine, qui après avoir recouvert la face antérieure de la vessie, se prolonge sur eux, & forme une espèce de gaine, à laquelle on pourroit donner le nom de *tunique vaginale;* cette enveloppe est très-lâche, & l'espace dans lequel les filets sont logés, est assez considérable.

Par la description que je viens de faire de l'ouraque, tel qu'on l'observe à cet âge, on voit que sa figure est triangulaire, que la pointe de ce triangle répond à l'ombilic, & sa base au fond de la vessie, sans s'attacher précisément à la partie supérieure, comme l'a observé M. Lieutaud, mais cela n'a lieu que dans l'adulte;

car dans le fœtus l'ouraque s'implante à la sommité de la vessie.

Cet écartement des filets de l'ouraque lui donne la forme d'un entonnoir dont le tuyau seroit très-long, respectivement à son évasement ; il se fait quelquefois dans l'intérieur de la gaine cellulaire qui enveloppe l'ouraque, un épanchement d'eau qui la distend & augmente le volume total de cette partie ; je l'ai vu deux fois si considérable, que je croyois à la première inspection, que la vessie contenoit elle-même l'eau épanchée, & qu'elle s'étoit ainsi prolongée, je fus convaincu du contraire en ouvrant la gaine qui contenoit le liquide.

A la faveur de cette collection d'eau, j'ai pu observer quelle étoit la structure de la tunique charnue de la vessie dans l'endroit qui répond à la base de l'ouraque ; j'ai vu qu'il y avoit entre les fibres musculaires un ou deux espaces vides, suivant que la base de l'ouraque étoit plus ou moins étendue ; ces vides n'étoient remplis que par le tissu cellulaire, & provenoient de l'écartement des fibres musculaires ; j'ai depuis trouvé ces vides dans un grand nombre de jeunes sujets. M. Lieutaud a trouvé de pareils espaces vides dans tout le reste du réseau musculaire de la vessie, il n'a point indiqué ceux qui répondent à la base de l'ouraque : c'est à travers les espaces libres qui se trouvent à la base de l'ouraque que s'engage la membrane interne de la vessie, de la même manière qu'une hernie ventrale qui se fraie un passage à travers les muscles du bas-ventre ; elle ressemble encore beaucoup aux anévrismes formés par la tunique interne des artères, lorsqu'il y a solution de continuité dans les tuniques extérieures.

Il n'est pas rare de voir que la membrane interne de la vessie passe à travers les vides que laissent les trousseaux musculeux ; je l'ai vu quatre fois d'une manière très-distincte, trois fois sur des enfans, & la quatrième sur un homme de trente à trente-cinq ans : elle étoit même si considérable, qu'elle avoit le volume d'un œuf de poule ; lorsqu'on souffloit avec force dans la vessie, ou lorsqu'on injectoit de l'eau dans ce viscère ; la membrane interne de la vessie étoit extraordinairement rétrécie dans son passage à travers les trousseaux musculeux : cette production membraneuse soulevoit la membrane externe de la vessie, &

l'écartoit de l'ouraque qu'elle enveloppe; on peut appliquer ici l'Obſervation que M. Litire rapporte dans les Mémoires de cette Académie, *année 1707.* M. Littre obſerva dans le cadavre d'un jeune homme d'environ trente ans, une dilatation de l'Ouraque juſqu'à très-peu de diſtance de l'ombilic; c'étoit vraiſemblablement une production de la membrane interne de la veſſie, telle que nous l'avons obſervée; car comment comprendre que l'ouraque qui forme à l'âge de trente ans un corps très-ſolide, & qui dans l'enfance n'eſt compoſé que de quatre filets, puiſſe acquérir la figure d'un long & large canal; c'eſt certainement hors de toute vraiſemblance & de toute probabilité: la membrane interne de la veſſie peut ſe faire jour à travers preſque tous les points de la ſurface de ce viſcère. M. Lieutaud en a rapporté pluſieurs exemples; j'ai vu plus d'une fois des veſſies qui, au premier aſpect, paroiſſoient doubles, quoique dans le fond il n'y eût qu'une ſeule veſſie, c'étoit la membrane interne qui étoit ſortie de ſa place, & qui formoit une poche: ces poches contiennent ſouvent des pierres; les Latins les ont connues ſous le nom de *lapides tunicati.*

Si l'on examine l'ouraque d'un enfant de deux ou trois mois, on trouve les filets ligamenteux réunis dans un plus long eſpace, ſoit en haut entre eux, ſoit en bas avec les fibres muſculaires de la veſſie; il s'en faut bien qu'on les ſépare à cet âge avec autant de facilité qu'on pourroit le faire dans un âge moins avancé, il faut beaucoup plus d'adreſſe pour réuſſir, ſouvent même ne peut-on pas en venir à bout, les filets ſont un peu plus gros, & paroiſſent très-élaſtiques, & quelque recherche que l'on faſſe, on les trouve ſans cavité, la tunique qui les recouvre, leur eſt intimement unie, ce qui donne lieu à un changement dans la figure de l'ouraque en rendant ſa baſe moins large; on trouve dans les ſujets de cet âge beaucoup moins fréquemment de l'eau épanchée dans l'intérieur de ſa cavité, cependant j'ai eu occaſion de voir deux fois ce cas.

Les changemens qu'éprouve l'ouraque dans un enfant de huit à neuf mois, ſe réduiſent à une coalition plus exacte des filets entre eux, à une plus parfaite union de ces filets avec les trouſſeaux

musculeux de la vessie & avec leur tunique vaginale : cette coalition augmente de plus en plus depuis l'enfance jusqu'à la vieillesse, ce qui fait diminuer de beaucoup le volume de l'ouraque : cette diminution vient même quelquefois à un tel point, qu'on n'en trouve plus de traces dans la vieillesse ; dans certains sujets cela arrive plus tôt que dans d'autres : j'ai fait des recherches sur des cadavres de presque tous les âges, & je me suis pleinement convaincu que le volume de cette partie étoit toujours d'autant plus considérable que le sujet étoit plus proche du temps de sa naissance ; cette dernière remarque prouve que l'ouraque dans le fœtus est destiné à des usages particuliers, & qu'il ne remplit plus aucune fonction après que l'enfant est sorti du sein de sa mère.

L'ouraque ne me paroît destiné dans le fœtus qu'à soutenir la vessie élevée, afin de la rendre plus fixe dans sa situation : il étoit nécessaire, vu le peu de capacité qu'a le bassin dans le fœtus, que ce viscère fût placé au-dehors de sa cavité pour y être logé commodément ; l'Auteur de la Nature y a pourvu en la suspendant par le moyen d'un ligament, auquel il a plu aux Anatomistes de donner le nom d'*Ouraque* ou *Tuyau urinaire*, nom que cette partie ne mérite cependant point dans l'homme, n'étant point destinée à donner passage à l'urine ; cet expédient que la Nature a employé, est bien propre à remplir son but qui a été de diminuer la capacité du bassin du fœtus, peut-être afin de rendre l'accouchement plus aisé : pour cet effet, elle a placé ce viscère hors de sa cavité ; il falloit en même temps le fixer, & l'empêcher de ballotter, ce qui seroit nécessairement arrivé, si la vessie n'eût été suspendue & fixée par cette corde ligamenteuse, mais cette situation de la vessie doit changer par une suite nécessaire d'un développement du bassin : lorsque la cavité du bassin s'agrandit, la vessie se trouve pour lors sollicitée à descendre par son propre poids. Dans le fœtus, la vessie étoit soutenue en partie par l'*os sacrum*, ce qui n'a pas lieu dans ce cas-ci, car l'*os sacrum* se porte en arrière en s'éloignant des os pubis à proportion que le bassin acquiert une plus grande étendue ; c'est même un des principaux moyens dont la Nature se sert pour agrandir cette cavité ; de plus, le poids de la vessie se trouve de

beaucoup augmenté, ſi on le compare avec ce qu'il étoit dans le fœtus, ce qui eſt dû à l'urine qui s'y ramaſſe.

Les inteſtins qui ſe précipitent dans le baſſin, concourent encore; ſelon moi, à diſtendre l'ouraque, à en rapprocher les filamens qui ſe collent par la ſuite des temps; de ſorte que de quatre filets ligamenteux qui étoient primitivement ſéparés, il n'en réſulte plus qu'un ſeul ligament qu'il eſt impoſſible de diviſer en ſes parties primitives, tant l'union de ces filets ligamenteux eſt intime; certaines parties s'étendent, ſe développent; d'autres ſe retréciſſent, ſe rapprochent ſuivant l'intention de la Nature, & ſouvent aux dépens les unes des autres; c'eſt au moyen de cette action mutuelle & de ce mécaniſme univerſel que les parties prennent leur forme, & ſe moulent réciproquement; c'eſt par cette action que la tunique cellulaire s'applique de plus en plus à la ſurface extérieure des filets ligamenteux; enfin c'eſt par ce même mécaniſme que l'on peut expliquer tous les changemens auxquels l'ouraque eſt naturellement ſujet.

Il ne me reſte pour terminer ce Mémoire que d'expoſer comment il a pu ſe faire que des malades aient rendu leurs urines par l'ombilic.

Pour comprendre la poſſibilité de ce fait, il faut ſe rappeler 1.° qu'il y a quelquefois dans le muſcle de la veſſie, un ou deux vides qui répondent à la baſe de l'ouraque; 2.° que les vides peuvent donner lieu à cette eſpèce de hernie dont nous avons parlé: ces faits confirmés par l'Anatomie & par l'obſervation, une fois admis, on peut aiſément rendre raiſon de cet écoulement contre nature; en effet, cette tumeur qu'on peut appeler *hernie de la tunique interne de la veſſie,* ne pourra avoir lieu, ſans que les filamens ne ſoient ſéparés de nouveau, ou du moins ſans que la tunique vaginale ne ſoit ſéparée des filets qui compoſent l'ouraque, & cette ſeule ſéparation ſuffit pour donner lieu à la ſortie des urines par l'ombilic.

On peut mettre au rang des cauſes qui produiſent cette hernie tout ce qui s'oppoſe à la ſortie de l'urine par les voies naturelles, ſoit que ſon écoulement ſoit totalement ſupprimé ou en partie, l'urine ſe ramaſſe pour lors dans la veſſie, diſtend les parois en

appliquant fortement la membrane interne contre la portion musculaire qui la recouvre; mais s'il y a quelque point dans cette portion musculaire qui s'oppose moins à la pression latérale: cette membrane pressée par l'urine qu'elle contient, poussera ce point de dedans en dehors avec plus de facilité, se fera jour à travers, & cela suffira pour qu'il se forme une hernie de la tunique interne. A cette cause très-suffisante pour produire cet accident, on peut encore ajouter les contractions que la tunique musculaire doit nécessairement faire pour se délivrer des urines qui l'irritent en la distendant; c'est ainsi que je conçois que la membrane interne de la vessie peut passer à travers le vide de la tunique musculaire que j'ai observé à la base de l'ouraque; il se formera là une espèce de sac, dans lequel les urines se porteront nécessairement, & si les causes qui auront produit la hernie agissent plus long-temps & avec trop de force, l'urine après avoir poussé la membrane interne hors de la vessie, après l'avoir violemment distendue la rompra enfin, l'urine s'épanchera aussi-tôt entre le tissu cellulaire qui enveloppe les filets ligamenteux de l'ouraque, les séparera; & si le sujet n'est pas d'un âge trop avancé, cette urine, ainsi épanchée, donnera à la tunique la forme d'un véritable canal: en le distendant également dans tous les sens, ce canal sera forcé par un abord continuel des urines, de s'ouvrir & de se vider tôt ou tard par l'ombilic *(a)*; l'urine trouve moins difficulté à se frayer une route nouvelle, qu'à passer par son ancienne voie: cette hernie se forme d'autant plus aisément à la base de la vessie, que les trousseaux de fibres musculeuses, se trouvent dans cet endroit plus éloignés les uns des autres que par-tout ailleurs, & même que la membrane extérieure de la vessie paroît beaucoup moins adhérente dans ce même endroit que dans tout le reste de ce viscère: tout favorise donc la formation de cette hernie vers le fond de ce viscère, & conséquemment l'issue de l'urine par l'ombilic.

(a) C'est à peu près de cette manière que plusieurs dépôts pérulens ou lymphatiques du foie se sont vidés par l'ombilic: consultez à ce sujet l'ouvrage de M. Morgagni, *de Sed. & Caus. Morb. Epist. 39.*

OBSERVATION sur un écoulement d'urine par l'ombilic.

M. Barthélemi Roſſignol, Chirurgien de Cahuzac, bourg au diocèſe d'Alby, âgé de quatre-vingt-douze ans, après une vie laborieuſe, ſur-tout après avoir beaucoup voyagé à cheval, reſſentit à la verge, des douleurs extrêmement vives qu'il rapportoit à différens endroits ſucceſſivement, au gland ou au col de la veſſie; les douleurs ceſsèrent d'elles-mêmes quelques jours après, cependant l'urine qui juſqu'ici avoit eu un libre cours, diminuoit chaque jour en quantité: on employoit en vain les diurétiques les plus forts, & M. Ruſſel, Chirurgien ordinaire du malade, voyant le peu d'efficacité des médicamens adminiſtrés, alloit recourir aux bougies, lorſque le malade ſe plaignit que ſon ventre étoit mouillé; on l'examina, & on vit une liqueur claire tranſparente, on ne douta point que l'urine ne ſe fût frayé une nouvelle route, on ſuſpendit l'introduction de la bougie, l'urine coula pendant dix jours par l'ombilic & par la verge en égales quantités: celle qui venoit par l'ombilic, augmentoit par degrés aux dépens de la quantité fournie par la voie ordinaire, qui fut enfin totalement ſupprimée le quinzième jour; le malade vécut ſix mois urinant uniquement par l'ombilic, il ne reſſentoit plus aucune douleur, & l'on doit attribuer ſa mort plutôt à ſon extrême vieilleſſe qu'à l'incommodité qu'il avoit ſoufferte.

J'ai été témoin d'un autre fait à peu près ſemblable, un homme de quarante-cinq ans tomba de fort haut ſur ſon ventre, l'urine coula par l'ombilic bientôt après la chute, & le ſujet étant mort peu de temps après, je fis l'ouverture du cadavre, je trouvai un conduit qui s'étendoit depuis l'ombilic juſqu'à la veſſie; ce conduit avoit une figure conique, ſon diamètre vers l'ombilic étoit d'un tiers de pouce & d'un pouce & demi vers la veſſie, ſa longueur étoit d'environ ſix pouces, l'épaiſſeur de ſes parois étoit inégale; la partie antérieure avoit en épaiſſeur ſur la partie poſtérieure plus de quatre lignes de différence.

Je fis à ce canal une ſection perpendiculaire à ſa baſe, & je diſſéquai enſuite ſcrupuleuſement ſes parois; l'antérieure étoit

composée de deux membranes & d'une espèce de ligament qui occupoit le milieu : la membrane interne du canal étoit une continuation de la membrane interne de la vessie; elle adhéroit fortement autour de l'anneau musculeux qui l'embrassoit du côté de la vessie, elle se terminoit à trois travers de doigt de l'ombilic; après avoir enlevé cette membrane, l'ouraque parut à découvert, sa structure étoit telle qu'on l'observe ordinairement à cet âge, c'est-à-dire qu'il étoit raccorni, & formant une espèce de ligament triangulaire ; la membrane externe se prolongeoit sur la vessie, & on voyoit que ce n'étoit que la fausse lame du péritoine.

La vessie étoit très-raccornie, son volume n'excédoit pas la grosseur d'une petite pomme, à peine auroit-elle contenu un demi-verre de liqueur, les membranes étoient fort épaisses, le col étoit fort dur, froncé, raccorni, semblable à un parchemin à demi-brûlé, & l'ouverture étoit entièrement fermée.

On peut rendre compte de cette observation par la structure même de cette partie dont j'ai donné l'exposition anatomique; je n'entrerai pas par conséquent dans de plus longs détails : mon objet étoit de donner la description de l'Ouraque, & je crois y avoir réussi en rapportant fidèlement ce que j'ai vu dans un grand nombre de sujets morts dans des âges différens de différentes maladies, & principalement dans ceux dont les fibres étoient relâchées par quelqu'infiltration.



MÉMOIRE

NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES
POUR
CALCULER LES ÉCLIPSES DE SOLEIL, LES OCCULTATIONS DES ÉTOILES FIXES ET DES PLANÈTES PAR LA LUNE;

Et en général pour réduire les Observations de cet Astre, faites à la surface de la Terre, au lieu vu du centre.

SEPTIÉME MÉMOIRE,

Dans lequel on applique à la solution de plusieurs Problèmes astronomiques, les Équations démontrées dans les Mémoires précédens.

Par M. DU SÉJOUR.

POUR l'intelligence de ce qui suit, le Lecteur se rappellera

(1.) Que dans toutes mes équations,

r exprime le demi-petit axe de la Terre, que je suppose d'ailleurs égal au rayon des Tables.

ρ le demi-grand axe.

ϖ l'arc de 15^d rectifié.

t le sinus / τ le cosinus { de l'inclinaison de l'orbite corrigée.

Cette inclinaison se détermine par l'équation suivante;

Tangente de l'inclinaison de l'orbite corrigée =

$$\frac{r^2}{206265''} \times \frac{\text{mouv. hor. de la ☾ en latit. évalué en secondes de degré}}{\text{sin. (mouv. hor. de la ☾ en longit. — mouv. hor. du ☉)}};$$

ξ le cosinus de la latitude de la Lune à l'instant de la conjonction, vue du centre de la Terre.

θ le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant pour lequel on calcule.

Année 1764.

s le ſinus, c le coſinus, de la latitude corrigée de l'Obſervateur *(2.d Mém. §. 20, Table I)*, c'eſt-à-dire d'un angle qu'il faut ſubſtituer à la latitude vraie, & qui ſe conclut de cette latitude.

g le ſinus, h le coſinus, de l'angle horaire du Soleil.

p le ſinus, q le coſinus, de la déclinaiſon du Soleil à l'inſtant pour lequel on calcule.

Ω le coſinus de l'obliquité de l'écliptique.

$$\chi = \sqrt{(q^2 - \Omega^2)}.$$

ω le ſinus, t la tangente, φ le coſinus, de l'angle de l'orbite relative de la Lune avec le fil parallèle ou équatorial * de l'Obſervateur ſuppoſé au centre de la Terre. Cet angle ſe détermine par l'équation ſuivante,

$$\omega = \frac{\theta\,\Omega}{q} + \frac{\psi\,\chi}{q}.$$

π le ſinus de la parallaxe horizontale polaire de la Lune à l'inſtant pour lequel on calcule.

π' le ſinus de la parallaxe horizontale du Soleil.

$$\zeta = r - \frac{\pi'\,\xi}{\pi}.$$

$$l = r \times \frac{\text{ſin. de la lat. de la ☾ à l'inſt. de la conj. vue du centre de la Terre}}{\text{ſin. de la parall. horiz. polaire de la ☾ à l'inſtant de la conjonction}}$$

$$\gamma = \xi \times \frac{\text{ſin. verſe (mouv. hor. de la ☾ en longit. — mouv. horaire du ☉)}}{\text{ſin. de la parall. horiz. polaire de la ☾ à l'inſtant de la conjonction}}$$

$$\varkappa = \frac{r\xi}{\psi} \times \frac{\text{ſin. (mouv. horaire de la ☾ en longit. — mouv. horaire du ☉)}}{\text{ſin. de la parall. horiz. polaire de la ☾ à l'inſtant de la conjonction}}$$

(2.) Que dans toutes les équations, j'ai ſuppoſé que les quantités précédentes étoient poſitives; qu'il pouvoit arriver cependant que quelques-unes de ces quantités devinſſent négatives.

(3.) Que dans toutes les Éclipſes de Soleil, les quantités r, ϱ, v, ψ, ξ, c, q, Ω, φ, π, π', ζ, γ, $\varkappa$, étoient eſſentiellement poſitives; que par conſéquent le changement de leurs valeurs abſolues ne pouvoit faire varier le ſigne des termes dans leſquels elles entroient.

(4.) Qu'il n'en étoit pas de même des quantités θ, b, s, g, h, p, χ, t, ω, l.

* Dans les premiers Mémoires, j'avois appelé *fil horaire* ce que l'on nomme ordinairement *fil parallèle* ou *équatorial;* je reprends la définition adoptée par les Aſtronomes.

Que la quantité *l* devenoit négative, lorsque la latitude de la Lune, vue du centre de la Terre, étoit australe à l'instant de la conjonction.

Que la quantité θ devenoit négative, lorsque l'Éclipse arrivoit dans le nœud descendant de la Lune.

Que *b* devenoit négatif, lorsque l'instant pour lequel on calcule précédoit l'instant de la conjonction.

Que *s* devenoit négative, lorsque la latitude de l'Observateur étoit australe.

Que *g* devenoit négatif, lorsque l'heure donnée étoit entre minuit & midi.

Que *h* devenoit négative, lorsque l'heure étoit entre six heures du soir & six heures du matin.

Que *p* devenoit négatif, lorsque la déclinaison du Soleil étoit australe.

Que χ devenoit négatif, lorsque le Soleil étoit dans les signes descendans, c'est-à-dire depuis le solstice d'été jusqu'au solstice d'hiver.

Que le signe de ω, & de *t* qui en est une conséquence, étoit déterminé par la formule du §. 1.er

(5.) J'ai supposé dans ce Mémoire que pour l'Éclipse du 1.er Avril 1764, on avoit les Élémens suivans.

Heure de la conjonction à Paris,	10h	31′	23″ du matin,
Dans	12d	9′	56″ du Bélier.
Mouvement horaire du Soleil	0.	2.	27,7
Mouvement horaire de la Lune en longitude.	0.	29.	39
Latitude de la Lune à l'instant de la conjonction.	0.	39.	36 boréale.
Mouvement horaire de la Lune en latitude.	0.	2.	44 {Éclipse dans le nœud ascendant.
Parallaxe horizontale polaire de la Lune	0.	54.	1,5
Obliquité de l'Écliptique	23.	28.	21
Déclinaison du Soleil à l'instant de la conjonction.	4.	48.	50 boréale.
Parallaxe horizontale du Soleil	0.	0.	10
Demi-diamètre du Soleil	0.	15.	59,5

$$\text{sinus (demi-diam. horizont. de la ☾)} = \frac{900}{3293} \times \text{sinus (parallaxe horizont. polaire)}$$

D'où j'ai conclu

$r = + 100000.$			Logarithme...	$r = 10,0000000.$
$\rho = + 100565.$				$\rho = 10,0024467.$
$v = +$ arc de 15^d rectifié.				$v = 9,4179686.$
$\theta = +$ sinus.	$5^d\ 44'\ 26''$			$\theta = 9,0001044.$
$\psi = +$ cosin.	5. 44. 26.			$\psi = 9,9978165.$
$\xi = +$ cosin.	0. 39. 36.			$\xi = 9,9999711.$
$p = +$ sinus.	4. 48. 50.			$p = 8,9238624.$
$q = +$ cosin.	4. 48. 50.			$q = 9,9984653.$
$\Omega = +$ cosin.	23. 28. 21.			$\Omega = 9,9624884.$
$\chi = + 38936.$				$\chi = 9,5903565.$
$\omega = +$ sinus.	28. 44. 30.			$\omega = 9,6820198.$
$\varphi = +$ cosin.	28. 44. 30.			$\varphi = 9,9428989.$
$t = +$ tang.	28. 44. 30.			$t = 9,7391209.$
$\pi = +$ sinus.	0. 54. 1,5			$\pi = 8,1963030.$
$\pi' = +$ sinus.	0. 0. 10.			$\pi' = 5,6855749.$
$\zeta = + 99692.$				$\zeta = 9,9986603.$

Logar. { sin. de la latitude de la Lune à l'instant de la conjonction.... = 8,0614117.
sin. verse (mouv. hor. de la ☾ en long. — mouv. hor. du ☉) = 5,4972284.
sin. (mouv. hor. de la ☾ en longit. — mouv. hor. du ☉) = 7,8981331.

$l = + 73301.$	Logarithme...	$l = 9,8651087.$
$\gamma = + 200.$		$\gamma = 7,3008965.$
$n = + 50581.$		$n = 9,7039847.$
$\frac{nr}{\zeta} = + 50737.$		$\frac{nr}{\zeta} = 9,7053244.$

Logarithme $3600'' = 3,5563025.$

(6.) Je suppose également que le Lecteur a présent à l'esprit
Année 1765. ce que j'ai dit *(§. 28 du 3.e Mém.)* sur la relation entre le nombre de chiffres dont chaque quantité qui se trouve dans les formules, doit être composée, & la caractéristique de son logarithme.

Qu'il ſe rappelle l'exception relative au nombre de ſecondes, ſoit d'heure, ſoit de degré.

Qu'il n'a pas oublié la diviſion du diſque du Soleil en quatre angles égaux, établie par l'*article III du même Mémoire*, & la manière de déterminer dans lequel de ces angles l'Obſervateur rapporte le centre de la Lune. *Année 1765.*

Qu'il a préſent à la mémoire la manière de diſtinguer chacun des termes d'une équation, en le ſurmontant d'un chiffre & d'une lettre ; d'une lettre, pour ſignifier la quantité dans l'expreſſion de laquelle ſe trouve le terme en queſtion; d'un chiffre pour indiquer le rang de ce terme.

Qu'il ſe rappelle la méthode détaillée dans l'*article VI du troiſième Mémoire*, pour convertir le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis la conjonction, en expreſſion de la longitude du lieu.

(7.) Je ſuppoſe enfin que le Lecteur n'a pas oublié que par la latitude d'un lieu, j'entends ſa latitude corrigée. Cette latitude eſt réductible à la latitude vraie; ou réciproquement, la latitude vraie eſt réductible à la latitude corrigée, par la première Table du *§. 20* de mon ſecond Mémoire. *Année 1764.*

Ces ſuppoſitions admiſes, je paſſe à la ſolution de pluſieurs Problèmes.

ARTICLE PREMIER.

Des Courbes d'illumination.

SECTION PREMIÈRE.

De la queſtion en général.

(8.) On connoît en Aſtronomie cette eſpèce de courbes irrégulières, lieux géométriques de tous les points de notre globe qui voient le commencement ou la fin de l'éclipſe au lever & au coucher du Soleil, & que l'on nomme indiſtinctement

courbes d'illumination, courbes d'entrée & de ſortie au lever & au coucher du Soleil: ces courbes préſentent un objet de curioſité intéreſſant. Suppoſons, par exemple, qu'il ſoit queſtion de la *courbe d'entrée* au coucher du Soleil; tous les lieux ſitués à l'eſt de cette courbe ne verront pas le phénomène, le Soleil ſera couché pour eux lorſqu'il arrivera; tous les lieux ſitués à l'oueſt verront le phénomène d'autant plus long-temps avant le coucher du Soleil qu'ils ſeront plus éloignés de la courbe: cette explication ſuffit pour faire ſentir combien ces courbes ſont importantes à connoître. Pluſieurs Aſtronomes ſe ſont occupés de leur deſcription mécanique; aucun d'eux ne s'eſt propoſé d'en donner l'équation exacte & rigoureuſe. L'irrégularité apparente de leur contours, la diverſité de leurs formes qui reſſemblent tantôt à un *huit de chiffre*, tantôt à deux eſpèces d'*ellipſes conjuguées*, tantôt à deux *ovales* qui ſe coupent, quelquefois même à un ſeul *ellipſoïde*, pouvoient faire douter avec raiſon qu'elles fuſſent ſuſceptibles d'une analyſe ſimple. Je vais donner la ſolution rigoureuſe du Problème, quelle que ſoit la figure de la Terre, & la diſtance du centre de notre globe à la Planète qui éclipſe le Soleil. On peut dire ſous ce point de vue que le Problème n'a pas encore été réſolu.

Les courbes d'*illumination*, proprement dites, ne ſont qu'un cas particulier du Problème plus général, par lequel on détermine quels lieux de la Terre obſervent une diſtance quelconque des centres au lever & au coucher du Soleil. Ce dernier Problème n'eſt lui-même qu'un cas particulier de la détermination des lieux de la Terre qui voient une certaine diſtance quelconque, lorſque l'on compte dans ces lieux reſpectifs une certaine heure donnée.

La queſtion ſe complique, ſi au lieu de conſidérer ſimplement une diſtance aſſignée des centres, on ſe propoſe de réſoudre, par exemple, le cas du contact des limbes du Soleil & de la Lune, ou en général celui d'une phaſe quelconque. Il faut alors avoir égard à la variation du diamètre de la Lune, relativement à ſa hauteur ſur les différens horizons. Il eſt donc néceſſaire de conſidérer ce nouvel élément. On peut même ſuppoſer encore que les rayons s'infléchiſſent en paſſant près du limbe de la Lune. Telles ſont les difficultés qu'il faut embraſſer ſi l'on veut réſoudre

le Problème dans toute sa généralité. Je commencerai par le cas général, je descendrai ensuite aux cas particuliers.

SECTION SECONDE.

Des Courbes d'illumination prises dans un sens étendu.

(9.) Je me propose, dans cette section, de résoudre le Problème des *courbes d'illumination*, prises dans la signification la plus étendue; je vais donc déterminer quels lieux de la Terre observent une phase quelconque lorsque l'on compte dans ces lieux respectifs une même heure quelconque assignée.

Soit

sinus (demi-diam. horiz. de la ☾) $= \frac{a'}{b'}$ sinus (parall. horiz. polaire).

$\partial =$ cosinus (somme du demi-diam. du ☉ & du demi-diam. horiz. de la ☾).

$\partial' =$ cosinus (differ. du demi-diam. du ☉ & du demi-diam. horiz. de la ☾).

$\sigma =$ sinus, $\tau =$ cosinus } demi-diamètre du Soleil.

$\tau' =$ cosinus (demi-diamètre horizontal de la Lune).

$\delta = \frac{a'}{b'} \times \frac{\pi}{r} \times$ cosinus (parallaxe horizontale polaire).

$E = \xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho qh\pi}{r^4}$.

J'ai fait voir (*V.e Mémoire, §. 46*) que l'on a en général Année 1767.

Lors du contact extérieur des limbes du Soleil & de la Lune.

Tangente (distance des centres) $= \frac{\sigma\tau'}{\partial} + \frac{\delta\tau}{E}$.

Lors du contact intérieur des limbes du Soleil & de la Lune.

Tangente (distance des centres) $= \frac{\sigma\tau'}{\partial'} - \frac{\delta\tau}{E}$.

Si l'on veut faire entrer dans la solution un nouvel élément qui dépende d'une inflexion de lumière,

Soit ϑ la quantité dont on suppose infléchis les rayons solaires qui rasent le limbe de la Lune;

On fera

$\sigma =$ sinus (demi-diamètre du Soleil $\mp \vartheta$),

suivant que l'on voudra calculer un contact extérieur ou intérieur des limbes.

Année 1767. (10.) J'ai démontré pareillement (*Ve Mémoire, §. 49 & 50*) que les équations qui ont lieu pour les contacts, résolvent le Problème pour une phase quelconque. Il est évident en effet, ainsi que je l'ai fait voir, que l'on peut considérer, par exemple, une éclipse de 3 doigts, comme le contact extérieur du limbe de la Lune, & du limbe d'un Soleil dont le rayon seroit égal à la moitié du rayon du disque solaire.

Une éclipse de 6 doigts, comme le contact extérieur du limbe de la Lune & du limbe d'un Soleil dont le rayon seroit nul.

Une Éclipse de 9 doigts, comme le contact intérieur du limbe de la Lune & du limbe d'un Soleil dont le rayon seroit égal à la moitié du rayon du disque solaire.

(11.) Soit enfin

λ la tangente de la distance apparente des centres.

$$A = \overset{(A\,1)}{\frac{\psi l}{\zeta}} - \overset{(A\,2)}{\frac{qs\varphi}{r^2}} + \overset{(A\,3)}{\frac{cg\rho\omega}{r^3}} + \overset{(A\,4)}{\frac{chp\rho\varphi}{r^4}};$$

$$F = \overset{(F\,1)}{\frac{\theta l}{\zeta}} - \overset{(F\,2)}{\frac{qs\omega}{r^2}} - \overset{(F\,3)}{\frac{cg\rho\varphi}{r^3}} + \overset{(F\,4)}{\frac{chp\rho\omega}{r^4}};$$

$$E = \overset{(E\,1)}{\xi} - \overset{(E\,2)}{\frac{ps\pi}{r^2}} - \overset{(E\,3)}{\frac{c\rho qh\pi}{r^4}}.$$

Année 1765. Il suit du *§. 1.er du troisième Mémoire*, que

$$E^2 r^2 \lambda^2 - A^2 \pi^2 \zeta^2 - \pi^2 \zeta^2 \times \left(F + \frac{nr}{3600''\zeta} \times b\right)^2 = 0.$$

Donc si l'on suppose

Contacts intérieurs.

$$L = \overset{(L\,1)}{\frac{\sigma\tau' r E}{\pi\zeta\partial'}} - \overset{(L\,2)}{\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}}.$$

Contacts extérieurs.

$$L = \overset{(L\,1)}{\frac{\sigma\tau' r E}{\pi\zeta\partial}} + \overset{(L\,2)}{\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}};$$

Lorsque la distance des centres est donnée,

$$L = \frac{r\lambda E}{\pi\zeta};$$

On a pour déterminer à quel instant physique un lieu situé sous un parallèle donné, observe une phase quelconque, lorsque l'on compte dans ce lieu une certaine heure assignée,

$$b = -\frac{3600''\zeta}{nr} \times F - \frac{3600''\zeta}{nr} \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}. \quad (b\,1)\ (b\,2)$$

$$b = -\frac{3600''\zeta}{nr} \times F + \frac{3600''\zeta}{nr} \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}. \quad (b1)\ (b2)$$

(12.) Des deux valeurs de b du §. *précédent*, la plus négative ou la moins positive appartient au lieu qui voit la phase assignée avant le passage apparent du centre de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative menée par le centre du Soleil. L'autre valeur désigne le lieu qui voit la phase après le passage de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative.

(13.) Rien de plus simple que la détermination de la longitude du lieu qui observe le phénomène; en effet, puisque l'heure que l'on compte dans le lieu est donnée, & que nous venons de déterminer le nombre de secondes horaires, écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène, on aura tout de suite la longitude du lieu par la méthode de l'*article VI du III.e Mémoire.* *Année 1765.*

TABLE des quantités constantes relatives à la présente recherche pour l'Éclipse du 1.er Avril 1764.

A.

$$\frac{\psi l}{\zeta} = 73159. \quad (A_1)$$

$$\text{Log.}\begin{cases} \dfrac{q\varphi}{r^2} = -\ 0{,}0586358. & (A_2) \\ \dfrac{\rho\omega}{r^3} = -\ 10{,}3155335. & (A_3) \\ \dfrac{p\rho\varphi}{r^4} = -\ 11{,}1307920. & (A_4) \end{cases}$$

$$\text{Log.}\ \frac{3600''\zeta}{nr} = -\ 6{,}1490219.$$

F.

$$\frac{\theta l}{\zeta} = 7354. \quad (F_1)$$

$$\text{Log.}\begin{cases} \dfrac{q\omega}{r^2} = -\ 0{,}3195149. & (F_2) \\ \dfrac{\rho\varphi}{r^3} = -\ 10{,}0546544. & (F_3) \\ \dfrac{p\rho\omega}{r^4} = -\ 11{,}3916711. & (F_4) \end{cases}$$

$$\text{Log.}\begin{cases} \dfrac{\sigma\tau' r}{\pi\zeta\delta'} = -\ 0{,}5253170. & (L_1) \\ \dfrac{\sigma\tau' r}{\pi\zeta\delta} = -\ 0{,}5293732. & \end{cases}$$

E.

$$\xi = 99993. \quad (E_1)$$

$$\text{Log.}\begin{cases} \dfrac{p\pi}{r^2} = -\ 2{,}8798346. & (E_2) \\ \dfrac{\rho q\pi}{r^4} = -\ 11{,}8027850. & (E_3) \end{cases}$$

$$\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} = 27415. \quad (L_2)$$

EXEMPLE.

(14.) *Lors de l'Éclipse du 1.er Avril 1764, on demande quels lieux situés sous le parallèle boréal de 51d 31' ont observé un contact extérieur des limbes à 9h 4' 33" du matin.*

Année 1764. SOLUTION. Puisque la latitude du parallèle est de 51d 31' boréale, je conclus (*second Mémoire, table 1.re*) que la latitude corrigée est de 51d 21' 33"; que par conséquent

$$\left.\begin{aligned} s &= +\ \text{sinus}\ 51^d\ 21'\ 33'' \\ c &= +\ \text{cosin.}\ 51.\ 21.\ 33 \end{aligned}\right\}\ \text{Logarithme}\left\{\begin{aligned} s &= 9{,}8926912. \\ c &= 9{,}7954889. \end{aligned}\right.$$

L'angle horaire du Soleil est de 43d 51' 45", & l'heure de l'observation est entre six heures du matin & midi. Donc

$$\left.\begin{aligned} g &= -\ \text{sinus}\ 43^d\ 51'\ 45'' \\ h &= +\ \text{cosin.}\ 43.\ 51.\ 45 \end{aligned}\right\}\ \text{Logarithme}\left\{\begin{aligned} g &= 9{,}8406895. \\ h &= 9{,}8579381. \\ cg &= 19{,}6361784. \\ ch &= 19{,}6534270. \end{aligned}\right.$$

TYPE du Calcul.

$$A = +(A\,1) - (A\,2) - (A\,3) + (A\,4) \ldots (A\,1) = 73159.$$

(A 2)	(A 3)	(A 4)
9,8926912 ... log. s.	19,6361784 ... log. cg.	19,6534270 ... log. ch.
−0,0586358.	−10,3155335.	−11,1307920.
9,8340554 ... log. 68243.	9,3206449 ... log. 20924.	8,5226350 ... log. 33313.

$$A = -\ 12677.$$

$$F = +(F\,1) - (F\,2) + (F\,3) + (F\,4) \ldots (F\,1) = 7354.$$

(F 2)	(F 3)	(F 4)
9,8926912 ... log. s.	19,6361784 ... log. cg.	19,6534270 ... log. ch.
−0,3195149.	−10,0546544.	−11,3916711.
9,5731763 ... log. 37426.	9,5815240 ... log. 38153.	8,2617559 ... log. 1827.

$$F = -\ 9908 \ldots\ \text{log.}\ F = 8{,}9959860.$$

$E = + (E\,1) - (E\,2) - (E\,3) \ldots (E\,1) = 99993.$

(E 2)
9,8926912 ... log. *s*.
−2,8798346.
7,0128566 ... log. 103.

(E 3)
19,6534270 ... log. *ch*.
−11,8027850.
7,8506420 ... log. 709.

$E = + 99181 \ldots \text{log. } E = 9{,}9964285.$

$L = + (L\,1) + (L\,2) \ldots L\,2 = 27415.$

(L 1)
+ 9,9964285 ... log. *E*.
− 0,5293732 ... log. $\frac{\sigma\tau' r}{\pi\zeta\partial}$.
9,4670553 ... log. 29313.

$L = + 56728.$

$L + A = + 44051.$
$L - A = + 69405.$
Logarithme
= 9,6439558.
= 9,8413908.
19,4853466.
2.
9,7426733 ... log. $\surd(L^2 - A^2)$.

$b = - (b\,1) \mp (b\,2)$

(b 1)
+ 8,9959860 ... log. *F*.
− 6,1490219 ... log. $\frac{3600''\zeta}{n r}$.
2,8469641 ... log. 703″.
$b = - 4626''.$

(b 2)
+ 9,7426733 ... log. $\surd(L^2 - A^2)$.
− 6,1490219 ... log. $\frac{3600''\zeta}{n r}$.
3,5936514 ... log. 3923″.
$b = + 3220''.$

Détermination de la Longitude (IIIe Mém. art. VI). Année 1768.

$\beta = - 19^d\ 16'\ 30''.$

Longitude = { + 22^d^ 9′ 15″ ... Angle *a*. / − 43. 51. 45 .... Angle hor. / + 19. 16. 30 .... Angle β. } = − 2^d^ 26′ 0″ *occ.*

$\beta = + 13^d\ 25'\ 0''.$

Longitude = { + 22^d^ 19′ 15″ ... Angle *a*. / − 43. 51. 45 .... Angle hor. / − 13. 25. 0 .... Angle β. } = − 35^d^ 7′ 30″ *occ.*

Il y a donc deux points de la Terre qui, ſitués ſous le parallèle boréal de $51^d\ 31'$, ont obſervé un contact extérieur des limbes, lorſque l'on comptoit dans chacun de ces lieux $9^h\ 4'\ 33''$ du matin; l'un dont la longitude occidentale comptée de Paris eſt de $35^d\ 7'\ 30''$, l'autre dont la longitude occidentale eſt de $2^d\ 26'\ 0''$. Dans le premier, la Lune, à l'inſtant du phénomène, avoit paſſé depuis long-temps par la perpendiculaire à l'orbite relative. Dans le ſecond, au contraire, la Lune étoit encore éloignée de cette perpendiculaire.

Il eſt inutile d'avertir que ſi l'un des deux facteurs qui ſont ſous le ſigne radical étoit négatif, & que l'autre fut poſitif, la ſolution ſeroit imaginaire; il n'y auroit donc aucun lieu qui verroit le phénomène à l'heure aſſignée ſous le parallèle donné.

Remarquons en général que l'on peut ſe ſervir des équations aux contacts, pour réſoudre les queſtions analogues, relativement à une diſtance aſſignée des centres. Il ne s'agit que de ſupprimer dans ces équations le terme $\frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}$, & de ſubſtituer λ à $\frac{\sigma' \tau}{\partial}$ ou à $\frac{\sigma \tau'}{\partial'}$.

SECTION TROISIÈME.

D'une queſtion du genre de maximis *&* minimis, *relative à la recherche précédente.*

(15.) Si l'on calcule les différens lieux de la Terre qui obſervent une même phaſe ſous les différens parallèles terreſtres, lorſque l'on compte reſpectivement dans ces lieux la même heure aſſignée, il ſera aiſé de remarquer qu'ils n'ont pas la même longitude; cet élément dépend de la latitude du lieu. Quoique la différence des latitudes occaſionne une très-grande diverſité dans les longitudes correſpondantes; il y a cependant une certaine latitude au-delà de laquelle les longitudes ſont imaginaires : on peut donc demander la dernière latitude qui donnera des longitudes réelles, & conſéquemment le dernier parallèle terreſtre où l'on obſervera la phaſe aſſignée à l'heure donnée.

(16.) Rien de plus ſimple que la ſolution du Problème.

En effet, puiſqu'il s'agit de déterminer le point où l'expreſſion de la longitude paſſe du réel à l'imaginaire, il eſt évident que l'on a les équations ſuivantes.

Contacts intérieurs.

$$\frac{\sigma\tau' r E}{\pi\zeta\partial'} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} + A = 0. \qquad \Bigg| \qquad \frac{\sigma\tau' r E}{\pi\zeta\partial'} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} - A = 0.$$

Contacts extérieurs.

$$\frac{\sigma\tau' r E}{\pi\zeta\partial} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} + A = 0. \qquad \Bigg| \qquad \frac{\sigma\tau' r E}{\pi\zeta\partial} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} - A = 0.$$

On peut ordonner les équations par rapport à la latitude, ou par rapport à l'heure. On peut donc indifféremment réſoudre ces deux Problèmes.

Étant donnée une phaſe quelconque, on demande la plus grande latitude de tous les lieux qui obſerveront cette phaſe à une même heure aſſignée.

Étant donnée une phaſe & un parallèle quelconques; on demande relativement à quelle heure particulière ce parallèle terreſtre eſt un maximum *de latitude.*

Comme ces deux manières d'enviſager la queſtion reviennent à peu-près au même, je me contenterai de réſoudre le premier Problème.

(17.) Soit

Contacts intérieurs.

$$M = \overset{(M\,1)}{\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial'}} - \overset{(M\,2)}{\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}} + \overset{(M\,3)}{\frac{\psi l}{\zeta}}. \qquad \Bigg| \qquad M = \overset{(M\,1)}{\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial'}} - \overset{(M\,2)}{\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}} - \overset{(M\,3)}{\frac{\psi l}{\zeta}}.$$

$$N = \overset{(N\,1)}{\frac{\sigma\tau' p}{\zeta\partial'}} + \overset{(N\,2)}{\frac{q\varphi}{r}}. \qquad \Bigg| \qquad N = \overset{(N\,1)}{\frac{\sigma\tau' p}{\zeta\partial'}} - \overset{(N\,2)}{\frac{q\varphi}{r}}.$$

$$P = \overset{(P\,1)}{\frac{\sigma\tau' q\rho h}{\zeta\partial' r^2}} - \overset{(P\,2)}{\frac{p\rho\phi h}{r^3}} - \overset{(P\,3)}{\frac{\rho\omega g}{r^2}}. \qquad \Bigg| \qquad P = \overset{(P\,1)}{\frac{\sigma\tau' q\rho h}{\zeta\partial' r^3}} + \overset{(P\,2)}{\frac{p\rho\phi h}{r^3}} + \overset{(P\,3)}{\frac{\rho\omega g}{r^2}}.$$

Contacts extérieurs.

$M = \overset{(M1)}{\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial}} + \overset{(M2)}{\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}} + \overset{(M3)}{\frac{\psi l}{\zeta}}$	$M = \overset{(M1)}{\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial}} + \overset{(M2)}{\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}} - \overset{(M3)}{\frac{\psi l}{\zeta}}$
$N = \overset{(N1)}{\frac{\sigma\tau' p}{\zeta\partial}} + \overset{(N2)}{\frac{q\varphi}{r}}$	$N = \overset{(N1)}{\frac{\sigma\tau' p}{\zeta\partial}} - \overset{(N2)}{\frac{q\varphi}{r}}$
$P = \overset{(P1)}{\frac{\sigma\tau' q\rho h}{\zeta\partial r^2}} - \overset{(P2)}{\frac{p\rho\varphi h}{r^3}} - \overset{(P3)}{\frac{\rho\omega g}{r^2}}$	$P = \overset{(P1)}{\frac{\sigma\tau' q\rho h}{\zeta\partial r^2}} + \overset{(P2)}{\frac{p\rho\varphi h}{r^3}} + \overset{(P3)}{\frac{\rho\omega g}{r^2}}$

Les équations du §. 16 deviendront

$$Mr - Ns - Pc = 0.$$

Soit maintenant H un angle aigu & positif dont la tangente égale $\frac{Pr}{N}$. A cause de tang. $H = \frac{r \times \text{finus } H}{\text{cofin. } H}$, l'équation précédente deviendra

$$\frac{s \times \text{cofinus } H + c \times \text{finus } H}{r} - \frac{M}{N} \times \text{cofinus } H = 0;$$

Soit donc D, D' les deux angles qui ont pour expression de leur finus, $\frac{M}{N} \times$ cofin. H, on aura

$$\text{Latitudes demandées} = \left\{ \begin{matrix} D - H \\ D' - H \end{matrix} \right\}$$

(18.) On est parvenu à l'équation $\frac{s \times \text{cof. } H + c \times \text{fin. } H}{r} = \frac{M}{N} \times \text{cof. } H$, en partant de l'équation $Mr - Ns - Pc = 0$; mais dans cette dernière équation les valeurs M, N, P, peuvent changer de signes relativement aux différentes éclipses. Pour éviter toute incertitude je vais prescrire l'opération indiquée par l'analyse pour chacune des combinaisons qui peuvent affecter les termes de l'équation $Mr - Ns - Pc = 0$.

Les différentes combinaisons de signes qui peuvent affecter les termes de la dernière équation se réduisent à quatre.

$Mr - Ns - Pc = 0$ .... 1.er CAS.

$Mr - Ns + Pc = 0$ .... 2.e CAS.

$Mr + Ns - Pc = 0$ .... 3.e CAS.

$Mr + Ns + Pc = 0$ .... 4.e CAS.

Dans tous ces cas, par le moyen de l'équation, tangente $H = \frac{Pr}{N}$, déterminez d'abord l'angle H, que vous ſuppoſerez toujours aigu & poſitif.

Évaluez enſuite les deux angles qui ont pour ſinus $\frac{M}{N} \times$ coſ. H, & que je nomme D, D', en obſervant de les ſuppoſer moindres que 180 degrés, & de les regarder comme poſitifs quel que ſoit le ſigne de $\frac{M}{N} \times$ coſinus H.

Vous aurez alors,

PREMIER CAS.

Latitudes demandées $= \begin{Bmatrix} D - H \\ D' - H \end{Bmatrix}$

SECOND CAS.

Latitudes demandées $= \begin{Bmatrix} D + H \\ D' + H \end{Bmatrix}$

TROISIÈME CAS.

Latitudes demandées $= \begin{Bmatrix} -D + H \\ -D' + H \end{Bmatrix}$

QUATRIÈME CAS.

Latitudes demandées $= \begin{Bmatrix} -D - H \\ -D' - H \end{Bmatrix}$

Si la phaſe donnée ne pouvoit pas être obſervée ſur la Terre à l'heure aſſignée, on en ſeroit averti par une expreſſion abſurde; on auroit alors pour expreſſion du ſinus des angles $\begin{Bmatrix} D \\ D' \end{Bmatrix}$ une quantité plus grande que le rayon.

Il pourroit arriver quelquefois que l'expreſſion de la latitude fût donnée ſous la forme d'un arc $\begin{Bmatrix} +K \\ -K \end{Bmatrix}$ plus grand que 180 degrés; on ſubſtituera alors à cette expreſſion cette nouvelle valeur $\begin{Bmatrix} -360^d + K \\ +360^d - K \end{Bmatrix}$.

(19). Dans l'ufage des formules, on peut trouver des latitudes de quatre efpèces.

Des latitudes pofitives, depuis 0^d jufqu'à 90^d
Des latitudes pofitives, depuis 90 jufqu'à 180.
Des latitudes négatives, depuis 0 jufqu'à 90.
Des latitudes négatives, depuis 90 jufqu'à 180.

Les latitudes pofitives ou négatives depuis 0 degré jufqu'à 90 degrés, déterminent les dernières latitudes qui voient la phafe donnée à l'heure affignée; les latitudes pofitives ou négatives depuis 90 degrés jufqu'à 180 degrés, apprennent les dernières latitudes qui obfervent la phafe donnée, non pas précifément à l'heure affignée, mais lorfque l'on compte dans le lieu douze heures plus tôt ou douze heures plus tard. On n'oubliera pas que les latitudes pofitives indiquent des latitudes boréales, & que les latitudes négatives indiquent des latitudes auftrales.

On ne compte en Aftronomie les latitudes que depuis 0 degré jufqu'à 90 degrés: lors donc que l'on aura par un réfultat de calcul, une latitude corrigée plus grande que 90 degrés; pour en conclure la latitude vraie, on prendra le fupplément de la latitude corrigée, & on achevèra le calcul, comme fi ce fupplément eût été donné par la formule.

(20.) Lorfque l'heure & la latitude feront connues, rien de plus fimple que de déterminer le nombre de fecondes horaires écoulées depuis la conjonction jufqu'à l'inftant du phénomène. Soit

$$F = \overset{(F1)}{\frac{\theta l}{\zeta}} - \overset{(F2)}{\frac{q s \omega}{r^2}} - \overset{(F3)}{\frac{c g \rho \varphi}{r^3}} + \overset{(F4)}{\frac{c h p \rho \omega}{r^4}}$$

on aura

$$b = -\overset{(b1)}{\frac{3600'' \zeta}{n r}} \times F.$$

Dans

Dans l'Éclipse du 1.er Avril 1764, on avoit

Contacts intérieurs des limbes du Soleil & de la Lune.

$M = + 75574$... log. $M = 9{,}8783724$.	$M = - 70744$... log. $M = 9{,}8496896$.
$N = + 87409$... log. $N = 9{,}9415562$.	$N = - 87331$... log. $N = 9{,}9411684$.
Logarithmes $(P1,) = - 2{,}3281020$.	Logarithmes $(P1,) = - 2{,}3281020$.
$(P2,) = - 1{,}1307920$.	$(P2,) = - 1{,}1307920$.
$(P3,) = - 0{,}3155335$.	$(P3,) = - 0{,}3155335$.

Contacts extérieurs des limbes du Soleil & de la Lune.

$M = + 130127$... log. $M = 10{,}1143674$.	$M = - 16191$... log. $M = 9{,}2092738$.
$N = + 87409$... log. $N = 9{,}9415562$.	$N = - 87331$... log. $N = 9{,}9411684$.
Logarithmes $(P1,) = - 2{,}3321581$.	Logarithmes $(P1,) - 2{,}3321581$.
$(P2,) = - 1{,}1307920$.	$(P2,) = - 1{,}1307920$.
$(P3,) = - 0{,}3155335$.	$(P3,) = - 0{,}3155335$.

EXEMPLE.

(21.) *On demande la plus grande & la plus petite latitude de tous les lieux qui, le 1.er Avril 1764, ont vu un contact extérieur des limbes, lorſque l'on comptoit onze heures du matin dans ces différens lieux reſpectifs.*

SOLUTION. Puiſque l'on comptoit onze heures du matin dans le lieu, on avoit

$g = -$ ſinus 15^d } Logarithme { $g = 9{,}4129962$.
$h = +$ coſin. 15 } { $h = 9{,}9849438$.

$P = + (P1) - (P2) + (P3)$.	$P = + (P1) + (P2) - (P3)$.

$(P1)$	$(P2)$	$(P3)$
$+9{,}9849438$... log. h.	$+9{,}9849438$... log. h.	$+9{,}4129962$... log. g.
$-2{,}3321581$.	$-1{,}1307920$.	$-0{,}3155335$.
$7{,}6527857$... log. 450.	$8{,}8541518$... log. 7147.	$9{,}0974627$... log. 12516.

$P = + 5819$... log. $P = 8{,}7648484$.	$P = - 4919$... log. $P = 8{,}6918768$.
Et attendu que P, N & M ſont des quantités poſitives, on eſt dans le premier cas.	Et attendu que P, N & M ſont des quantités toutes négatives, on eſt dans le premier cas.

+ 18,7648484 . . . log. *Pr.*
− 9,9415562 . . . log. *N.*

8,8232922 . . . log. tang. *H.*

$H = 3^d\ 48'\ 31''$.

+ 10,1143674 . . . log. *M.*
+ 9,9990397 . . . log. cofin. *H.*

+ 20,1134071.
− 9,9415562 . . . log. *N.*

10,1718509 . . . log. fin. $\begin{Bmatrix} D \\ D' \end{Bmatrix}$

Réfultat imaginaire (§. *18*).

+ 18,6918768 . . . log. *Pr.*
− 9,9411684 . . . log. *N.*

8,7507084 . . . log. tang. *H.*

$H = 3^d\ 13'\ 24''$.

+ 9,2092738 . . . log. *M.*
+ 9,9993124 . . . log. cofin. *H.*

+ 19,2085862.
− 9,9411684 . . . log. *N.*

9,2674178 . . . log. fin. $\begin{Bmatrix} D \\ D' \end{Bmatrix}$

$D = 10^d 40' 1''$. $D' = 169^d 19' 59''$.

	+	10^d	40′	1″	. . . *D.*
	−	3.	13.	24	. . . . *H.*
Lat. cor. =	+	7.	26.	37.	
	+	0.	2.	30.	(§. 7)
Lat. vr. =		7.	29.	7	boréale.

Cette folution répond à 11^h du mat.

Lat. cor. =	+	169^d	19′	59″	. . . *D′.*
	−	3.	13.	24	. . . *H.*
	+	166.	6.	35.	
	+	13.	53.	25	(fup. lat. corr.)
	+	0.	4.	29.	(§. 7)
Lat. vr. =		13.	57.	54	boréale.

Cette folution répond à 11 heures du foir (§. *19*). Le Soleil étoit couché lors du phénomène.

Je ne donnerai point le type du calcul pour les longitudes, attendu que ce n'eft qu'un cas particulier de l'exemple du *§. 14*, dans lequel $\sqrt{(L^2 - A^2)} = 0$.

(22.) La folution précédente nous fait voir que l'on a pu

obſerver un contact extérieur des limbes à onze heures du matin ſous tous les parallèles, depuis $7^d\ 29'\ 7''$ de latitude boréale juſqu'au pôle boréal; & que ſans l'épaiſſeur de la Terre, on auroit pareillement pu obſerver un contact extérieur des limbes à onze heures du ſoir ſous les parallèles compris entre le pôle boréal & le parallèle de $13^d\ 57'\ 54''$.

Si l'on traçoit ſur un globe, la courbe des contacts extérieurs des limbes, correſpondante à onze heures, pour l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, on verroit que cette courbe eſt composée de deux ovales qui ſe coupent au pôle; le premier, celui qui deſcend juſqu'au parallèle boréal de $7^d\ 29'\ 7''$, appartient à onze heures du matin; le ſecond, celui qui ne deſcend que juſqu'au parallèle de $13^d\ 57'\ 54''$, appartient à onze heures du ſoir.

(23.) On peut demander relativement à chacun de ces ovales, *quelle eſt leur plus grande largeur reſpective, évaluée en degrés de longitude:* rien de plus ſimple que la ſolution de ce Problème; en effet, il eſt aiſé de voir que ſous chaque parallèle terreſtre, les diſtances des points communs aux ovales & aux parallèles, dépendent de la quantité radicale que renferme l'expreſſion de b: la théorie *de maximis & minimis,* donne donc pour condition du Problème,

Contacts intérieurs.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial'} - \frac{\sigma\tau' ps}{\zeta\partial' r} - \frac{\sigma\tau' c\rho qh}{\zeta\partial' r^3} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}\right) \times \left(\frac{\sigma\tau' r}{\zeta\partial'} \times (pr^2c - \rho qhs)\right) \\ + \left(-\frac{\psi l}{\zeta} + \frac{qs\varphi}{r^2} - \frac{cg\rho\omega}{r^3} - \frac{chp\rho\varphi}{r^4}\right) \times (q\varphi r^2 c + g\rho\omega rs + hp\rho\varphi s)\end{array}\right\} = 0.$$

Contacts extérieurs.

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial} - \frac{\sigma\tau' ps}{\zeta\partial r} - \frac{\sigma\tau' c\rho qh}{\zeta\partial r^3} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}\right) \times \left(\frac{\sigma\tau' r}{\zeta\partial} \times (pr^2c - \rho qhs)\right) \\ + \left(-\frac{\psi l}{\zeta} + \frac{qs\varphi}{r^2} - \frac{cg\rho\omega}{r^3} - \frac{chp\rho\varphi}{r^4}\right) \times (q\varphi r^2 c + g\rho\omega rs + hp\rho\varphi s)\end{array}\right\} = 0.$$

Il eſt aiſé de voir que les opérations indiquées par l'analyſe conduiroient à une équation complette du quatrième degré; on

auroit donc quatre latitudes, dont chacune répondroit à un *maximum* ou à un *minimum* de largeur des ovales.

Comme la question proposée me paroît plus curieuse qu'utile, je me contente d'indiquer les équations qui la résolvent : il seroit facile de parvenir au résultat final, si quelque circonstance importante l'exigeoit.

(24.) La courbe d'illumination que nous avons discutée dans le §. *22*, peut donner lieu à la remarque suivante; nous avons dit que cette courbe s'étendoit depuis le parallèle boréal de $7^d\ 29'\ 7''$ jusqu'au pôle, & depuis le pôle jusqu'au parallèle de $13^d\ 57'\ 54\frac{1}{4}''$. Le pôle n'est une limite que parce qu'une des deux solutions que sembloient promettre les équations du §. *17*, est imaginaire. En général, si les deux solutions sont imaginaires, comme il arrive presque toujours dans les passages de Vénus sur le disque du Soleil, la courbe n'a d'autres limites que les pôles; elle est composée d'*ellipsoïdes* qui se coupent aux points polaires. Si les deux solutions sont réelles, la courbe ne passe point du tout par les pôles, elle est composée de deux *ovales*. Si l'une des deux solutions est réelle, & l'autre imaginaire, les deux *ovales* se coupent à l'un des pôles.

SECTION QUATRIÈME.

Des Courbes d'illumination proprement dites.

(25.) Après avoir discuté les courbes d'illumination prises dans une signification étendue, je passe à la discussion de ces courbes prises dans l'acception ordinaire des Astronomes ; ce sont celles qui répondent au lever & au coucher du Soleil. J'ai déjà parlé de leur usage, elles sont, sans contredit, les plus intéressantes & les plus connues de toutes celles comprises dans le système général des courbes d'illumination. Je continuerai dans cette recherche, de supposer que l'instant vrai du lever & du coucher du Soleil est celui où l'Observateur se trouve dans le plan de l'horizon absolu.

On a vu que le cosinus de l'angle horaire qui répond à

l'instant où l'Observateur se trouve dans l'horizon absolu, a pour expression $h = -\frac{psr^2}{c\rho q}$. Si donc l'on substitue cette valeur dans l'expression de A, de F & de E du §. 11, que d'ailleurs l'on fasse pour abréger le calcul,

$$f = \sqrt{\left[\left(\frac{\rho q}{r} + \frac{s\sqrt{(\rho^2 q^2 + r^2 p^2)}}{r^2}\right) \times \left(\frac{\rho q}{r} - \frac{s \times \sqrt{(\rho^2 q^2 + r^2 p^2)}}{r^2}\right)\right]}.$$

On aura

Lever du Soleil.

$$A = \overset{(A_1)}{\frac{\psi l}{\zeta}} - \overset{(A_2)}{\frac{\varphi s}{q}} - \overset{(A_3)}{\frac{f\omega}{q}}.$$

$$F = \overset{(F_1)}{\frac{\theta l}{\zeta}} - \overset{(F_2)}{\frac{\omega s}{q}} + \overset{(F_3)}{\frac{f\varphi}{q}}.$$

$$E = \xi.$$

Coucher du Soleil.

$$A = \overset{(A_1)}{\frac{\psi l}{\zeta}} - \overset{(A_2)}{\frac{\varphi s}{q}} + \overset{(A_3)}{\frac{f\omega}{q}}.$$

$$F = \overset{(F_1)}{\frac{\theta l}{\zeta}} - \overset{(F_2)}{\frac{\omega s}{q}} - \overset{(F_3)}{\frac{f\varphi}{q}}.$$

$$E = \xi.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations du §. 11, & que l'on suppose

Contacts intérieurs.

$$L = \overset{(L_1)}{\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial'}} - \overset{(L_2)}{\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}},$$

Contacts extérieurs.

$$L = \overset{(L_1)}{\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial}} + \overset{(L_2)}{\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}},$$

on aura

$$b = \overset{(b_1)}{-\frac{3600''\zeta}{nr} \times F} - \overset{(b_2)}{\frac{3600''\zeta}{nr}\sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}}.$$

$$b = \overset{(b_1)}{-\frac{3600''\zeta}{nr} \times F} + \overset{(b_2)}{\frac{3600''\zeta}{nr}\sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}}.$$

On déterminera l'heure que l'on compte dans le lieu par le moyen de l'équation

$$h = \overset{(h_1)}{-\frac{psr^2}{c\rho q}};$$

Je ne répéterai point ici les remarques que j'ai faites *(§. 12 & 13)* sur la double valeur de b, & sur la détermination de la longitude; on peut relire ces paragraphes.

TABLE des quantités constantes, relatives aux courbes d'illumination, proprement dites, pour l'Éclipse du 1.er Avril 1764.

f.

$$\frac{\rho q}{r} = + 100210.$$

$$\text{Logarithme } \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 + q^2 r^2)}}{r^2} = + 0,0024293.$$

A.	F.
(A 1) $\frac{\psi l}{\zeta} = 73159.$	(F 1) $\frac{\theta l}{\zeta} = 7354.$
(A 2) $\text{Log. } \frac{\varphi}{q} = - 0,0555664.$	(F 2) $\text{Log. } \frac{\omega}{q} = - 0,3164455.$
(A 3) $\text{Log. } \frac{\omega}{q} = - 0,3164455.$	(F 3) $\text{Log. } \frac{\varphi}{q} = - 0,0555664.$
Contact intérieur.	*Contact extérieur.*
$L = + 2415.$	$L = + 56968.$
$\text{Log. } \frac{3600'' \zeta}{nr} = - 6,1490219.$	$\text{Log. } \frac{pr^2}{\rho q} + 8,9229504.$

EXEMPLE.

(26.) *Lors de l'Éclipse du 1.er Avril 1764, on demande quels ont été sous les différens parallèles terrestres, les différens lieux qui ont vu des contacts extérieurs des limbes du Soleil & de la Lune, au lever & au coucher du Soleil!*

SOLUTION. Par le moyen de la Table précédente, j'évalue les valeurs & le signe des grandeurs f, A, F, correspondantes

au lever & au coucher du Soleil, pour les différens parallèles terrestres, en faisant grande attention au signe des termes qui les composent. Je substitue ces valeurs dans la plus négative des valeurs de b s'il est question d'un contact arrivé avant le passage de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative, & dans la moins négative des valeurs de b s'il est question d'un contact arrivé après le passage de la Lune par la perpendiculaire; je conclus le nombre des secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène: je calcule enfin l'heure que l'on compte dans le lieu par le moyen de l'équation $h = -\frac{pr^2 s}{c\rho q}$, & je déduis la longitude du lieu par la méthode de *l'article VI* du troisième Mémoire.

TYPE du Calcul.

Parallèle boréal de 50d. *Coucher du Soleil.*

$$\left.\begin{array}{l} s = + \text{sinus } 49^d\ 50'\ 28'' \\ c = + \text{cosin. } 49.\ 50.\ 28 \end{array}\right\} \text{Log.} \left\{\begin{array}{l} s = 9{,}8832405. \\ c = 9{,}8094988. \\ \frac{s}{c} = + 0{,}0737417. \end{array}\right.$$

f

+ 9,8832405 .... log. s.
+ 0,0024293.
9,8856698 .... log. 76854.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\rho q}{r} + \frac{s\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2} = + 177064 \\ \frac{\rho q}{r} - \frac{s\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2} = + 23356 \end{array}\right\} \text{Log.} \left\{\begin{array}{l} = 10{,}2481306. \\ = 9{,}3683985. \end{array}\right.$$

19,6165291.
2.
log. f = 9,8082645.

$A = + (A1) - (A2) + (A3)$ .... $(A1) = 73159$.

(A2)	(A3)	
+ 9,8832405....log. s.	+ 9,8082645....log. f.	
− 0,0555664.	− 0,3164455.	$A = + 36945$.
9,8276741....log. 67247.	9,4918190....log. 31033.	

$F = + (F1) - (F2) - (F3) \ldots\ldots (F1) = 7354.$

(F2)

+ 9,8832405 . . . log. s.
− 0,3164455.
9,5667950 . . . log. 36880.

(F3)

+ 9,8082645 . . . log. f.
− 0,0555664.
9,7526981 . . . log. 56585.

$F = -$ 86111 . . . . . . log. F = 9,9350586.

$L + A = + 93913.$
$L - A = + 20023.$

Log. = 9,9727257.
= 9,3015291.
19,2742548.
2.
9,6371274 . . . log. $\sqrt{(L^2 - A^2)}$.

$b = + (b1) \mp (b2)$

(b1)

+ 9,9350586 . . . log. F.
− 6,1490219.
3,7860367 . . . log. 6110″.
$b = + 3033''$.

(b2)

+ 9,6371274 . . . log. $\sqrt{(L^2 - A^2)}$
− 6,1490219.
3,4881055 . . . log. 3077″.
$b = + 9187''$.

$h = - (h1)$

+ 8,9229504 . . . log. $\frac{pr^2}{gq}$

+ 0,0737417 . . . log. $\frac{s}{c}$

8,9966921.

Angle horaire = + 95^d 41′ 43″.
$\beta = + 12^d\ 38'\ 15''$.

Longitude = { + 22^d 9′ 15″ . . . angle a.
+ 95. 41. 43 . . . angle hor.
− 12. 38. 15 . . . angle β. } = 105^d 12′ 43″ orient.

$\beta = + 38^d\ 16'\ 45''$.

Longitude = { + 22^d 9′ 15″ . . . angle a.
+ 95. 41. 43 . . . angle hor.
− 38. 16. 45 . . . angle β. } = 79^d 34′ 13″ orient.

Les

Les lieux qui ſous le parallèle boréal de 50^d, ont vu un contact extérieur des limbes au coucher du Soleil, le 1.er Avril 1764, ſont donc plus orientaux que Paris, l'un de $79^d\ 34'\ 13''$, & l'autre de $105^d\ 12'\ 43''$. Le centre de la Lune avoit paſſé depuis long-temps par la perpendiculaire à l'orbite relative lors du premier phénomène; dans le ſecond lieu au contraire, la Lune étoit encore éloignée de cette perpendiculaire.

(27.) Quoique rigoureuſement parlant, des deux valeurs de b, l'une appartienne au lieu qui voit la phaſe aſſignée avant le paſſage apparent du centre de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative, menée par le centre du Soleil, & que l'autre déſigne le lieu qui voit la phaſe après le paſſage de la Lune par la perpendiculaire; il eſt aſſez généralement vrai que le commencement de l'Éclipſe ou la formation de l'Anneau coïncident avec le premier phénomène; que la fin de l'Éclipſe ou la rupture de l'Anneau coïncident avec le ſecond: cette règle cependant n'eſt pas infaillible, ainſi que je le ferai voir par la ſuite; je donnerai une méthode pour s'aſſurer de ſon exactitude dans les cas où l'on pourroit avoir quelques ſoupçons ſur la légitimité de la concluſion.

(28.) Les calculs du *§. 26*, peuvent également ſervir à déterminer huit points de la Terre, quatre ſous le parallèle boréal & quatre ſous le parallèle auſtral; ces huit points ſont ceux relativement auxquels à l'inſtant des contacts, les ſinus & les coſinus de latitude & d'angle horaire, ont la même valeur abſolue, & ne diffèrent que par les ſignes. Un exemple va nous éclaircir.

Parallèle boréal de 50^d.

$s = +$ sinus $49^d\ 50'\ 28''$ $c = +$ cosinus $49^d\ 50'\ 28''$.
logarithme $f = 9{,}8082645$.

Commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil.

Angle horaire $= +\ 95^d\ 41'\ 43''$

$$A = + (A\,1) - (A\,2) + (A\,3) = +\ 36945.$$
$$F = + (F\,1) - (F\,2) - (F\,3) = -\ 86111.$$
$$\log.\ \sqrt{(L^2 - A^2)} = 9{,}6371274.$$
$$b = + (b\,1) - (b\,2) = +\ 3033''.$$

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus oriental que Paris, de $105^d\ 12'\ 43''$.

Fin de l'Éclipse au coucher du Soleil.

Angle horaire $= +\ 95^d\ 41'\ 43''$

$$A = + (A\,1) - (A\,2) + (A\,3) = +\ 36945.$$
$$F = + (F\,1) - (F\,2) - (F\,3) = -\ 86111.$$
$$\log.\ \sqrt{(L^2 - A^2)} = 9{,}6371274.$$
$$b = + (b\,1) + (b\,2) = +\ 9187''.$$

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus oriental que Paris, de $79^d\ 34'\ 13''$.

Commencement de l'Éclipse au lever du Soleil.

Angle horaire $= -\ 95^d\ 41'\ 43''$

$$A = + (A\,1) - (A\,2) - (A\,3) = -\ 25121.$$
$$F = + (F\,1) - (F\,2) + (F\,3) = +\ 27059.$$
$$\log.\ \sqrt{(L^2 - A^2)} = 9{,}7086767.$$
$$b = - (b\,1) - (b\,2) = -\ 5548''.$$

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus occidental que Paris, de $50^d\ 25'\ 28''$.

Fin de l'Éclipse au lever du Soleil.

Angle horaire $= - 95^d\ 41'\ 43''$.

$A = + (A\,1) - (A\,2) - (A\,3) = - 25121$.
$F = + (F\,1) - (F\,2) + (F\,3) = + 27059$.
log. $\sqrt{(L^2 - A^2)} = 9{,}7086767$.
$b = - (b\,1) + (b\,2) = + 1708''$.

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus occidental que Paris, de $80^d\ 39'\ 28''$.

Parallèle austral de 50^d.

$s = -$ sinus $49^d\ 50'\ 28''$ $\quad c = +$ cosinus $49^d\ 50'\ 28''$.
logarithme $f = 9{,}8082645$.

Commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil.

Angle horaire $= + 95^d\ 41'\ 43''$.

$A = + (A\,1) + (A\,2) + (A\,3) = + 171439$.
$F = + (F\,1) + (F\,2) - (F\,3) = - 12351$.
$\sqrt{(L^2 - A^2)}$ imaginaire.

Il n'y a donc aucun lieu sous le parallèle austral de 50^d, qui, le 1.[er] Avril 1764, ait vu commencer l'Éclipse au coucher du Soleil.

Fin de l'Éclipse au coucher du Soleil.

Angle horaire $= + 95^d\ 41'\ 43''$.

$A = + (A\,1) + (A\,2) + (A\,3) = + 171439$.
$F = + (F\,1) + (F\,2) - (F\,3) = - 12351$.
$\sqrt{(L^2 - A^2)}$ imaginaire.

Il n'y a donc aucun lieu sous le parallèle austral de 50^d, qui, le 1.[er] Avril 1764, ait vu la fin de l'Éclipse au coucher du Soleil.

Commencement de l'Éclipse au lever du Soleil.

Angle horaire $= - 95^d\ 41'\ 43''$.

$A = + (A1) + (A2) - (A3) = + 109373.$

$F = + (F1) + (F2) + (F3) = + 100819.$

$\sqrt{(L^2 - A^2)}$ imaginaire.

Il n'y a donc aucun lieu sous le parallèle austral de 50^d, qui, le 1.er Avril 1764, ait vu commencer l'Éclipse au lever du Soleil.

Fin de l'Éclipse au lever du Soleil.

Angle horaire $= - 95^d\ 41'\ 43''$.

$A = + (A1) + (A2) - (A3) = + 109373.$

$F = + (F1) + (F2) + (F3) = + 100819.$

$\sqrt{(L^2 - A^2)}$ imaginaire.

Il n'y a donc aucun lieu sous le parallèle austral de 50^d, qui, le 1.er Avril 1764, ait vu la fin de l'Éclipse au lever du Soleil.

SECTION CINQUIÈME.

Des Sommets des courbes d'illumination.

(29.) Si l'on trace la courbe d'illumination pour le 1.er Avril 1764, on verra que cette courbe ne s'est pas étendue indistinctement sous toutes les latitudes; il y a une infinité de parallèles terrestres où l'on n'a pu observer des contacts au lever & au coucher du Soleil : il est donc intéressant de connoître les dernières latitudes qui observent ce phénomène.

Deux causes peuvent empêcher les courbes d'illumination de s'étendre sous une latitude donnée ; la première, lorsque les distances des centres correspondantes au lever & au coucher du Soleil pour les différens points du parallèle, surpassent toutes la distance, qui seule pourroit faire observer le phénomène. La seconde, lorsque le Soleil ne se lève ou ne se couche pas sous le parallèle assigné. En effet, vainement demanderoit-on quel point du parallèle observe le commencement ou la fin de l'Éclipse

lorſque le Soleil eſt à l'horizon, ſi cette dernière condition eſt impoſſible.

(30.) Si l'on jette les yeux ſur les équations du *ſ. 25*, on verra que la quantité b peut être imaginaire par deux ſuppoſitions; la première, lorſque A & F ſont imaginaires; la ſeconde, lorſque A & F étant réels, le radical que renferme le dernier terme, eſt imaginaire. Nous avons donc deux ſuppoſitions différentes à diſcuter.

PREMIÈRE SUPPOSITION.

(31.) Les quantités A & F dépendent, quant à leur nature, de la valeur de f; la ſuppoſition de $f = 0$, doit donc donner une des limites des courbes d'illumination: on remarquera que A & F ſont alors les mêmes pour le lever & le coucher du Soleil. C'eſt le cas où le Soleil eſt à l'horizon dans le méridien, & par conſéquent le cas où il ſe couche & ſe lève au même inſtant.

De la ſuppoſition de $f = 0$, combinée avec $h = -\frac{psr^2}{c\rho q}$ on tire

$$\rho^2 q^2 r^2 - p^2 s^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 = 0;\ h = \pm r;\ g = 0;$$

$$s = \pm \frac{q}{r} \times \frac{r^2 \rho}{\sqrt{(q^2\rho^2 + p^2r^2)}};$$

on a donc, pour réſoudre le Problème, les équations ſuivantes:

$$s = +\frac{q}{r} \times \frac{r^2\rho}{\sqrt{(q^2\rho^2+p^2r^2)}}.$$

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi}{r} \times \frac{r^2\rho}{\sqrt{(q^2\rho^2+p^2r^2)}}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega}{r} \times \frac{r^2\rho}{\sqrt{(q^2\rho^2+p^2r^2)}}.$$

Angle horaire à l'inſtant du phénomène = ... { $0^d\ 0'\ 0''$, ſi la déclinaiſ. du Soleil eſt auſtrale. $+180^d\ 0'\ 0''$, ſi la déclinaiſ. du Soleil eſt boréale.

$$s = -\frac{q}{r} \times \frac{r^2\rho}{\sqrt{(q^2\rho^2+p^2r^2)}}.$$

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} + \frac{\varphi}{r} \times \frac{r^2\rho}{\sqrt{(q^2\rho^2+p^2r^2)}}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} + \frac{\omega}{r} \times \frac{r^2\rho}{\sqrt{(q^2\rho^2+p^2r^2)}}.$$

Angle horaire à l'inſtant du phénomène = ... { $0^d\ 0'\ 0''$, ſi la déclinaiſ. du Soleil eſt boréale. $+180^d\ 0'\ 0''$, ſi la déclinaiſ. du Soleil eſt auſtrale.

Le reste du calcul est le même que pour le cas général (§. 25).

Année 1766. J'ai déjà remarqué (*IV.e Mém. §. 66*) que $\frac{r^2\rho}{\sqrt{(q^2\rho^2 + p^2r^2)}}$ est l'expression de celui des demi-diamètres terrestres qui fait, avec le plan de l'Équateur, un angle égal au complément de la déclinaison du Soleil, & que cette quantité se trouve toute cal-
Année 1764. culée par la *II.e Table du §. 20 du II.e Mémoire.*

Lors de l'éclipse du 1.er Avril 1764, on avoit

$$\frac{r^2\rho}{\sqrt{(q^2\rho^2 + p^2r^2)}} = 100004.$$

Sommets des courbes d'illumination pour l'Éclipse du 1.er Avril 1764, déterminés par les équations précédentes.

(32.) Si l'on applique le calcul à l'Éclipse du 1.er Avril 1764, on aura les résultats suivans.

$s = +$ sinus $85^d\ 12'\ 48''$ $s = -$ sinus $85^d\ 12'\ 48''$.

Latitude vraie $= 85^d\ 14'\ 27''$, australe & boréale.

Commencement de l'Éclipse lorsque le Soleil a rasé l'horizon dans le méridien inférieur.

Latitude boréale $= 85^d\ 14'\ 27''$. Angle horaire $= + 180^d\ 0'\ 0''$.

$A = - 14524$. $F = - 40734$.   log. $\sqrt{(L^2 - A^2)} = 9{,}7410368$;

$b = + (b\,1) - (b\,2) = - 1019''$.

Le lieu qui a vu le phénomène, est un lieu plus occidental que Paris, de $153^d\ 36'\ 0''$.

Fin de l'Éclipse lorsque le Soleil a rasé l'horizon dans le méridien inférieur.

Latitude boréale $= 85^d\ 14'\ 27''$. Angle horaire $= 180^d\ 0'\ 0''$.

$A = - 14524$. $F = - 40734$.   log. $\sqrt{(L^2 - A^2)} = 9{,}7410368$;

$b = \pm (b\,1) \pm (b\,2) = \pm 6799''$;

Le lieu qui a vu le phénomène, eſt un lieu plus oriental que Paris, de $173^d\ 49'\ 30''$.

Commencement de l'Éclipſe lorſque le Soleil a raſé l'horizon dans le méridien ſupérieur.

Latitude auſtrale $= 85^d\ 14'\ 27''$. Angle horaire $= 0^d\ 0'\ 0''$

$A = + 160842$. $F = + 55442$. $\sqrt{(L^2 - A^2)}$ imaginaire.

Fin de l'Éclipſe lorſque le Soleil a raſé l'horizon dans le méridien ſupérieur.

Latitude auſtrale $= 85^d\ 14'\ 27''$. Angle horaire $= 0^d\ 0'\ 0''$.

$A = + 160842$. $F = + 55442$. $\sqrt{(L^2 - A^2)}$ imaginaire.

On voit donc que des quatre ſommets que ſembloient promettre les formules du *§. 31*, les deux qui appartiennent aux latitudes auſtrales, ſont imaginaires. Remarquons ici que les ſommets des courbes d'illumination, déterminés par les équations précédentes, ſont ſitués ſous le dernier des parallèles terreſtres où le Soleil puiſſe ſe lever ou ſe coucher.

Paſſons maintenant à la détermination des autres ſommets des courbes d'illumination.

Deuxième Supposition.

(33.) Il eſt ſenſible que ſi l'on ſuppoſe nulle, la quantité radicale, contenue dans l'expreſſion de b, on déterminera les points de paſſage des valeurs réelles aux valeurs imaginaires. Les lieux déterminés par l'équation

$$\left(\frac{\sigma\,\tau'\,r\,\xi}{\pi\,\zeta\,\delta'} - \frac{\delta\,\tau\,r}{\pi\,\zeta}\right)^2 - A^2 = 0 \text{ pour les contacts intérieurs ;}$$

$$\left(\frac{\sigma\,\tau'\,r\,\xi}{\pi\,\zeta\,\delta} + \frac{\delta\,\tau\,r}{\pi\,\zeta}\right)^2 - A^2 = 0 \text{ pour les contacts extérieurs ;}$$

ſont donc les derniers qui voient la phaſe aſſignée au lever & au coucher du Soleil ; ces équations déterminent donc encore les ſommets de la courbe d'illumination.

Si l'on ſubſtitue à A, ſa valeur tirée du *§. 25*, que

l'on élimine la quantité f par le moyen de sa valeur $f = \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}$, & que l'on suppose

Contacts intérieurs.

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{q}{\omega} \times \left(\frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \partial'} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} - \frac{\psi l}{\zeta}\right) \\ N &= + \frac{\varphi r}{\omega} \end{aligned}\right\} \text{1.}^{\text{re}} \text{ Suite.}$$

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{q}{\omega} \times \left(\frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \partial'} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} + \frac{\psi l}{\zeta}\right) \\ N &= - \frac{\varphi r}{\omega} \end{aligned}\right\} \text{2.}^{\text{e}} \text{ Suite.}$$

Contacts extérieurs.

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{q}{\omega} \times \left(\frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \partial} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} - \frac{\psi l}{\zeta}\right) \\ N &= + \frac{\varphi r}{\omega} \end{aligned}\right\} \text{1.}^{\text{re}} \text{ Suite.}$$

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{q}{\omega} \times \left(\frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \partial} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta} + \frac{\psi l}{\zeta}\right) \\ N &= - \frac{\Phi r}{\omega} \end{aligned}\right\} \text{2.}^{\text{e}} \text{ Suite.}$$

$$P = \frac{\rho^2 q^2}{r^3} + \frac{p^2}{r} + \frac{\varphi^2 r}{\omega^2};$$

$$Q = \frac{MN}{P};$$

$$R = \frac{M^2}{P} - \frac{\rho^2 q^2}{P r^2};$$

On aura,

Pour déterminer la dernière latitude qui voit la phase assignée au lever & au coucher du Soleil,

$$s^2 + 2Qs + Rr = 0.$$

Pour déterminer l'heure que l'on compte dans le lieu à l'instant du phénomène, $h = - \frac{psr^2}{c\rho q}$;

(34.)

(34.) Lorſque l'on connoît la latitude du lieu, rien de plus ſimple que de déterminer le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis la conjonction juſqu'à l'inſtant du phénomène: en effet, par la ſuppoſition, le terme $(b\,2)$ eſt nul.

Soit donc

$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f\varphi}{q}$, ſi le phénomène arrive au lever du ☉;

$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f\varphi}{q}$, ſi le phénomène arrive au coucher du ☉;

on a $$b = -\frac{3600''\zeta}{nr} \times F.$$

Comme les valeurs de M & de N ſont doubles, il eſt évident que la ſolution eſt quadruple.

(35.) On peut faire ſur ces ſolutions une difficulté. Les équations du §. 33 déterminent bien, dira-t-on, la dernière latitude qui voit la phaſe aſſignée au lever ou au coucher du Soleil, & le coſinus de l'angle horaire à l'inſtant du phénomène: mais le même coſinus appartient au lever & au coucher du Soleil; il eſt donc incertain ſi le phénomène arrive au lever ou au coucher de cet Aſtre; la détermination de la longitude & le calcul de la quantité F ſont cependant très-différens dans ces deux hypothèſes. Comment pourrons-nous donc diſtinguer ces deux cas?

(36.) On doit conclure du §. 33 que lors des derniers contacts poſſibles, on a en général

Lever du Soleil.	*Coucher du Soleil.*
$M + \frac{Ns}{r} + f = 0$ . . . . 1.ere ſuite.	$M + \frac{Ns}{r} - f = 0$ . . . . 1.ere ſuite.
$M + \frac{Ns}{r} - f = 0$ . . . . . 2.e ſuite.	$M + \frac{Ns}{r} + f = 0$ . . . . . 2.e ſuite.

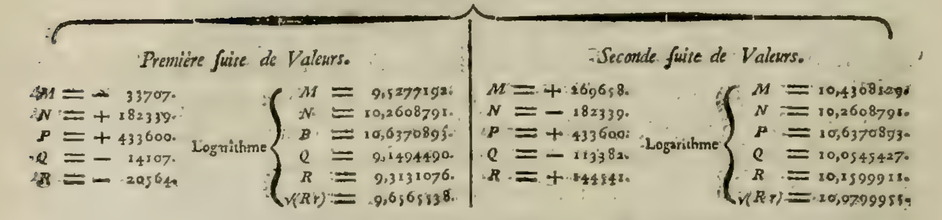
L'équation $s^2 + 2Qs + Rr = 0$, donne deux latitudes pour chacune des valeurs correſpondantes de M & de N;

on peut donc connoître (§. 25) les valeurs numériques de f qui en dépendent. Je porte dans les équations précédentes les valeurs de s en leur donnant le ſigne qui leur convient & les valeurs numériques de f; je vois laquelle des équations du lever ou du coucher du Soleil devient nulle, d'où je conclus à quel inſtant appartient la ſolution. Un exemple va nous éclaircir.

Sommets des courbes d'illumination pour l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, déterminés par la formule du §. 33.

(37.) Si l'on applique le calcul à l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, on aura les réſultats ſuivans.

Contacts extérieurs des limbes.



Première ſuite de Valeurs.

		Logarithme		
M	$=$ − 33707.		M	$=$ 9,5277192.
N	$=$ + 182339.		N	$=$ 10,2608791.
P	$=$ + 433600.		B	$=$ 10,6370895.
Q	$=$ − 14107.		Q	$=$ 9,1494490.
R	$=$ − 20564.		R	$=$ 9,3131076.
			$\sqrt{(Rr)}$	$=$ 9,6565338.

Seconde ſuite de Valeurs.

		Logarithme		
M	$=$ + 269658.		M	$=$ 10,4308129.
N	$=$ − 182339.		N	$=$ 10,2608791.
P	$=$ + 433600.		P	$=$ 10,6370893.
Q	$=$ − 113382.		Q	$=$ 10,0545427.
R	$=$ + 144541.		R	$=$ 10,1599911.
			$\sqrt{(Rr)}$	$=$ 10,0799955.

Je ſuppoſe que le lecteur a préſent à l'eſprit la méthode dé-
Année 1766. taillée dans mon *IV.e Mémoire*, pour trouver les racines numériques des équations du ſecond degré.

Puiſque Q & R ſont négatifs, l'équation qui réſout le Problème eſt

$$s^2 - 2Qs - Rr = 0.$$

Si je compare cette équation avec les équations générales du ſecond degré *(IV.e Mém. §. 41 & ſuivans)*, je vois que, dans le cas particulier que je diſcute, on a

$$\text{Tangente}\left\{\begin{matrix} B \\ B' \end{matrix}\right\} = \frac{r\sqrt{(Rr)}}{Q}.$$

$$s = \text{tang.}\,\frac{B}{2} \times \frac{\sqrt{(Rr)}}{r}, \quad s = \text{tang.}\,\frac{B'}{2} \times \frac{\sqrt{(Rr)}}{r}.$$

Puiſque Q eſt négatif & R poſitif, l'équation qui réſout le Problème eſt

$$s^2 - 2Qs + Rr = 0.$$

Si je compare cette équation avec les équations générales du ſecond degré, je vois que dans le cas particulier que je diſcute, on a

$$\text{Sinus}\left\{\begin{matrix} B \\ B' \end{matrix}\right\} = \frac{r\sqrt{(Rr)}}{Q}.$$

$$s = \text{tang.}\,\frac{B}{2} \times \frac{\sqrt{(Rr)}}{r}, \quad s = \text{tang.}\,\frac{B'}{2} \times \frac{\sqrt{(Rr)}}{r}.$$

L'angle B est entre 90^d & 180^d; l'angle $\frac{B}{2}$ est moindre que 90 degrés, & sa tangente est positive; la valeur de s correspondante est positive.

L'angle B' est entre 270^d & 360^d; l'angle $\frac{B'}{2}$ est entre 90^d & 180^d, sa tangente est négative, ainsi que la valeur de s correspondante.

Comme $r\surd(Rr)$ surpasse Q; on a une expression du sinus des angles B, B', plus grande que le rayon; les racines de l'équation sont donc imaginaires.

Première suite de Valeurs.

$+19,6565538\ldots\log.\ r\surd(Rr)$.

$-\ 9,1494490\ldots\log.\ Q$.

$10,5071048\ldots\log.\ \text{tang.}\left\{\begin{matrix}B\\B'\end{matrix}\right\}$

$B = 107^d\ 16'\ 52''$.

$\frac{B}{2} = 53.\ 38.\ 26$.

$+10,1330205\ldots\log.\ \text{tang.}\ \frac{B}{2}$.

$+\ 9,6565538\ldots\log.\ \surd(Rr)$.

$9,7895743\ldots\log.\ s$.

s positive.

Latitude corr. $= 38^d\ 1'\ 27''$

$+\ 9.\ 23$.

Latitude vraie $= 38.\ 10.\ 50.$ B.

Cette valeur de s portée successivement dans les deux équations correspondantes du §. 36 ne rend nulle que celle qui répond au coucher du Soleil; la solution appartient donc au coucher du Soleil; on comptoit alors $6^h\ 15'\ 1''$ du soir, dans le lieu; sa longitude est de $88^d\ 48'\ 17''$, orientale.

$B' = 287^d\ 16'\ 52''$.

$\frac{B'}{2} = 143.\ 38.\ 26$.

$+9,8669794\ldots\log.\ \text{tang.}\ \frac{B'}{2}$.

$+9,6565538\ldots\log.\ \surd(Rr)$.

$9,5235332\ldots\log.\ s$.

s négative.

Latitude corr. $= 19^d\ 30'\ 7''$

$+\ 6.\ 5$.

Latitude vraie $= 19.\ 36.\ 12.$ A.

Cette valeur de s portée successivement dans les deux équations correspondantes du §. 36 ne rend nulle que celle qui répond au lever du Soleil; la solution appartient donc au lever du Soleil; on comptoit alors $6^h\ 53'\ 12''$ du matin; sa longitude est de $34^d\ 38'\ 17''$, occidentale.

(38.) Les équations que nous venons de discuter (§. 31 & 33) ne peuvent jamais donner entre elles que quatre sommets réels de la courbe d'illumination; bien entendu que ce nombre peut se réduire à deux dans quelques cas particuliers, & même

être abſolument nul lorſque l'Éclipſe n'a pas lieu ſur notre globe.

Lors donc, par exemple, que l'équation du *§. 31* aura donné quatre ſommets réels, il ſera inutile d'en chercher de nouveaux par l'autre formule; les ſolutions ſeront imaginaires. Ce premier cas a preſque toujours lieu lors des paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil; il n'a jamais lieu pour les Éclipſes de Soleil. Si l'équation du *§. 31* ne donne que deux ſommets réels, comme dans l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, la ſeconde formule aura eſſentiellement deux valeurs réelles & deux imaginaires. Si l'équation du *§. 31* a toutes ſes valeurs imaginaires, & que l'Éclipſe ſoit viſible ſur notre globe, la ſeconde formule aura preſque toujours ſes quatre valeurs réelles; quoique cependant il puiſſe arriver quelquefois que deux des valeurs ſoient imaginaires. Dans ce dernier cas un des deux ovales, celui qui répondroit au lever ou au coucher du Soleil s'eſt évanoui.

Remarquons ici un cas particulier; celui où indépendamment de $f = 0$; on a encore $L^2 - A^2 = 0$; c'eſt-à-dire, celui où les équations des *§. 31 & 33* ont des valeurs communes. Cette ſuppoſition donne la circonſtance particulière où les équations du *§. 31* ceſſent d'avoir des valeurs réelles. Les deux ſommets donnés par ces équations, qui, en général, ſont diſtincts & ſéparés ſous le même parallèle, ſe réuniſſent en un point; la durée de l'éclipſe eſt inſtantanée, ainſi que l'apparition du Soleil ſur l'horizon. On doit donc conclure que le paſſage des valeurs réelles aux imaginaires des équations du *§. 31* ſe fait par un point de la Terre, où la durée de l'Éclipſe eſt inſtantanée. On doit conclure enfin que ſi les ſommets donnés par le *§. 31* ſont imaginaires, la durée de l'Éclipſe ne peut être que fort petite dans les climats voiſins de ces ſommets.

SECTION SIXIÈME.

De la plus grande largeur des ovales qui compoſent les courbes d'illumination.

(39.) J'ai déjà remarqué, à l'occaſion des courbes d'illumi-

nation prifes dans la fignification la plus étendue, que l'on peut demander relativement à chacun des ovales qui les compofent, *quelle eft leur plus grande largeur refpective en longitude.* J'ai obfervé que fous chaque parallèle terreftre la diftance des points communs aux ovales & aux parallèles dépend de la quantité radicale que renferme l'expreffion de b, & j'ai donné en général l'équation qui détermine la latitude correfpondante à la plus grande largeur de ces ovales pour une courbe d'illumination quelconque ; la folution conduit à une équation complette du quatrième degré. Dans le cas des courbes d'illumination, proprement dites, l'équation fe décompofe.

(40.) Si l'on différencie le radical que renferme le terme (b 2) du §. 25, en ne fuppofant variable que la latitude du lieu, il fera aifé de voir que l'on aura pour condition du Problème qui nous occupe,

$$\left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q}\right) \times \left[\pm \omega s\,(\rho^2 q^2 + p^2 r^2) - r^4 \varphi f\right] = 0.$$

Nous avons donc deux fuppofitions différentes à difcuter.

PREMIÈRE SUPPOSITION.

(41.) Dans l'équation

$$\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q} = 0.$$

Si l'on élimine la quantité f par le moyen de fa valeur

$$f = \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2};$$

que l'on fubftitue φt à ωr, & que l'on fuppofe

$$T = r + \frac{p^2 t^2}{r^3} + \frac{q^2 \rho^2 t^2}{r^5} \quad P = \frac{\psi l}{\zeta} \times \frac{q r}{\varphi T} \quad Q = \frac{\psi^2 l^2 q^2}{\zeta^2 \varphi^2 T} - \frac{q^2 t^2 \rho^2}{r^4 T};$$

on aura,

Pour déterminer les latitudes correfpondantes à la plus grande largeur des ovales d'illumination,

$$s^2 - 2Ps + Qr = 0.$$

Pour déterminer l'heure que l'on compte à l'inftant du phé-

nomène dans les deux points correſpondans du parallèle

$$h = -\frac{pr^2 s}{c\rho q}.$$

(42.) Lorſque l'on connoît la latitude, rien de plus ſimple que de déterminer le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis la conjonction juſqu'à l'inſtant du phénomène dans les deux points du parallèle. En effet, par la ſuppoſition

$$\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q} = 0 \text{ ; donc } A = 0.$$

Soit donc

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f\varphi}{q} \text{ ſi le phénomène arrive au lever du Soleil.}$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f\varphi}{q} \text{ ſi le phénom. arrive au coucher du Soleil.}$$

On aura

Contacts intérieurs.

$$b = \begin{cases} -\frac{3600''\zeta}{nr} \times F - \frac{3600''\zeta}{nr} \times \left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}\right) \\ -\frac{3600''\zeta}{nr} \times F + \frac{3600''\zeta}{nr} \left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}\right). \end{cases}$$

Contacts extérieurs.

$$b = \begin{cases} -\frac{3600''\zeta}{nr} \times F - \frac{3600''\zeta}{nr} \times \left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}\right) \\ -\frac{3600''\zeta}{nr} \times F + \frac{3600''\zeta}{nr} \left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}\right). \end{cases}$$

(43.) La même difficulté qui nous avoit arrêtés (*§. 35*) ſe repréſente encore dans cette ſolution. Lequel des deux inſtans du lever ou du coucher du Soleil doit-on faire correſpondre aux latitudes déterminées par le *§. 41*? Pour terminer cette incertitude, je remarque que l'on a en général

$$\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f\omega}{q} = 0, \text{ lorſque le phénomène arrive au lever du Soleil,}$$

$$\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f\omega}{q} = 0, \text{ lorſque le phénomène arrive au coucher du Soleil;}$$

d'ailleurs $f = \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}$.

L'équation

$$s^2 - 2Ps + Qr = 0$$

donne deux latitudes. On connoîtra donc (*§. 25*) les valeurs numériques de f qui en dépendent. Je porte dans les équations précédentes les valeurs de s en leur donnant le signe qui leur convient, & les valeurs numériques de f. Je vois laquelle des deux équations du lever ou du coucher du Soleil devient nulle; d'où je conclus à quel instant appartient la solution.

(44.) Si l'on applique le calcul à l'Éclipse du 1.er Avril 1764, on aura les résultats suivans

$$\left.\begin{array}{l} T = +\ 130416. \\ P = +\ \ \ 63753. \\ Q = +\ \ \ 29847. \end{array}\right\} \text{Logarithme.} \left\{\begin{array}{l} T = 10{,}1153310. \\ P = \ \ 9{,}8045003. \\ Q = \ \ 9{,}4749007. \\ \sqrt{(Qr)} = \ \ 9{,}7374503. \end{array}\right.$$

Puisque P & Q sont positifs, l'équation qui satisfait au Problème est $s^2 - 2.Ps + Qr = 0$; si je compare cette équation avec les équations générales du second degré (*IV.e Mémoire, §. 41 & suivans*) je vois que dans le cas particulier que je discute, on a Année 1766.

$$\text{sinus}\left\{\begin{array}{l} B \\ B' \end{array}\right\} = r\,\frac{\sqrt{(Qr)}}{P}.$$

$$s = \frac{\sqrt{(Qr)}}{r} \times \text{tang.}\,\frac{B}{2} \qquad\qquad s = \frac{\sqrt{(Qr)}}{r} \times \text{tang.}\,\frac{B'}{2}.$$

Les angles B & B' sont chacun moindres que 180 degrés, & les deux valeurs de s sont positives.

$$\begin{array}{ll} +\ 19{,}7374503 \ldots & \text{log. } r\sqrt{(Qr)}. \\ -\ \ \ 9{,}8045003 \ldots & \text{log. } P. \\ \hline \ \ \ \ 9{,}9329500 \ldots & \text{log. sinus}\left\{\begin{array}{l} B \\ B' \end{array}\right\} \end{array}$$

$$B = 58^d\ 58'\ 30''. \qquad\qquad B' = 121^d\ 1'\ 30''.$$

$$\frac{B}{2} = 29.\ 29.\ 15. \qquad\qquad \frac{B'}{2} = 60.\ 30.\ 45.$$

$$\begin{array}{ll} +\ 9{,}7524210 \ldots \text{log. tang. } \frac{B}{2}. & +\ 10{,}2475790 \ldots \text{log. tang. } \frac{B'}{2}. \\ +\ 9{,}7374503 \ldots \text{log. } \sqrt{(Qr)}. & +\ \ 9{,}7374503 \ldots \text{log. } \sqrt{(Qr)}. \\ \hline \ \ \ 9{,}4898713 \ldots \text{log. } s. & \ \ \ \ 9{,}9850293 \ldots \text{log. } s. \end{array}$$

s positive.

Latit. corrigée $= 17^d\ 59'\ 43''$.
$+\ 0.\ \ 5.\ 41.$

Latitude vraie $= 18.\ \ 5.\ 24$ bor.

Cette valeur de s, portée successivement dans les deux équations du §. 43, ne rend nulle que celle qui répond au lever du Soleil, le parallèle boréal de $18^d\ 5'\ 24''$ est donc celui sous lequel l'ovale correspondant au lever du Soleil a la plus grande largeur en longitude.

s positive.

Latit. corrigée $= 75^d\ 2'\ 32''$.
$+\ 0.\ 4.\ 50.$

Latitude vraie $= 75.\ 7.\ 22$ bor.

Cette valeur de s, portée successivement dans les deux équations du §. 43, ne rend nulle que celle qui répond au coucher du Soleil; le parallèle boréal de $75^d\ 7'\ 22''$ est donc celui sous lequel l'ovale correspondant au coucher du Soleil a la plus grande largeur en longitude.

Si l'on jette les yeux sur les valeurs de b du §. 25, il est aisé de voir que la plus grande largeur en longitude des ovales d'illumination exprimée en secondes horaires, a pour expression

Contacts intérieurs.

$$2 \times \frac{3600''\zeta}{n r} \times \left(\frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \delta'} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}\right)$$

Contacts extérieurs.

$$2 \times \frac{3600''\zeta}{n r} \times \left(\frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \delta} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}\right).$$

Lors de l'Éclipse du 1.er Avril 1764, cette plus grande largeur étoit de 8084'', pour les contacts extérieurs.

SECONDE SUPPOSITION.

(45.) Dans l'équation

$$\pm\ \omega s \times (\varrho^2 q^2 + p^2 r^2) - r^4 \varphi f = 0;$$

si l'on élimine la quantité f par le moyen de sa valeur $f = \frac{\sqrt{(\varrho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}$, on aura pour déterminer les latitudes correspondantes à la plus petite ou à la plus grande largeur des ovales d'illumination,

$$s = \pm\ \frac{\rho r^2}{\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}} \times \frac{q \varphi r}{\sqrt{[\varphi^2 r^4 + \omega^2 (\rho^2 q^2 + p^2 r^2)]}}.$$

(46.) Lorsque l'on connoîtra la latitude, rien de plus simple que

que de déterminer l'heure que l'on compte à l'instant du phénomène dans les deux points corelatifs * du parallèle terrestre; & le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant du phénomène dans chacun de ces points: ce calcul n'est qu'un cas particulier du Problème du §. 25.

Si l'on suppose

$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f\omega}{q}$, lorsque le phénomène arrive au lever du Soleil,

$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f\omega}{q}$, lorsque le phénomène arrive au coucher du Soleil;

& que l'on substitue dans l'expression de A, les valeurs de s conclues du §. 45; on aura,

Plus grande largeur en longitude des ovales d'illumination, exprimée en sec. de temps,

$$= \begin{cases} 2 \times \frac{3600'' \zeta}{nr} \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\delta'} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} + A\right)\times\left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\delta'} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} - A\right)\right]} \text{ contacts intérieurs.} \\ 2 \times \frac{3600'' \zeta}{nr} \sqrt{\left[\left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\delta} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} + A\right)\times\left(\frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\delta} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta} - A\right)\right]} \text{ contacts extérieurs;} \end{cases}$$

(47.) On peut demander relativement à ce Problème, ainsi que nous l'avons déjà fait précédemment, lequel des deux instans du lever ou du coucher du Soleil répond aux latitudes déterminées par le §. 45. Pour lever cette incertitude, je remarque que l'on a en général

$\omega s \times (\rho^2 q^2 + p^2 r^2) - r^4 \varphi f = 0$ lorsque le phénomène arrive au lever du Soleil,

$\omega s \times (\rho^2 q^2 + p^2 r^2) + r^4 \varphi f = 0$ lorsque le phénom. arrive au coucher du Soleil.

L'équation du §. 45, donne deux latitudes; on connoîtra donc (§. 25) les valeurs numériques de f qui en dépendent. Je porte dans les équations précédentes, les valeurs de s, en leur donnant

* À chacune des valeurs de s déterminées par l'équation du §. 45, peuvent répondre quatre points différens sous chacun des parallèles; deux qui appartiennent au lever du Soleil, & deux qui appartiennent au coucher. J'appelle *points corelatifs* ceux qui appartiennent tous deux au lever du Soleil, ou tous deux au coucher de cet astre.

le ſigne qui leur convient, & les valeurs numériques de f; je vois laquelle des deux équations du lever ou du coucher du Soleil, devient nulle; d'où je conclus à quel inſtant appartient la ſolution.

(48.) Si l'on applique le calcul à l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, on aura

$$s = \pm \text{ ſinus } 60^d\ 45'\ 38''.$$

Lat. cor.	= 60d	45'	38".		
	+ 0.	8.	14.		
Lat. vr.	= 60.	53.	52.	Bor.	

La valeur poſitive de s, portée ſucceſſivement dans les deux équations du §. 47, ne rend nulle que celle qui répond au lever du Soleil; le parallèle boréal de 60d 53' 52", eſt donc celui ſous lequel l'ovale correſpondant au lever du Soleil, avoit la plus petite largeur en longitude : cette plus petite largeur, évaluée en ſecondes horaires, étoit de 7120".

Lat. cor.	= 60d	45'	38".	
	+ 0.	8.	14.	
Lat. vr.	= 60.	53.	52.	Auſt.

La valeur négative de s, portée ſucceſſivement dans les deux équations du §. 47, ne rend nulle que celle qui répond au coucher du Soleil; le parallèle auſtral de 60d 53' 52", ſeroit donc celui ſous lequel l'ovale correſpondant au coucher du Soleil, auroit eu la plus petite largeur en longitude, ſi l'équation du §. 25 ne donnoit d'ailleurs un réſultat imaginaire; le *minimum* que ſembloit promettre l'équation du §. 45, n'a donc pas lieu.

On voit, par cette recherche, que ce ſeroit conclure précipitamment, ſi l'on faiſoit dépendre la réalité de la ſolution, de la réalité des valeurs de s; il faut de plus que ces valeurs portées dans l'équation du §. 25, ne la rendent pas imaginaire.

Lors de l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, l'ovale d'illumination correſpondant au lever du Soleil, avoit un *maximum* de largeur ſous le parallèle boréal de 18d 5' 24" (§. 44), & un *minimum* de largeur ſous le parallèle boréal de 60d 53' 52". Quant à l'ovale correſpondant au coucher du Soleil, il n'avoit qu'un *maximum* de largeur, ſous le parallèle boréal de 75d 7' 22" (§. 44); ſon *minimum* étoit imaginaire.

(49.) Nous venons de déterminer dans le paragraphe précédent, le *maximum* & le *minimum* de diſtance des branches d'illumination; mais ce *maximum* & ce *minimum*, ainſi que

nous l'avons remarqué, n'eſt pas une plus grande ou une plus petite largeur abſolue; ce n'eſt qu'un *maximum* ou un *minimum* de nombre de degrés du parallèle terreſtre, compris entre les deux branches de la courbe. Perſonne n'ignore que les degrés des parallèles vont en diminuant en remontant de l'équateur vers le pôle; ces degrés rectifiés ſont entre eux, comme les rayons des parallèles correſpondans ſur leſquels ils ſont comptés; ils ſont proportionnels *(2.e Mém. §. 25)* à $\frac{c\rho}{r}$; ſi donc on ne veut point avoir ſimplement le *maximum* ou le *minimum* du nombre de degrés compris entre les branches de la courbe, mais le *maximum* ou le *minimum* de diſtance abſolue priſe ſur le parallèle, il ne faudra pas ſimplement différencier la quantité

Année 1764.

$$\sqrt{\left[\left(\frac{\sigma\tau'r\xi}{\pi\zeta\partial}\mp\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}\right)^2-\left(\frac{\psi l}{\zeta}-\frac{\varphi s}{q}\mp\frac{f\omega}{q}\right)^2\right]},$$

ainſi que nous l'avons fait *§. 40*; mais la quantité ſuivante

$$\frac{c}{r}\times\sqrt{\left[\left(\frac{\sigma\tau'r\xi}{\pi\zeta\partial}\mp\frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}\right)^2-\left(\frac{\psi l}{\zeta}-\frac{\varphi s}{q}\mp\frac{f\omega}{q}\right)^2\right]}.$$

Si l'on conſerve les définitions de L, de A, & de f, du *§. 25*, on parviendra à l'équation ſuivante

$$qL^2-A\left[q\times\frac{\psi l}{\zeta}-\frac{\varphi}{s}\times(s^2-c^2)\mp\frac{\omega(2c^2\rho^2q^2-p^2r^2s^2+p^2r^2c^2)}{r^4f}\right]=0.$$

SECTION SEPTIÈME.

Détermination du lieu de la Terre qui voit le premier, le diſque du Soleil entamé par la Lune; ou qui voit le dernier, les diſques de ces Aſtres ſe ſéparer.

(50.) Les équations que nous venons de diſcuter, fourniſſent une méthode bien facile pour réſoudre une queſtion intéreſſante; je veux parler de la détermination du lieu de la Terre qui voit le premier, le diſque de la Lune entamer le diſque du Soleil, & en général une phaſe quelconque; ou qui voit le dernier, les

disques de ces astres se séparer. Cette question n'est qu'un cas particulier des courbes d'illumination, proprement dites; il ne s'agit que de déterminer les points de ces courbes correspondans aux *maxima* & aux *minima* des quantités b.

(51.) Soit

$$f = \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2};$$

$$'L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \partial'} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact intérieur.}$$

$$'L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \partial} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact extérieur.}$$

Lever du Soleil.	*Coucher du Soleil.*
$'A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f \omega}{q}.$	$'A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f \omega}{q}.$
$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f \varphi}{q}.$	$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f \varphi}{q}.$

On peut conclure du §. 25 que si l'on porte respectivement ces valeurs dans les équations

$$b = -\frac{3600'' \zeta}{n r} \times F - \frac{3600'' \zeta}{n r} \sqrt{(L^2 - A^2)}.$$

$$b = -\frac{3600'' \zeta}{n r} \times F + \frac{3600'' \zeta}{n r} \sqrt{(L^2 - A^2)}.$$

On déterminera en général, sous chaque parallèle, la distance de la conjonction au commencement ou à la fin de l'Éclipse, relativement aux points de ce parallèle, qui verront le phénomène au lever ou au coucher du Soleil. Il ne s'agit donc pour résoudre la question proposée que de différentier ces dernières équations en faisant varier la latitude.

La théorie de *maximis* & *minimis* donne pour condition du Problème,

$$\sqrt{(L^2 - A^2)} \times dF \mp A dA = 0;$$

$$L dF \pm A \sqrt{(dA^2 + dF^2)} = 0;$$

on a donc en substituant à dA & à dF, leurs valeurs

Lever du Soleil.

$$L \times [fr^4 \omega + \varphi s(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r A \sqrt{[\rho^2 r^6 + s^2 (\rho^2 q^2 + p^2 r^2) \times (\rho^2 - r^2)]} = 0,$$

Coucher du Soleil.

$$L \times [fr^4 \omega - \varphi s(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r A \sqrt{[\rho^2 r^6 + s^2 (\rho^2 q^2 + p^2 r^2) \times (\rho^2 - r^2)]} = 0;$$

(52.) Il eſt aiſé de voir que l'élimination des radicaux conduiroit à une équation du huitième degré qui n'auroit que des puiſſances paires, ou, ce qui revient au même, à une équation complète du quatrième degré. Comme une équation de ce genre renferme néceſſairement dans l'uſage, des longueurs de calcul, je vais préſenter quelques réflexions qui permettront d'employer une équation plus ſimple, bien entendu toutefois que cette nouvelle équation ne ſera qu'une approximation de la véritable, & que géométriquement parlant, l'équation du Problème eſt celle que je viens de donner.

(53.) Si l'on jette les yeux ſur les quantités qui compoſent le radical, on verra que le ſecond terme, celui qui ſous ce radical renferme la variable s, eſt multiplié par la différence des quarrés des axes terreſtres. Ce ſecond terme eſt d'autant plus négligeable que l'on ſuppoſera l'excentricité de la Terre plus petite; il s'évanouit entièrement par la ſuppoſition de la Terre ſphérique. Lorſque l'on n'a aucun égard à ce terme; les équations du *paragraphe précédent* deviennent

Lever du Soleil.

$$L \times [fr^4 \omega + \varphi s(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r^4 \rho A = 0,$$

Coucher du Soleil.

$$L \times [fr^4 \omega - \varphi s(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp q r^4 \rho A = 0;$$

Imaginons que l'on tire de ces dernières équations les valeurs de s, qui les rendent nulles; il eſt évident que ces valeurs ſubſtituées dans la formule rigoureuſe du §. 51, la rendront preſque nulle: on peut donc regarder ces valeurs comme une approximation déjà très-grande de celles qui réſolveroient rigoureuſement le Problème.

(54.) Il eſt poſſible de donner aux équations précédentes

toute l'exactitude imaginable en leur ſuppoſant la forme qui ſuit,

Lever du Soleil.

$$L \times [fr^4\omega + \varphi s(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp qr^4 A\Delta = 0.$$

Coucher du Soleil.

$$L \times [fr^4\omega - \varphi s(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2)] \mp qr^4 A\Delta = 0.$$

On commencera par faire un premier calcul, dans lequel on ſuppoſera $\Delta = \varrho$, & on en conclura les premières valeurs approchées de s. Soient ces valeurs déſignées par s', on fera un ſecond calcul, dans lequel on ſuppoſera

$\Delta = \sqrt{(\varrho^2 + \frac{s'^2(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2) \times (\varrho^2 - r^2)}{r^6})}$, & l'on aura les valeurs rigoureuſes de s dans l'hypothèſe de la Terre elliptique.

La raiſon de ce procédé eſt ſenſible; le premier calcul donne, d'une manière très-approchée, la véritable valeur de Δ; on peut donc, ſans erreur ſenſible, dans le ſecond calcul, regarder cette valeur comme connue.

(55.) Soit $\quad H = \frac{\varrho^2 q^2}{r^3} + \frac{p^2}{r}.$

$$M = \frac{\varphi^2 \times (\frac{LH}{r} + \Delta)^2}{r^3} + \frac{\omega^2 H (L + \Delta)^2}{r^4}$$

$$N = \frac{\frac{\psi l}{\zeta} \times q\varphi\Delta \times (\frac{LH}{r} + \Delta)}{Mr^3}$$

$$P = \frac{\frac{\psi^2 l^2}{\zeta^2} q^2 \Delta^2}{Mr^4} - \frac{\varrho^2 q^2 \omega^2 \times (L + \Delta)^2}{Mr^6};$$

$$M' = \frac{\varphi^2 \times (\frac{LH}{r} - \Delta)^2}{r^3} + \frac{\omega^2 H (L - \Delta)^2}{r^4}$$

$$N' = \frac{\frac{\psi l}{\zeta} \times q\varphi\Delta (\frac{LH}{r} - \Delta)}{M' r^3}$$

$$P' = \frac{\frac{\psi^2 l^2}{\zeta^2} \times q^2 \Delta^2}{M' r^4} - \frac{\varrho^2 q^2 \omega^2 \times (L - \Delta)^2}{M' r^6}.$$

On aura pour résoudre les questions proposées,

$$s^2 - 2Ns + Pr = 0.$$
$$s^2 + 2N's + P'r = 0.$$

Lorsque l'on connoîtra la latitude du parallèle qui satisfait au Problème, rien de plus simple que de déterminer l'heure que l'on compte dans le lieu à l'instant du phénomène, & la distance à la conjonction. Ces calculs ne sont qu'une application particulière du cas général du §. 25, bien entendu que l'on doit avoir grande attention de n'employer dans les calculs, que des valeurs corelatives, c'est-à-dire de ne substituer dans les expressions de A & de F, qui appartiennent au lever ou au coucher du Soleil, que les valeurs de s qui appartiennent au lever ou au coucher du Soleil.

(56.) Pour ôter toute incertitude sur ce choix, je remarque que l'on a en général

Premier lieu qui voit le phénomène au lever du Soleil.

$$f\omega(L + \Delta) + \varphi s\left(\frac{LH}{r} + \Delta\right) - q\Delta \times \frac{\psi l}{\zeta} = 0 \ldots \text{1.}^{\text{re}} \text{ équation.}$$

Dernier lieu qui voit le phénomène au lever du Soleil.

$$f\omega(L - \Delta) + \varphi s\left(\frac{LH}{r} - \Delta\right) + q\Delta \times \frac{\psi l}{\zeta} = 0 \ldots \text{2.}^{\text{e}} \text{ équation.}$$

Premier lieu qui voit le phénomène au coucher du Soleil.

$$f\omega(L - \Delta) - \varphi s \times \left(\frac{LH}{r} - \Delta\right) - q\Delta \times \frac{\psi l}{\zeta} = 0 \ldots \text{3.}^{\text{e}} \text{ équation.}$$

Dernier lieu qui voit le phénomène au coucher du Soleil.

$$f\omega(L + \Delta) - \varphi s \times \left(\frac{LH}{r} + \Delta\right) + q\Delta \times \frac{\psi l}{\zeta} = 0 \ldots \text{4.}^{\text{e}} \text{ équation.}$$

Les équations du §. 55, donnent chacune deux latitudes; on connoîtra donc les valeurs numériques de f qui en dépendent: je porte dans les équations précédentes ces valeurs de s, en leur

donnant le ſigne qui leur convient, & les valeurs numériques de f correſpondantes; je vois laquelle des équations devient nulle, d'où je conclus à quel inſtant appartient la ſolution.

Premier calcul dans lequel on ſuppoſe $\Delta = 9$.

(57.) Si l'on applique le calcul au cas particulier du contact extérieur des limbes, pour l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, on aura

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= +\ 100565. \\ H &= +\ 101125. \\ L &= +\ 56968. \\ \frac{LH}{r} &= +\ 57609. \end{aligned}\right\} \text{Logarithme} \ldots \left\{\begin{aligned} \Delta &= 10{,}0024467. \\ H &= 10{,}0048586. \\ L &= 9{,}7556310. \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{LH}{r} + \Delta &= +\ 158174. \\ \frac{LH}{r} - \Delta &= -\ 42956. \\ L + \Delta &= +\ 157533. \\ L - \Delta &= -\ 43597. \end{aligned}\right\} \text{Log.} \left\{\begin{aligned} \frac{LH}{r} + \Delta &= 10{,}1991350. \\ \frac{LH}{r} - \Delta &= 9{,}6330238. \\ L + \Delta &= 10{,}1973720. \\ L - \Delta &= 9{,}6394566. \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} M &= \mp\ 250365. \\ N &= +\ 40610. \\ P &= -\ 1548. \end{aligned}\right. \text{Logarithme} \left\{\begin{aligned} M &= 10{,}3985733. \\ N &= 9{,}6086375. \\ P &= 8{,}1897710. \\ \sqrt{(Pr)} &= 9{,}0948855. \end{aligned}\right.$$

Puiſque N eſt poſitive & P négatif, l'équation qui ſatisfait au Problème eſt $s^2 - 2Ns - Pr = 0$.

Si je compare cette équation avec les équations générales du 2.e degré *(IV.e Mém. §. 41 & ſuiv. année 1766)* je vois que dans le cas que je diſcute

$$\text{Tangente} \left\{\begin{matrix} B \\ B' \end{matrix}\right\} = \frac{r\sqrt{(Pr)}}{N}.$$

$$s = \text{tang.}\,\frac{B}{2} \times \frac{\sqrt{(Pr)}}{r},\; s = \text{tang.}\,\frac{B'}{2}\,\frac{\sqrt{(Pr)}}{r}.$$

$$\left.\begin{aligned} M' &= \mp\ 18631. \\ N' &= -\ 148216. \\ P' &= +\ 264792. \end{aligned}\right. \text{Logarithme} \left\{\begin{aligned} M' &= 9{,}2702362. \\ N' &= 10{,}1708936. \\ P' &= 10{,}4229046. \\ \sqrt{(P'r)} &= 10{,}2114523. \end{aligned}\right.$$

Puiſque N' eſt négative & P' poſitif, l'équation qui ſatisfait au Problème eſt $s^2 - 2N's + P'r = 0$.

Si je compare cette équation avec les équations générales du 2.e degré, je vois que dans le cas que je diſcute

$$\text{Sinus} \left\{\begin{matrix} B \\ B' \end{matrix}\right\} = \frac{r\sqrt{(P'r)}}{N'}.$$

$$s = \text{tang.}\,\frac{B}{2} \times \frac{\sqrt{(P'r)}}{r},\; s = \text{tang.}\,\frac{B'}{2} \times \frac{\sqrt{(P'r)}}{r}.$$

L'angle

L'angle B est entre 90 deg. & 180 deg. l'angle B' est entre 270^d & 360^d; l'angle $\frac{B}{2}$ est par conséquent moindre que 90^d; & sa tangente est positive; l'angle $\frac{B'}{2}$ est entre 90^d & 180^d, & sa tangente est négative; la première valeur de s est donc positive & la seconde négative.

$+$ 19,0948855 . . . log. $r\sqrt{(Pr)}$.
$-$ 9,6086375 . . . log. N.

9,4862480 . . . log. tang. $\left\{ \begin{matrix} B \\ B' \end{matrix} \right\}$

$B = 162^d\ 57'\ 58''$
$\frac{B}{2} = 81.\ 28.\ 59.$

$+$ 10,8246250 . . . log. tang. $\frac{B}{2}$.
$+$ 9,0948855 . . . log. $\sqrt{(Pr)}$.

9,9195105 . . . log. s'.
s' positive.

$B' = 342^d\ 57'\ 58''$.
$\frac{B'}{2} = 171.\ 28.\ 59.$

$+$ 9,1753760 . . . log. tang. $\frac{B'}{2}$.
$+$ 9,0948855 . . . log. $\sqrt{(Pr)}$.

8,2702615 . . . log. s'.
s' négative.

Les angles B & B' sont chacun moindres que 180^d, les angles $\frac{B}{2}$, $\frac{B'}{2}$ sont moindres que 90^d, leurs tangentes sont positives & les valeurs de s sont toutes deux positives.

$+$ 20,2114523 . . . log. $r\sqrt{(P'r)}$.
$-$ 10,1708936 . . . log. N'.

10,0405587 . . . log. sin. $\left\{ \begin{matrix} B \\ B' \end{matrix} \right\}$
Résultat imaginaire.

Second calcul dans lequel on suppose

$$\Delta = \sqrt{\left(\varrho^2 + \frac{s'^2\,(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2) \times (\varrho^2 - r^2)}{r^6}\right)}.$$

(58.) On pourroit se contenter de la première approximation

du §. 57; on concluroit alors que le lieu qui le 1.er Avril 1764, a vu le premier, un contact extérieur des limbes au lever du Soleil, est situé sous le parallèle austral de 1d 4′ 24″; que celui qui a vu le dernier, un contact extérieur des limbes au coucher du Soleil, est situé sous le parallèle boréal de 56d 19′ 58″. Comme je ne veux rien laisser à desirer sur l'usage de ces formules, je ne regarderai ce résultat que comme une approximation. Je vais donc évaluer une nouvelle quantité Δ, en prenant d'abord une des deux valeurs de s', trouvées par le calcul précédent; celle, par exemple, qui a pour logarithme 9,9195105.

		Logarithme.		
Δ	$= + 100957.$		Δ	$= 10,0041364.$
H	$= + 101125.$		H	$= 10,0048586.$
L	$= + 56968.$		L	$= 9,7556310.$

$$\frac{LH}{r} = + 57609.$$

		log.		
$\frac{LH}{r} + \Delta$	$= + 158566.$		$\frac{LH}{r} + \Delta$	$= 10,2002100.$
$L + \Delta$	$= + 157925.$		$L + \Delta$	$= 10,1984503.$
M	$= + 251880.$		M	$= 10,4011937.$
N	$= + 40624.$		N	$= 9,6087827.$
P	$= - 1487.$		P	$= 8,1723110.$
			$\sqrt{(Pr)}$	$= 9,0861555.$

Puisque N est positive & P négatif, l'équation qui satisfait au Problème est

$$s^2 - 2Ns - Pr = 0;$$

on trouvera donc par un calcul semblable à celui du §. 57,

Log. $s = 9,9192895.$

s positive.

Latit. corr. $= 56^d\ 8'\ 25''$

$+\ 0.\ 8.\ 56.$

Latit. vraie $= 56.\ 17.\ 21.$ B.

Si l'on substitue cette valeur de s, & celle de f correspondante, dans les équations du §. 56; on verra qu'elles rendent nulle la

dernière de ces équations. Le phénomène eſt donc arrivé, au coucher du Soleil, $2^h\ 34'\ 40''$ après la conjonction; on comptoit $6^h\ 28'\ 41''$ du ſoir dans le lieu; ſa longitude eſt de $80^d\ 39'\ 17''$, orientale.

Si l'on évalue une nouvelle quantité Δ, en prenant celle des valeurs de s', qui a pour logarithme 8,2702615; on trouvera que le lieu qui, le 1.er Avril 1764, a vu le premier, un contact extérieur des limbes au lever du Soleil, eſt ſitué ſous le parallèle auſtral de $1^d\ 1'\ 55''$. Le phénomène eſt arrivé $2^h\ 53'\ 41''$ avant la conjonction; on comptoit $6^h\ 0'\ 21''$ du matin dans le lieu, ſa longitude eſt de $24^d\ 20'\ 21''$, occidentale.

Le ſecond calcul n'a donné qu'une légère correction pour les latitudes; on pourra donc, généralement parlant, ſe diſpenſer de ce ſecond calcul, à moins que l'on ne veuille parvenir à une préciſion géométrique.

Puiſque l'on connoît le premier & le dernier inſtant phyſique où l'on a pu obſerver l'Éclipſe ſur la Terre, il eſt ſenſible que l'on connoît ſa durée totale ſur notre globe; lors de l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, cette durée a été de $5^h\ 28'\ 21''$.

(59.) Les recherches précédentes peuvent donner les plus grandes lumières ſur la figure des courbes d'*illumination;* je vais parcourir rapidement celles qui ſe préſentent le plus ordinairement ſur la Terre; car toutes les formes, géométriquement poſſibles, n'ont pas lieu ſur notre globe, attendu la rapidité du mouvement propre des Planètes, en comparaiſon de la rotation diurne.

Lorſque les quatre racines des équations du *§. 55,* ſont réelles, la courbe eſt compoſée de deux *ovales* diſtincts & ſéparés, qui ne peuvent avoir d'interſections qu'en nombre pair, c'eſt-à-dire deux ou aucune. On a, généralement parlant, dans ce cas, un premier lieu qui voit le phénomène au lever du Soleil, un dernier lieu qui l'obſerve au lever de cet aſtre; un premier lieu qui voit le phénomène au coucher du Soleil, un dernier lieu qui l'obſerve au coucher de cet aſtre. La courbe pourroit alors avoir un point, ou d'*oſculation,* ou d'*embraſſement,* ſi les *ovales* au lieu de ſe couper, venoient à ſe toucher. Le paſſage de l'eſpèce préſente à celle du *§. 61,* ſe fait par un point de *rebrouſſement* ordinaire, combiné

avec une branche de courbe perpendiculaire à la direction du *rebrouſſement.*

(60.) Il peut cependant arriver dans des circonſtances aſſez rares (lorſque, par exemple, la Lune a une très-grande latitude), que quoique les quatre racines des équations du §. 55, ſoient réelles, elles ne rendent cependant nulles que les deux premières ou les deux dernières équations du §. 56. Deux des valeurs appartiennent alors au premier & au dernier lieu abſolu qui voit le phénomène au lever ou au coucher du Soleil; les deux autres valeurs appartiennent au dernier point du premier *ovale* & au premier du ſecond. Le paſſage de l'eſpèce préſente à celle du §. 62, ſe fait par un point de *croix*, combiné avec une inflexion dans chacune des branches qui forment le point.

(61.) Lorſque des quatre racines que ſemblent promettre les équations du §. 55, deux ſont imaginaires; la courbe *d'illumination* eſt composée d'une ſeule ſuite continue de points.

Si les deux racines réelles rendent nulles la 1.re & la 4.e ou la 2.e & la 3.e équation du §. 56; la courbe a la figure d'une eſpèce de *huit de chiffre* alongé. Dans ce cas il n'y a pas, géométriquement parlant, de dernier lieu où l'on obſerve le phénomène au lever ou au coucher du Soleil, de premier lieu où l'on puiſſe l'obſerver au coucher ou au lever de cet aſtre, attendu la continuité de la courbe. Aſtronomiquement parlant, ces lieux répondent aux ſommets déterminés par la formule du §. 31.

(62.) Si les deux racines réelles ne rendent nulles que la 1.re & la 2.e, ou la 3.e & la 4.e équation du §. 56; la courbe peut reſſembler à un *ovale*, ou à une eſpèce de *cœur*, ou à une eſpèce de *huit de chiffre* dont le nœud n'eſt pas formé & dont les *ovales* pourroient même encore reſſembler à une eſpèce de *cœur*. Lors du paſſage de la préſente ſuppoſition à celle du §. 61, la courbe a un point de *rebrouſſement à bec*, ſitué à un de ſes ſommets.

Quoique dans l'eſpèce précédente & dans celle du §. 60, la totalité preſqu'entière de la courbe appartienne au lever ou au coucher du Soleil, il peut cependant y avoir une petite portion de la courbe qui appartienne au coucher ou au lever de cet aſtre.

Lorſque toutes les racines réelles du §. 55 ſont égales, la courbe eſt réduite à un *point iſolé.*

Lorſque les quatre racines réelles ſont égales deux à deux, la courbe eſt réduite à deux points *conjugués.* Ces points ſont le dernier état des *ovales* qui s'évanouiſſent.

On ne doit point oublier (& cette remarque eſt importante ſi l'on veut faire une vérification complette) que lorſque l'on porte dans les équations du §. 56 les valeurs de *s* tirées du §. 55, conformément à ce qui eſt preſcrit §. 56, on doit ſuppoſer dans chacune de ces équations, la quantité *L* poſitive, puis enſuite négative, autrement on feroit une vérification incomplette.

Remarquons, en finiſſant, que la trace de l'Éclipſe centrale peut être conſidérée comme une ſuite de *courbes d'illumination* priſes dans un ſens étendu (§. 9), réduites à des *points conjugués.*

SECTION HUITIÈME.

Détermination du lieu de la Terre qui voit le commencement de l'Éclipſe au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet aſtre; ou réciproquement, le commencement de l'Éclipſe au coucher du Soleil & la fin au lever.

(63.) Il ſe préſente naturellement une queſtion intéreſſante à réſoudre; c'eſt la détermination du lieu de la Terre qui voit le commencement de l'Éclipſe au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet aſtre; ou réciproquement, le commencement de l'Éclipſe au coucher du Soleil & la fin au lever. Si l'on conſidère la queſtion aſtronomiquement, elle conſiſte à déterminer le lieu particulier de la Terre, relativement auquel la demi durée de l'Éclipſe eſt égale à l'arc ſémi-diurne ou à l'arc ſémi-nocturne. Si l'on conſidère la queſtion géométriquement, elle conſiſte à déterminer ſur notre globe, les interſections des ovales d'illumination. Le premier point de vue nous fait voir qu'il n'eſt pas poſſible de parvenir à une ſolution directe & rigoureuſe. On auroit pour réſoudre la queſtion une équation de la forme ſuivante, ainſi que je le ferai voir §. 70.

Arc ſémi-diurne égale fonction du ſinus & du coſinus de la latitude.

Il faudroit, pour réduire l'équation à une seule variable, avoir l'expression finie de l'arc sémi-diurne, en valeur du sinus & du cosinus de la latitude, ce que la Géométrie n'a encore pu donner; la question est liée à la quadrature du cercle; il est donc nécessaire d'avoir recours à une méthode d'approximation.

Afin de parvenir à une approximation très-convergente, je considérerai le Problème sous le second point de vue; je déterminerai sur notre globe, les intersections des ovales d'illumination. Cette détermination dépend de plusieurs questions préliminaires.

(64.) Si l'on cherche sous chaque parallèle terrestre, les longitudes des lieux respectifs qui observent le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre, ou réciproquement; il sera aisé de voir que ces longitudes diffèrent d'une quantité plus ou moins grande, suivant les parallèles pour lesquels on calcule. Cette différence, par exemple, n'est pas la même sous l'Équateur que sous le parallèle de 50^d. Comme il s'agit de déterminer le parallèle sous lequel cette différence est nulle; il est intéressant de connoître pour chaque parallèle, cette différence en longitude, & la loi qui règne entre la variation de cette différence & la variation de la latitude. Telle est la question préliminaire que je me propose de résoudre.

De la différence en longitude sous chaque parallèle, des lieux respectifs dont l'un observe le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & l'autre observe la fin de ce phénomène au coucher de cet astre, ou réciproquement: Et de la loi qui règne entre la variation de cette différence & la variation de la latitude.

Soit

v l'arc de 15^d rectifié.

$$f = \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r},$$

$$H = \frac{\rho^2 q^2}{r^3} + \frac{p^2}{r}.$$

$$L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \partial'} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}$$ s'il s'agit d'un contact intérieur.

$$L = \frac{\sigma \tau' r \xi}{\pi \zeta \partial} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}$$ s'il s'agit d'un contact extérieur.

Lever du Soleil.

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f \omega}{q}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f \varphi}{q}.$$

Coucher du Soleil.

$$A' = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f \omega}{q}.$$

$$F' = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f \varphi}{q}.$$

b la distance de la conjonction au commencement de l'Éclipse, observé au lever du Soleil, évaluée en secondes horaires.

β la même distance évaluée en arc de cercle.

b' la distance de la conjonction à la fin de l'Éclipse, observée au coucher du Soleil, évaluée en secondes horaires.

β' la même distance évaluée en arc de cercle.

On peut conclure du §. 25 que l'on a en général

$$b = -\frac{3600'' \zeta}{n r} \times [F + \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

$$\beta = -\frac{\zeta v}{n r} \times [F + \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

$$b' = -\frac{3600'' \zeta}{n r} \times [F' - \sqrt{(L^2 - A'^2)}].$$

$$\beta' = -\frac{\zeta v}{n r} \times [F' - \sqrt{(L^2 - A'^2)}].$$

Soit

m l'arc sémi-diurne du parallèle, évalué en arc de cercle.

m' l'arc sémi-diurne, évalué en temps.

Y la différence en longitude, des lieux respectifs qui voient le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil & la fin au coucher de cet astre, évaluée en arc de cercle.

Y' la différence en longitude, évaluée en secondes de temps.

Y'' la différence en longitude, évaluée en secondes de degré.

dY'' la variation de la longitude, évaluée en secondes de degré.

dS la variation de la latitude, évaluée en arc de cercle.

dS' la variation de la latitude, évaluée en secondes de degrés.

206265'' le nombre de secondes de degré que contient le rayon du cercle lorsqu'on le compare à la circonférence.

Année 1765. On conclura de l'*article VI du IIIe Mémoire*, que l'on a indistinctement

$$Y = 2m - \beta' + \beta.$$

$$Y = 2m - \frac{\zeta v}{nr}\left[\frac{2f\varphi}{q} + \sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}\right].$$

$$Y' = 2m' - b' + b.$$

$$Y' = 2m' - \frac{3600''\zeta}{nr} \times \left[\frac{2f\varphi}{q} + \sqrt{(L^2 - A'^2)} + (L^2 - A^2)\right];$$

$$Y'' = 15\,Y'.$$

$$Y'' = 15 \times \left(2m' - \frac{3600''\zeta}{nr} \times \left[\frac{2f\varphi}{q} + \sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}\right]\right);$$

$$Y'' = 206265'' \times \frac{Y}{r}.$$

$$Y'' = 206265'' \times \left[\frac{2m}{r} - \frac{\zeta v}{nr} \times \left(\frac{2f\varphi}{qr} + \frac{\sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}}{r}\right)\right];$$

Mais d'ailleurs

$$\text{finus } m = \frac{fr^3}{c\rho q} \quad \text{cofin. } m = -\frac{pr^2 s}{c\rho q} \quad dm = \frac{pr^2 ds}{c^2 f} \quad df = -\frac{Hsds}{fr}$$

$$d\sqrt{(L^2 - A'^2)} = \left(\frac{\varphi}{q} + \frac{H\omega s}{qfr}\right)\frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A'^2)}}\,ds.$$

$$d\sqrt{(L^2 - A^2)} = \left(\frac{\varphi}{q} - \frac{H\omega s}{qfr}\right)\frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}\,ds;$$

$$dS = \frac{rds}{c} \qquad dS' = \frac{206265''}{r}\,dS.$$

On a donc

$$dY'' = dS'\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2pr}{cf} + \dfrac{\zeta vc}{nr^2}\left[\dfrac{2H\varphi s}{qfr} - \left(\dfrac{\varphi}{q} + \dfrac{H\omega s}{qfr}\right)\dfrac{A'}{\sqrt{(L^2 - A'^2)}}\right] \\ - \dfrac{\zeta vc}{nr^2}\left(\dfrac{\varphi}{q} - \dfrac{H\omega s}{qfr}\right)\dfrac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}.\end{array}\right.$$

(65.) On peut maintenant déterminer, fous chaque parallèle, la différence en longitude des lieux, dont l'un obferve le commencement de l'Éclipfe au lever du Soleil, & l'autre obferve la fin au coucher de cet aftre; avec la loi qui règne entre la variation de

de cette différence, & la variation de la latitude : on a pour résoudre cette question,

Premier système d'équations corelatives *.

$$Y' = 2m' - 2 \times \frac{3600''\zeta\varphi f}{nqr} - \frac{3600''\zeta}{nr}\left[\sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}\right].$$

$$dS' : dY'' :: r : \begin{cases} \frac{2pr^2}{cf} + \frac{2\zeta v H\varphi cs}{nr^2 qf} - \frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\frac{\varphi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf}\right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A'^2)}} \\ - \frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\frac{\varphi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf}\right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}. \end{cases}$$

(66.) Si l'on avoit demandé, pour chaque parallèle, la différence en longitude des lieux dont l'un observe le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil, & l'autre observe la fin au lever de cet astre; avec la loi qui règne entre la variation de cette différence, & la variation de la latitude; on seroit parvenu aux résultats suivans.

Deuxième système d'équations corelatives.

$$Y' = 2m' - 2 \times \frac{3600''\zeta\varphi f}{nqr} + \frac{3600''\zeta}{nr}\left[\sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}\right].$$

$$dS' : dY'' :: r : \begin{cases} \frac{2pr^2}{cf} + \frac{2\zeta v H\varphi cs}{nr^2 qf} + \frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\frac{\varphi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf}\right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A'^2)}} \\ + \frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\frac{\varphi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf}\right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}. \end{cases}$$

(67.) Dans ces équations, Y' positif indique que le lieu qui voit le phénomène au coucher du Soleil, est plus oriental que celui qui voit le phénomène au lever de cet astre; si l'on étoit dans une supposition contraire, on en seroit averti par la valeur négative de Y'.

dY'' positif, indique que la différence en longitude est croissante; dY'' négatif, indique que cette différence est décroissante.

* J'entends par *équations corelatives*, des équations qui ont lieu dans les mêmes circonstances.

dS' poſitif, apprend que l'on s'approche du pôle boréal de l'équateur; dS' négatif, fait voir que l'on s'éloigne de ce pôle.

Il eſt ſuperflu d'avertir que l'arc ſémi-diurne ſe calcule par la formule $\text{coſinus } m = -\frac{pr^2 s}{\varrho g q}$.

TABLE des quantités conſtantes, relatives à la préſente recherche, pour l'Éclipſe du 1.er Avril 1764.

cosinus m

$$\text{Log.}\left\{\frac{pr^2}{\varrho q}\right. = +8{,}9229504.$$

Y'

f & $2 \times \frac{3600''\zeta\varphi f}{nqr}$

$$\frac{\varrho q}{r} = +100210.$$

$$\text{Log.}\left\{\begin{array}{l} \frac{\sqrt{(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2} = +0{,}0024293. \\ 2 \times \frac{3600''\zeta\varphi}{nqr} = -5{,}9035583. \end{array}\right.$$

A & A'

$(A1)$ & $(A'1)$.

$$\frac{\psi l}{\zeta} = 73159.$$

$(A2,)$ & $(A'2,)$.

$(A3,)$ & $(A'3,)$.

$$\text{Log.}\left\{\begin{array}{l} \frac{\varphi}{q} = -0{,}0555664 \\ \frac{\omega}{q} = -0{,}3164455 \end{array}\right.$$

Contact intérieur.	*Contact extérieur.*
$L = +2415.$	$L = +56968.$

$$\text{Log.}\left\{\frac{3600''\zeta}{nr}\right\} = -6{,}1490219.$$

dY''

$$H = +101125 \ldots \log. H = 10{,}0048586.$$

$$\frac{\varphi r}{q} = 87990.$$

$$\text{Logarithme}\ldots\left\{\begin{array}{l} 2pr^2 = +29{,}2248924. \\ \frac{2\zeta v H\varphi}{nr^2 q} = -0{,}0370336. \\ \frac{H\omega}{q} = +9{,}6884131. \\ \frac{\zeta v}{nr^2} = -10{,}2873558. \end{array}\right.$$

EXEMPLE.

(68.) *Lors de l'Éclipse du 1.er Avril 1764, on demande quelle étoit sous le parallèle boréal de 50d, la différence en longitude des lieux respectifs, dont l'un a vu le commencement de l'Eclipse au lever du Soleil, & l'autre a observé la fin de ce phénomène au coucher de cet astre; avec le rapport de la variation de cette différence en longitude, à la variation de la latitude.*

SOLUTION. On voit d'abord par la nature de la question, qu'il faut employer les équations du §. 65; d'ailleurs à cause du parallèle boréal de 50d, on a

$$\left.\begin{array}{l} s = + \text{ sinus } 49^d\ 50'\ 28'' \\ c = + \text{ cosin. } 49.\ 50.\ 28 \end{array}\right\}\text{Logarithme}\left\{\begin{array}{l} s = 9{,}8832405. \\ c = 9{,}8094988. \\ \frac{s}{c} = + 0{,}0737417. \end{array}\right.$$

TYPE du Calcul pour trouver la valeur de Y'.

cosinus m.

$$+ 8{,}9229504 \text{ log}\ldots\left\{\frac{pr^2}{\rho q}\right..$$

$$+ 0{,}0737414\ldots\text{log. } \frac{s}{c}.$$

$$8{,}9966918\ldots\text{log. cos. } m.$$

$$2m' = 12^h\ 45'\ 34''.$$

f

$$+ 9{,}8832405\ldots\text{log. } s.$$

$$+ 0{,}0024293.$$

$$9{,}8856698\ldots\text{log. } 76854.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\rho q}{r} + s\,\frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2} = + 177064. \\ \frac{\rho q}{r} - s\,\frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2} = + 23356. \end{array}\right\}\text{Log.}\left\{\begin{array}{r} = 10{,}2481306. \\ = 9{,}3683985. \\ \hline 19{,}6165291. \\ 2. \\ \hline 9{,}8082645\ldots\text{log. } f. \end{array}\right.$$

Log. $f = 9{,}8082645.$

$$\text{Log.}\left\{\begin{array}{l} \left\{\frac{s}{f}\right\} = + 0{,}0749760. \\ \left\{\frac{cs}{f}\right\} = + 9{,}8844748. \end{array}\right.$$

Log. $cf = 19{,}6177633.$

$$2 \times \frac{3600'' \zeta \varphi f}{nqr}$$

$$\begin{array}{l} + \ 9,8082645 \ldots \log. f. \\ - \ 5,9035583 \ldots \log. \ 2 \times \frac{3600'' \zeta \varphi}{nqr}. \\ \hline \quad 3,9047062 \ldots \log. \ 8030''. \end{array}$$

$$2 \times \frac{3600'' \zeta \varphi f}{nqr} = 8030''.$$

$$A = + (A\,1) - (A\,2) - (A\,3) \ldots\ldots (A\,1) = 73159.$$

$(A\,2)$

$$\begin{array}{l} + \ 9,8832405 \ldots \log. s. \\ - \ 0,0555664. \\ \hline \quad 9,8276741 \ldots \log. \ 67247. \end{array}$$

$(A\,3)$

$$\begin{array}{l} + \ 9,8082645 \ldots \log. f. \\ - \ 0,3164455. \\ \hline \quad 9,4918190 \ldots \log. \ 31033. \end{array}$$

$A = -\ 25121.$ Log. $A = 9,4000369.$

$L + A = +\ 31847.$
$L - A = +\ 82089.$

$$\text{Log.}\left\{\begin{array}{l} L + A = \ 9,5030685. \\ L - A = \ 9,9142850. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} + \ 19,4173535. \\ 2. \\ \hline + \ 9,7086767 \ldots \log. (L^2 - A^2). \end{array}$$

$\sqrt{(L^2 - A^2)} = +\ 51130.$

$$\text{Log.}\left\{\frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}\right. = -\ 0,3086398.$$

$$A' = + (A'\,1) - (A'\,2) + (A'\,3) \ldots (A'\,1) = 73159 \ldots (A'\,2) = 67247 \ldots (A'\,3) = 31033.$$

$A' = +\ 36945.$ Log. $A' = 9,5675557.$

$L + A' = +\ 93913.$
$L - A' = +\ 20023.$

$$\text{Log.}\left\{\begin{array}{l} L + A' = \ 9,9727257. \\ L - A' = \ 9,3015291. \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 19,2742548. \\ 2. \\ \hline + \ 9,6371274 \ldots \log. \sqrt{(L^2 - A'^2)}. \end{array}$$

$\sqrt{(L^2 - A'^2)} = +\ 43364.$

$$\text{Log.}\left\{\frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A'^2)}}\right. = -\ 0,0695717.$$

$$\sqrt{(L^2 - A^2)} + \sqrt{(L^2 - A'^2)} = 94494.$$

$$\begin{array}{l} + \ 9,9754042 \ldots \log. \ 94494. \\ - \ 6,1490219 \ldots \log. \frac{3600'' \zeta}{nr} \\ \hline \quad 3,8263823 \ldots \log. \ 6705''. \end{array}$$

$$Y' = \left\{\begin{array}{l} + \ 12^h\ 45'\ 34'' \\ - \ \ 2.\ 13.\ 50 \\ - \ \ 1.\ 51.\ 45 \end{array}\right\} = +\ 8^h\ 39'\ 59''.$$

TYPE du Calcul pour trouver le rapport de d Y″ *à* d S′.

$$\frac{2pr^2}{cf} \qquad \frac{2\zeta v H\varphi cs}{nr^2 qf} \qquad \frac{H\omega s}{qf}$$

+ 29,2248924 . . . log. $2pr^2$.
− 19,6177633 . . . log. cf.
9,6071291 . . . log. 40470.

$$\frac{2pr^2}{cf} = +\ 40470.$$

+ 9,8844748 . . . log. $\frac{cs}{f}$
− 0,0370336 . . . log. $\frac{2\zeta v H\varphi}{nr^2 q}$
9,8474412 . . . log. 70379.

$$\frac{2\zeta v H\varphi cs}{nr^2 qf} = +\ 70379.$$

+ 9,6884131 . . . log. $\frac{H\omega}{q}$
+ 0,0749760 . . . log. $\frac{s}{f}$
9,7633891 . . . log. 57995.

$$\frac{H\omega s}{qf} = +\ 57995.$$

$$\frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\frac{\varphi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf}\right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A'^2)}}$$

$$\frac{\varphi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf} = \begin{cases} +\ 87990. \\ +\ 57995. \\ +145985. \end{cases}$$

+10,1643084 . . . log. 145985.
− 0,0695717 . . . log. $\frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A'^2)}}$.
+10,0947367.
+ 9,8094988 . . . log. c.
+19,9042355.
−10,2873558 . . . log. $\frac{\zeta v}{nr^2}$.
9,6168797 . . . log. 41388.

$$\frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\frac{\varphi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf}\right) \times \frac{A'}{\sqrt{(L^2 - A'^2)}} = +\ 41388.$$

$$\frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\frac{\varphi r}{q} + \frac{H\omega s}{qf}\right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}$$

$$\frac{\varphi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf} = \begin{cases} +\ 87990. \\ -\ 57995. \\ +\ 29995. \end{cases}$$

+ 9,4770489 . . . log. 29995.
− 0,3086398 . . . log. $\frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}$.
+ 9,1684091.
+ 9,8094988 . . . log. c.
+18,9779079.
−10,2873558 . . . log. $\frac{\zeta v}{nr^2}$.
8,6905521 . . . log. 4904.

$$\frac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\frac{\varphi r}{q} - \frac{H\omega s}{qf}\right) \times \frac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}} = -\ 4904.$$

Cette valeur est négative parce que A est négatif.

$$dS' : dY'' :: 100000 : \begin{Bmatrix} +\ 40470 \\ +\ 70379 \\ -\ 41388 \\ +\ 4904 \end{Bmatrix} :: +\ 100000 : +\ 74365.$$

(69.) On voit par ces calculs, que le lieu qui, le 1.er Avril 1764, a obſervé la fin de l'Éclipſe au coucher du Soleil, ſous le parallèle boréal de 50^d, étoit plus oriental de $8^h\ 39'\ 59''$ que celui qui a obſervé le commencement de l'Éclipſe au lever de cet aſtre : cette différence en longitude augmentoit à meſure que l'on s'approchoit du pôle boréal, elle diminuoit en deſcendant vers l'Équateur; ſa variation, exprimée en ſecondes de degré, étoit à la variation de la latitude comme 744 eſt à 1000. Les branches des ovales d'illumination s'éloignoient donc en remontant vers le pôle.

On auroit trouvé pareillement que le lieu qui, le 1.er Avril 1764, a obſervé le commencement de l'Éclipſe au coucher du Soleil ſous le parallèle boréal de 50^d, étoit plus oriental de $12^h\ 23'\ 29''$, ou (ce qui revient au même) plus occidental de $11^h\ 36'\ 31''$ que celui qui a obſervé la fin de l'Éclipſe au lever de cet aſtre : cette différence en longitude, conſidérée comme orientale, augmentoit à meſure que l'on s'approchoit du pôle boréal, elle diminuoit en deſcendant vers l'Équateur; ſa variation, exprimée en ſecondes de degré, étoit à la variation de la latitude comme 1473 eſt à 1000. Comme la différence en longitude ſurpaſſoit 12 heures, on en doit conclure que les branches des ovales d'illumination ſe rapprochoient réellement en remontant vers le pôle.

(70.) Si l'on jette les yeux ſur les équations des *§. 65 & 66*, on verra que la ſuppoſition de $Y' = 0$ réduit ces équations à

$$2m' - 2 \times \frac{3600''\zeta\varphi f}{nqr} \mp \frac{3600''\zeta}{nr}\left[\sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}\right] = 0.$$

La ſuppoſition de $Y' = 0$ détermine évidemment les interſections des ovales d'illumination. J'ai donc eu raiſon de dire, *(§. 61)* que dans le cas des interſections de ces ovales, on avoit à réſoudre une équation de cette forme,

Arc ſémi-diurne égale fonction du ſinus & du coſinus de la latitude.

(71.) Dans les équations

$$r\,dY'' = dS' \begin{cases} \dfrac{2pr^2}{cf} + \dfrac{2\zeta v H\varphi cs}{nr^2qf} \mp \dfrac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\dfrac{\varphi r}{q} + \dfrac{H\omega s}{qf}\right) \dfrac{A'}{\sqrt{(L^2 - A'^2)}} \\ \mp \dfrac{\zeta vc}{nr^2} \times \left(\dfrac{\varphi r}{q} - \dfrac{H\omega s}{qf}\right) \times \dfrac{A}{\sqrt{(L^2 - A^2)}}. \end{cases}$$

Soit que l'on ſuppoſe

$$\sqrt{(L^2 - A^2)} = 0 \quad \sqrt{(L^2 - A'^2)} = 0 \text{ ou } f = 0;$$

la valeur de dY'' devient infinie. Ces ſuppoſitions (*Section cinquième*) donnent les ſommets des courbes d'illumination. On voit donc qu'aux ſommets des courbes d'illumination, la variation de la différence en longitude eſt à la variation de la latitude dans un rapport infini.

Détermination de la durée de l'Éclipſe, abſtraction faite du mouvement diurne.

(72.) Avant de déterminer les interſections des courbes d'illumination, il faut encore réſoudre une queſtion que l'on peut expoſer de la manière ſuivante. Pour chaque obſervateur, la durée de l'Éclipſe eſt d'un certain nombre de ſecondes horaires : cette durée eſt le réſultat du mouvement de la Lune dans ſon orbite, combiné avec le mouvement diurne de l'obſervateur. Suppoſons que le mouvement de rotation de la Terre ſoit ſuſpendu, & que l'obſervateur conſerve toujours la même poſition que celle qu'il a, au commencement ou à la fin de l'Éclipſe; la durée du phénomène ne dépendra plus que du mouvement de la Lune dans ſon orbite ; elle ſera différente de celle obſervée dans la ſuppoſition de la rotation de la Terre. On peut donc demander quelle eût été cette durée dans cette nouvelle hypothèſe, & conſéquemment pour quelle quantité le mouvement diurne eſt entré dans la durée de l'Éclipſe.

(73.) Pour réſoudre le Problème,

Soit

$$'L = \frac{\sigma \tau' r E}{\pi \zeta \partial'} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}, \text{ contact intérieur.}$$

$$'L = \frac{\sigma \tau r E}{} + \frac{\delta \tau' r}{\pi \zeta}, \text{ contact extérieur.}$$

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{qs\varphi}{r^2} + \frac{cg\rho\omega}{r^3} + \frac{ch\rho\rho\varphi}{r^4}$$
$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg\rho\varphi}{r^3} + \frac{ch\rho\rho\omega}{r^4}$$
$$E = \xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho qh\pi}{r^4}.$$

Valeurs correspondantes à la fin du phénomène, observée dans un lieu quelconque N.

b le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à la fin du phénomène, observée dans le lieu N.

$$A' = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{qs\varphi}{r^2} + \frac{cg\rho\omega}{r^3} + \frac{ch\rho\rho\varphi}{r^4}$$
$$F' = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg\rho\varphi}{r^3} + \frac{ch\rho\rho\omega}{r^4}$$
$$E' = \xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho qh\pi}{r^4}.$$

Valeurs correspondantes au commencement du phénomène, observé dans le lieu N.

b' le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'au commencement du phénomène, observé dans le lieu N.

Il est évident que l'on a en général

$$b - b' = \frac{3600''\zeta}{nr} \times [F' - F + \sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

$b - b'$ = durée totale de l'Éclipse dans le lieu N.

Mais si l'on suppose le mouvement horaire suspendu, l'Observateur ne changera pas de cercle horaire, il verra le commencement & la fin de l'Éclipse, lorsque le Soleil sera dans le même cercle, les valeurs A, A', F, F', E, E', seront identiques.

On aura donc

$$\text{Durée de l'Éclipse} = 2 \times \frac{3600''\zeta}{nr} \times \begin{cases} \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}. \\ \text{ou} \\ \sqrt{[(L + A') \times (L - A')]}. \end{cases}$$

Suivant que l'on demandera quelle eût été la durée du phénomène dans l'hypothèse que l'Observateur eut toujours conservé la position qu'il avoit à la fin ou au commencement de l'Éclipse.

(74.) Telle est en général, la solution du Problème proposé. Dans le cas particulier du lever & du coucher du Soleil, on a

$L =$

$$L = \frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial'} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}, \text{ contact intérieur.}$$

$$L = \frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}, \text{ contact extérieur.}$$

$$f = \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}.$$

Lever du Soleil. | *Coucher du Soleil.*

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f\omega}{q}. \quad \Big| \quad A' = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f\omega}{q}.$$

$$\text{Durée de l'Éclipse} = 2 \times \frac{3600''\zeta}{nr} \times \begin{cases} \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]} \\ \text{ou} \\ \sqrt{[(L + A') \times (L - A')]}. \end{cases}$$

Suivant que l'on demande quelle eût été la durée du phénomène dans l'hypothèse que l'Observateur eut toujours conservé la position qu'il avoit, lorsque l'Éclipse commençoit ou finissoit pour lui, au lever ou au coucher du Soleil.

Voyons quel usage on peut faire du Problème que nous venons de résoudre.

(75.) J'ai remarqué, §. 32, que les sommets des courbes d'illumination déterminés par les équations du §. 31 sont situés sous le dernier des parallèles terrestres, où le Soleil puisse se lever ou se coucher; relativement à ces sommets le Soleil n'est qu'un instant à l'horizon. L'Astronomie nous apprend que l'arc sémi-diurne varie avec une très-grande rapidité dans les latitudes voisines de ces sommets. Quelques minutes de différence sur la latitude du parallèle introduisent une très-grande altération dans la durée du jour. Cette réflexion démontre qu'il n'est pas possible que les courbes d'illumination aient une intersection dans l'hémisphère boréal, si les sommets de ces courbes donnés par les équations du §. 31 sont imaginaires dans l'hémisphère boréal; qu'il est pareillement impossible que les courbes d'illumination aient une intersection dans l'hémisphère austral, à moins que les sommets de ces courbes déterminés par les équations du §. 31, ne soient réels dans l'hémisphère austral.

Supposons en effet que les sommets soient imaginaires; on doit conclure que sous les parallèles déterminés par les formules du §. 31, aucun lieu ne peut voir le disque du Soleil entamé par la Lune, même instantanément, au lever ou au coucher du Soleil; supposons maintenant que l'on redescende un peu vers l'Équateur, on pourra retrouver l'Éclipse au lever ou au coucher de cet Astre. Par la supposition, la durée de l'Éclipse n'est pas même instantanée sous les parallèles des sommets; elle ne peut donc être que fort petite dans les points de la Terre que nous considérons. L'Astronomie nous apprend que vers les parallèles des sommets du §. 31, l'arc sémi-diurne varie avec une très-grande rapidité; on aura donc essentiellement une durée du phénomène moindre que la durée du jour ou de la nuit.

Les raisonnemens précédens peuvent servir à démontrer que dans tous les cas la latitude du lieu qui voit le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre, ou le commencement au coucher du Soleil & la fin au lever de cet astre, ne doit pas être fort différente de celle des sommets des courbes d'illumination.

(76.) Vers les sommets des courbes d'illumination, déterminés par les formules du §. 31, les rayons des parallèles terrestres sont fort petits; le mouvement de rotation de la Terre influe donc peu sur la durée de l'Éclipse; on aura par conséquent une idée approchée de l'arc sémi-diurne ou sémi-nocturne du lieu qui voit le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre, ou le commencement au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet astre; en calculant quelle eût été la demi-durée de l'Éclipse aux sommets de la courbe d'illumination dans l'hypothèse que le mouvement diurne de la Terre vint à être suspendu.

(77.) J'ai fait voir (§. 31) qu'aux sommets de la courbe d'illumination l'on a

Hémisphère boréal.

$$A = \frac{\Psi l}{\zeta} - \frac{\varphi}{r} \times \frac{r^2 \rho}{\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}};$$

Hémisphère austral.

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} + \frac{\varphi}{r} \times \frac{r^2 \rho}{\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}.$$

Soit donc

y le nombre de secondes horaires égal à la demi-durée de l'Éclipse aux sommets de la courbe d'illumination dans l'hypothèse que le mouvement diurne de la Terre vint à être suspendu.

h'' le cosinus de l'arc de l'Équateur correspondant au nombre y de secondes horaires.

$\mathcal{S}$ la latitude corrigée du lieu dont la demi-durée du jour ou de la nuit est égale à y.

On aura

$$y = \frac{3600'' \zeta}{n r} \times \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}.$$

$$\text{Tangente } \mathcal{S} = - \frac{q\rho}{pr} \times h''.$$

Comme la plus grande durée de l'Éclipse pour un lieu particulier, ne peut guère surpasser trois heures; dans l'hémisphère boréal le phénomène se passe pendant le jour lorsque la déclinaison du Soleil est australe; le commencement de l'Éclipse arrive au lever du Soleil & la fin au coucher de cet astre; on doit faire alors h'' positive.

Lorsque la déclinaison du Soleil est boréale, le phénomène se passe pendant la nuit; le commencement de l'Éclipse arrive au coucher du Soleil & la fin au lever de cet astre; on doit faire h'' négative.

Dans l'hémisphère austral le phénomène se passe pendant le jour lorsque la déclinaison du Soleil est boréale; le commencement de l'Éclipse arrive au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet astre; on doit faire h'' positive.

Lorsque la déclinaison du Soleil est australe, le phénomène se passe pendant la nuit; le commencement de l'éclipse arrive au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet astre; on doit faire h'' négative.

Si l'on applique le calcul à l'Éclipse du 1.er Avril 1764, on

trouvera pour les contacts extérieurs des limbes,

Hémisphère boréal.	*Hémisphère austral.*
$A = - 14524.$	$A = + 160842.$
$L + A = + 42444.$	$L + A = + 217810.$
$L - A = + 71492.$	$L - A = - 103874.$
$y = 3909''.$	y imaginaire.
$h'' = -$ cosin. $16^d\ 17'\ 15''.$	S imaginaire.
$S = 85^d\ 0'\ 50''.$	

On voit donc que dans l'hémisphère boréal on a pu observer le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet astre.

Il n'y a donc eu dans l'hémisphère austral aucun lieu qui ait pu voir le commencement de l'Éclipse au lever du Soleil & la fin au coucher de cet astre, ou réciproquement le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet astre.

(78.) Rien de plus simple que de démontrer, ainsi que je l'ai avancé, *§. 75*, que vers les sommets des courbes d'illumination, déterminés par les formules du *§. 31*, l'arc sémi-diurne varie avec une très-grande rapidité; ou, ce qui revient au même, que la variation de l'arc sémi-diurne est infiniment plus grande que celle de la latitude. Pour le prouver, soit H l'arc sémi-diurne, h' son cosinus, g' son sinus, S la latitude du parallèle, & conservons toutes les autres dénominations de cet ouvrage.

On a vu (*§. 25*) que l'on a en général $h' = -\frac{pr^2 s}{c\rho q}$; donc

$$dh' = -\frac{pr^2 s}{c\rho q} \times \frac{ds}{s} + \frac{pr^2 s}{c\rho q} \times \frac{dc}{c} = h' \times \left(\frac{dc}{c} - \frac{ds}{s}\right) = -\frac{h' r^2 ds}{c^2 s};$$

mais $dh' = -\frac{g' dH}{r}$, $ds = \frac{c dS}{r}$; donc $dH = \frac{h' r^2 dS}{g' c s}$. Dans le cas des sommets $h' = \pm r$, $g' = 0$; Donc dH est à dS dans un rapport infini.

Analyse pour déterminer les interſections des courbes d'illumination.

(79.) Je ſuppoſerai, dans cette recherche, que l'on a conſtaté par la méthode précédente, que les courbes d'illumination peuvent avoir des points d'interſection dans l'hémiſphère pour lequel on calcule. Vainement, en effet, chercheroit-on les interſections de ces courbes, s'il étoit démontré que leurs branches ne peuvent pas ſe couper.

(80.) Je remarque que lorſque l'on connoît à peu près ſous quel parallèle les ovales d'illumination ont leur interſection, il eſt aiſé d'avoir très-promptement la correction qu'il faut faire à cette première latitude pour tomber rigoureuſement ſur le parallèle qui ſatisfait à la queſtion.

Soit S cette latitude approchée, ou plutôt la latitude corrigée correſpondante. Je cherche, par le premier ou par le ſecond ſyſtème d'équations corelatives du §. *65* ou *66*, ſuivant que la nature de la queſtion le détermine, quelle eſt ſous le parallèle, dont la latitude corrigée $= S$, la différence en longitude des lieux qui obſervent le commencement de l'Éclipſe au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet aſtre, ou réciproquement; avec la loi qui règne entre la variation de cette différence en longitude, & la variation de la latitude ; c'eſt-à-dire, que je calcule pour le parallèle dont la latitude corrigée $= S$, les valeurs correſpondantes de Y', & de $\frac{dS'}{dY''}$.

Si la variation de la latitude étoit à la variation de la différence en longitude dans un rapport conſtant pour tous les parallèles, il eſt évident que l'on auroit

$$\text{Latitude corrigée qui ſatisfait au Problème} = S + 15\, Y' \, \frac{dS'}{dY''}.$$

Mais cette équation n'eſt pas rigoureuſe. Je cherche donc, ſous le nouveau parallèle, la différence en longitude des lieux qui obſervent le commencement de l'Éclipſe au lever du Soleil, & la fin au coucher de cet aſtre, ou réciproquement; avec la loi qui

règne entre la variation de la différence en longitude, & la variation de la latitude; c'est-à-dire, que je calcule pour le parallèle, dont la latitude corrigée égale $S + 15\, Y' \times \frac{dS'}{dY''}$, les valeurs correspondantes de Y', & de $\frac{dS'}{dY''}$.

Pour ne pas confondre ces résultats, je nomme ces quantités

$$Y'\,(2) \;\&\; \frac{dS'}{dY''}\,(2),$$

& j'ai, à cause de la loi de continuité,

Latitude corrigée $= S + 15\, Y' \frac{dS'}{dY''} + 15\, Y'(2) \times \frac{dS'}{dY''}\,(2)$.

(81.) Si l'on vouloit avoir une expression de la latitude encore plus approchée; soit X la quantité qu'il faut ajouter à l'expression de la latitude du *paragraphe précédent;* ou, si l'on veut, la quantité qu'il faut ajouter au terme $15\, Y'\,(2)\, \frac{dS'}{dY''}\,(2)$, pour tomber sur la valeur rigoureuse de la latitude.

En vertu de la loi de continuité qui est suffisamment établie entre les grandeurs successives $15\, Y' \frac{dS'}{dY''}$, $15\, Y'(2) \frac{dS'}{dY''}\,(2)$, &c. & les différences des quantités successives Y', $Y'\,(2)$ &c. on a la proportion suivante:

$$X : 15\, Y'(2)\, \frac{dS'}{dY''}\,(2) :: Y'(2) - Y'\,(3) : Y' - Y'\,(2).$$

Dans cette dernière proportion la quantité $Y'\,(3)$ est la valeur de Y' qui a lieu pour le parallèle dont la latitude corrigée $= S + 15\, Y' \frac{dS'}{dY''} + 15\, Y'\,(2) \times \frac{dS'}{dY''}\,(2)$; cette quantité est évidemment infiniment petite, relativement à $Y'\,(2)$; on peut donc n'y avoir aucun égard dans le calcul; on aura alors

$$X : 15\; Y'\,(2)\, \frac{dS'}{dY''}\,(2) :: Y'\,(2) : Y' - Y'\,(2).$$

$$X = 15\, Y'\,(2)\, \frac{dS'}{dY''}\,(2) \times \frac{Y'\,(2)}{Y' - Y'(2)}.$$

Latitude corrigée

$$= S + 15\, Y' \frac{dS'}{dY''} + 15\, Y'(2) \times \frac{dS'}{dY''}(2) + 15\, Y'(2) \frac{dS'}{dY''}(2) \times \frac{Y'(2)}{Y' - Y'(2)}$$

$$= S + 15\, Y' \frac{dS'}{dY''} + 15\, Y'(2) \frac{dS'}{dY''}(2) \times \frac{Y'}{Y' - Y'(2)};$$

c'eſt de cette dernière formule dont je ferai uſage par la ſuite.

(82.) Il eſt bien facile maintenant de déterminer les interſections des ovales d'illuminations. Par les formules du §. 77, je cherche ſous quel parallèle l'arc ſémi-diurne ou l'arc ſéminocturne eſt égal à la demi-durée qu'auroit eue l'Éclipſe aux ſommets des courbes d'illumination, déterminés par les équations du §. 31, dans l'hypothèſe que la rotation de la Terre vint à ceſſer. Soit S la latitude de ce parallèle, ou plutôt ſa latitude corrigée; c'eſt de cette latitude approchée dont il faut faire uſage dans les calculs preſcrits §. 80. Je cherche donc pour cette latitude, les valeurs de Y', & de $\frac{dS'}{dY''}$, en ayant égard aux circonſtances du Problème, pour employer de préférence les équations du §. 65 ou du §. 66; je fais enſuite les mêmes calculs pour le parallèle dont la latitude corrigée $= S + 15\, Y' \times \frac{dS'}{dY''}$, je nomme $Y'(2)$, $\frac{dS'}{dY''}(2)$ ces nouvelles quantités, afin de ne les pas confondre avec les réſultats précédens; je porte toutes ces valeurs dans la formule du §. 81, & j'ai la ſolution de la queſtion propoſée.

(83.) Quand on connoîtra la latitude du lieu qui ſatisfait au Problème, on déterminera, par les méthodes générales, l'heure que l'on compte dans ce lieu au commencement & à la fin de l'Éclipſe; le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis la conjonction juſqu'au commencement & à la fin du phénomène; & la longitude du lieu qui l'obſerve.

(84.) Lors de l'Éclipſe du 1.er Avril 1764, la latitude corrigée du lieu qui ſatisfaiſoit au Problème, étoit de 85d 1′ 47″,

& sa latitude vraie de $85^d\ 3'\ 28''$, boréale. On comptoit dans ce lieu $10^h\ 57'\ 24''$ du soir, lors du commencement de l'Éclipse, & $1^h\ 2'\ 36''$ du matin lors de la fin; sa longitude étoit de $169^d\ 47'\ 38''$ occidentale.

J'ai cru qu'il étoit inutile de mettre sous les yeux le Type du calcul pour l'Éclipse du 1.er Avril 1764; on auroit vu que souvent il est superflu de faire usage de la totalité de l'équation du *§. 81;* en effet, comme le terme $15\ Y'\ \frac{dS'}{dY''}$ ne donnoit déjà qu'une correction de $57''$, le troisième terme de cette équation n'auroit évidemment donné qu'une correction inappréciable.

(85.) Il est aisé de voir que les sommets des courbes d'illumination donnés par l'équation du *§. 31*, & le point déterminé par les formules précédentes, forment une espèce de triangle curviligne, dont les côtés sont 1.° l'arc du parallèle compris entre les deux sommets; 2.° les branches de la courbe d'illumination, compris entre chacun de ces sommets, & le point que je viens d'apprendre à connoître. D'ailleurs les valeurs de Y' des *§. 65 & 66* donnent pour chaque parallèle, la distance des points corelatifs de ce triangle; on ne peut donc rien desirer, ce me semble, sur sa nature, puisque toutes ses parties sont déterminées par mes formules.

SECTION NEUVIÈME.

Détermination du rapport entre l'accroissement de la distance apparente des centres du Soleil & de la Lune, & l'accroissement du temps.

(86.) Quoiqu'au premier coup d'œil la détermination du rapport entre l'accroissement de la distance apparente des centres du Soleil & de la Lune, & l'accroissement du temps pour un lieu & pour une heure quelconques, paroisse étrangère aux courbes d'illumination; il est cependant nécessaire de résoudre cette question, si l'on

ſi l'on veut ne laiſſer aucune incertitude ſur quelques cas particulier de ces courbes. J'ai remarqué en effet, *§. 27*, que quoiqu'en général, des deux valeurs de b déterminées par les équations des *§. 11 & 25*, celle qui appartient à l'inſtant qui précède le paſſage apparent du centre de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative, déſigne le commencement de l'Éclipſe, & que celle qui appartient à l'inſtant qui ſuit le paſſage apparent du centre de la Lune par cette perpendiculaire, déſigne la fin de l'Éclipſe, la règle n'étoit cependant pas infaillible; il eſt donc indiſpenſable d'avoir une méthode qui ne puiſſe jamais induire en erreur. Pour y parvenir, je vais déterminer généralement le rapport entre l'accroiſſement de la diſtance apparente des centres du Soleil & de la Lune, & l'accroiſſement du temps; bien entendu que l'on n'aura recours à la méthode, que dans les cas particuliers où il reſtera quelqu'incertitude ſur les concluſions.

(87.) Soit

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{qs\varphi}{r^2} + \frac{cg\rho\omega}{r^3} + \frac{chp\rho\varphi}{r^4}$$

$$B = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg\rho\varphi}{r^3} + \frac{chp\rho\omega}{r^4} + b \times \frac{nr}{3600''\zeta};$$

$$E = \xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho qh\pi}{r^4} - \frac{\gamma b^2 \pi}{3600''^2 r};$$

λ = tangente (diſtance apparente des centres du Soleil & de la Lune);

J'ai démontré *(III.e Mémoire, §. 1.er)* que *Année 1765.*

$$\lambda = \frac{\pi\zeta}{Er} \times \sqrt{(A^2 + B^2)},$$

Si l'on différencie cette équation, on aura

$$d\lambda = \frac{\pi\zeta}{Er} \times \frac{(AdA + BdB)}{\sqrt{(A^2+B^2)}} - \frac{\pi\zeta dE}{E^2 r} \times \sqrt{(A^2 + B^2)};$$

ou plutôt

$$d\lambda = \frac{\pi\zeta}{Er} \times \frac{(AdA + BdB)}{\sqrt{(A^2+B^2)}};$$

Car, ainſi que je l'ai démontré dans le *4.e article de mon*

Année 1765. *III.e Mémoire*, la quantité $\frac{\pi\zeta dE}{E^2 r} \times \sqrt{(A^2 + B^2)}$; c'est-à-dire, celle qui provient du changement de distance de l'Observateur à l'horizon absolu, est infiniment petite relativement au changement occasionné dans les distances des centres par les mouvemens relatifs de la Lune & de l'Observateur; c'est-à-dire, relativement à la quantité donnée par le terme

$$\frac{\pi\zeta}{Er} \times \frac{(AdA + BdB)}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}.$$

(88.) Puisque dans la question présente, on considère les différentes distances successives des centres du Soleil & de la Lune, relativement à un même lieu, la latitude est une quantité connue; il faut, dans la différentiation, ne regarder comme variable que l'angle horaire. On a donc

$$dA = \frac{-cp\rho\varphi g dg + c\rho\omega r h dg}{r^4 h};$$

$$dB = \frac{-cp\rho\omega g dg - c\rho\varphi r h dg}{r^4 h} + \frac{n r^2 dg}{\zeta v h}.$$

Soit maintenant

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg\rho\varphi}{r^3} + \frac{chp\rho\omega}{r^4};$$

$$C = \frac{nr^2}{\zeta v} - \frac{cp\rho\omega g}{r^4} - \frac{c\rho\varphi h}{r^3}.$$

$$D = \frac{cp\rho\varphi g}{r^4} - \frac{c\rho\omega h}{r^3}.$$

L'équation du *§. 87*, deviendra

$$d\lambda = \frac{\pi\zeta}{Er} \times \frac{[C \times (F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}) - AD]}{\sqrt{[A^2 + (F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta})^2]}} \times \frac{dg}{h}.$$

D'ailleurs *(Trigonométrie rectiligne)*

$$\frac{dg}{h} = \frac{\text{diff. arc horaire}}{rr}.$$

$$d\lambda = \frac{r^2}{\text{cosinus}^2 \text{(distance des centres)}} \times \text{diff. distance des centres.}$$

Donc si l'on suppose, cosin. distance des centres égale r, attendu l'erreur infiniment petite que cette supposition introduit dans le calcul, on aura

Accroiss. de l'arc horaire est à l'accroiss. simultané de la distance des centres

$$\text{comme } r \text{ est à } \frac{\pi\zeta}{Er} \times \frac{[C \times (F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}) - AD]}{\sqrt{[A^2 + (F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta})^2]}}.$$

(89.) L'équation précédente peut être mise sous une forme plus commode.

Soit

H un angle dont la tangente égale $\dfrac{Ar}{F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}}$.

M un angle dont la tangente égale $\dfrac{Cr}{D}$.

On parviendra au résultat suivant,

Accroiss. de l'arc horaire est à l'accroiss. simultané de la distance des centres

$$\text{comme } r \text{ est à } \frac{\pi\zeta}{Er} \times \frac{D \times \text{sin.}\ (M - H)}{\text{cos.}\ M}.$$

(90.) Dans l'usage de cette formule on aura grand soin de ne point se tromper dans le choix des angles H & M qu'il faut employer; la règle est fort simple.

En général; la tangente de chacun de ces angles est déterminée par une fraction. Si le dénominateur & le numérateur sont tous deux positifs, l'angle est entre 0^d & 90^d; si le numérateur est positif & le dénominateur négatif, l'angle est entre 90^d & 180^d; si le numérateur & le dénominateur sont tous deux négatifs, l'angle est entre 180^d & 270^d; si le numérateur est négatif & le dénominateur positif, l'angle est entre 270^d & 360^d.

On évaluera l'angle $M - H$ relativement à ce premier calcul, en donnant à son sinus le signe qui lui convient; ce sinus sera positif si l'angle $M - H$ est entre 0^d & 180^d; le sinus sera négatif si l'angle est entre 180^d & 360^d. On donnera

pareillement à D & à cosinus M le signe convenable ; ce cosinus, par exemple, sera positif, si l'angle M est entre 0^d & 90^d, entre 270^d & 360^d; il sera négatif, si l'angle est entre 90^d & 270^d.

On peut remarquer que la plupart des quantités qui composent la formule du §. 89, entrent également dans la formule qui détermine la distance des centres.

Année 1765. En effet, on a (*III.e Mémoire*, §. *1.er*) $\lambda = \frac{A\zeta\pi}{E \times \text{sin. } H}$; la recherche de la distance apparente des centres du Soleil & de la Lune, & celle du rapport de l'accroissement de cette distance à l'accroissement du temps, sont donc liées entre elles.

(91.) Pour récapituler en peu de mots ce qui vient d'être démontré,

Soit

$$A = \overset{(A1)}{\frac{\psi l}{\zeta}} - \overset{(A2)}{\frac{qs\varphi}{r^2}} + \overset{(A3)}{\frac{cg\rho\omega}{r^3}} + \overset{(A4)}{\frac{ch\rho\rho\varphi}{r^4}};$$

$$F = \overset{(F1)}{\frac{\theta l}{\zeta}} - \overset{(F2)}{\frac{qs\omega}{r^2}} - \overset{(F3)}{\frac{cg\rho\varphi}{r^3}} + \overset{(F4)}{\frac{ch\rho\rho\omega}{r^4}};$$

$$E = \overset{(E1)}{\xi} - \overset{(E2)}{\frac{ps\pi}{r^2}} - \overset{(E3)}{\frac{c\rho q h\pi}{r^4}} - \overset{(E4)}{\frac{\gamma b^2\pi}{3600''^2 r}};$$

$$C = \overset{(C1)}{\frac{\eta r^2}{\zeta v}} - \overset{(C2)}{\frac{c\rho\rho\omega g}{r^4}} - \overset{(C3)}{\frac{c\rho\varphi h}{r^3}}.$$

$$D = \overset{(D1)}{\frac{c\rho\rho\varphi g}{r^4}} - \overset{(D1)}{\frac{c\rho\omega h}{r^3}};$$

$$\text{Tang. } H = \frac{Ar}{F + b \times \frac{\eta r}{3600''\zeta}}. \qquad \text{Tang. } M = \frac{Cr}{D};$$

λ = tangente (distance apparente des centres du Soleil & de la Lune).

On aura

$$\lambda = \frac{A\,\zeta\,\pi}{E\ \text{fin.}\ H}.$$

Accroiff. de l'arc horaire eft à l'accroiff. fimultané de la diftance des centres comme r eft à $\frac{\pi\zeta}{E r} \times D\, \frac{\text{fin.}\,(M - H)}{\text{cof.}\ M}$.

TABLE des quantités conftantes relatives à la préfente recherche pour l'Éclipfe du 1.er Avril 1764.

A.

(A1) $\frac{\psi l}{\zeta} = 73159.$

(A2) Log. $\frac{q\varphi}{r^2} = -\ 0,0586358.$

(A3) Log. $\frac{\rho\omega}{r^3} = -\ 10,3155335.$

(A4) Log. $\frac{p\rho\varphi}{r^4} = -\ 11,1307920.$

F.

(F1) $\frac{\theta l}{\zeta} = 7354.$

(F2) Log. $\frac{q\omega}{r^2} = -\ 0,3195149.$

(F3) Log. $\frac{\rho\varphi}{r^3} = -\ 10,0546544.$

(F4) Log. $\frac{p\rho\omega}{r^4} = -\ 11,3916711.$

Log. $\frac{n r}{3600''\zeta} = +\ 6,1490219.$

E.

(E1) $\xi = 99993.$

(E2) Log. $\frac{p\pi}{r^2} = -\ 2,8798346.$

(E3) Log. $\frac{\rho q\pi}{r^4} = -\ 11,8027850.$

(E4) Log. $\frac{\gamma\pi}{3600''^2 r} = -\ 1,6154055.$

Log. $\frac{\pi\zeta}{r} = +\ 8,1949633.$

C

(C1) $\frac{n r^2}{\zeta v} = 193801.$

(C2) Log. $\frac{p\rho\omega}{r^4} = -\ 11,3916711.$

(C3) Log. $\frac{\rho\varphi}{r^3} = -\ 10,0546544.$

D

(D1) Log. $\frac{p\rho\varphi}{r^4} = -\ 11,1307920.$

(D2) Log. $\frac{\rho\omega}{r^3} = -\ 10,3155335.$

EXEMPLE.

(92.) *On demande quels ont été, le 1.er Avril 1764, la diftance apparente des centres du Soleil & de la Lune, obfervée à Londres*

à $9^h\ 4'\ 33''$ du matin, & le rapport de l'accroissement de l'angle horaire à l'accroissement simultané de la distance des centres.

SOLUTION. Puisque la latitude de Londres est de $51^d\ 31'$ boréale, je conclus que la latitude corrigée est de $51^d\ 21'\ 33''$; que par conséquent

$$\left.\begin{array}{l} s = + \text{ sinus } 51^d\ 21'\ 33'' \\ c = + \text{ cosin. } 51.\ 21.\ 33 \end{array}\right\} \quad \text{Logarithme} \left\{\begin{array}{l} s = 9{,}8926912. \\ c = 9{,}7954889. \end{array}\right.$$

L'angle horaire du Soleil est de $43^d\ 51'\ 45''$, & l'heure de l'observation est entre six heures du matin & midi; donc

$$\left.\begin{array}{l} g = - \text{ sinus } 43^d\ 51'\ 45'' \\ h = + \text{ cosin. } 43.\ 51.\ 45 \end{array}\right\} \quad \text{Logarithme} \left\{\begin{array}{l} g = 9{,}8406895. \\ h = 9{,}8579381. \\ cg = 19{,}6361784. \\ ch = 19{,}6534270. \end{array}\right.$$

D'ailleurs Londres est plus occidental que Paris de $9'\ 41''$ de temps; donc puisque la conjonction est arrivée lorsqu'il étoit à Paris $10^h\ 31'\ 23''$, il étoit alors à Londres $10^h\ 21'\ 42''$ du matin; donc à $9^h\ 4'\ 33''$ la conjonction étoit encore éloignée de $4629''$; donc $b = -4629''$.

Log. $b = 3{,}6654872$. Log. $b^2 = 7{,}3309744$.

TYPE du Calcul.

$$b \times \frac{nr}{3600''\zeta}$$

$$\begin{array}{l} +\ 3{,}6654872\ldots\text{log. } b. \\ +\ 6{,}1490219\ldots\text{log. } \dfrac{nr}{3600''\zeta}. \\ \hline 9{,}8145091\ldots\text{log. } 65239. \end{array}$$

$$b \times \frac{nr}{3600''\zeta} = -65239.$$

$$A = + (A\,1) - (A\,2) - (A\,3) + (A\,4) \ldots\ldots (A\,1) = + 73159.$$

(A 2)	(A 3)	(A 4)
+9,8926912 . . . log. *s.*	+19,6361784 . . . log. *cg.*	+19,6534270 . . . log. *ch.*
−0,0586358.	−10,3155335.	−11,1307920.
9,8340554 . . . log. 68243.	9,3206449 . . . log. 20924.	8,5226350 . . . log. 3331.

$$A = - 12677 \ldots \text{log. } A = 9{,}1030165.$$

$$F = + (F\,1) - (F\,2) + (F\,3) + (F\,4) \ldots\ldots (F\,1) = + 7354.$$

(F 2)	(F 3)	(F 4)
+9,8926912 . . . log. *s.*	+19,6361784 . . . log. *cg.*	+19,6534270 . . . log. *ch.*
−0,3195149.	−10,0546544.	−11,3916711.
9,5731763 . . . log. 37426.	9,5815240 . . . log. 38153.	8,2617559 . . . log. 1827.

$$F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta} = - 55331 \ldots \text{log. } \left(F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}\right) = 9{,}7429685.$$

$$E = + (E\,1) - (E\,2) - (E\,3) \ldots\ldots (E\,1) = + 99993.$$

(E 2)	(E 3)	(E 4)
+9,8926912...log. *s.*	+19,6534270...log. *ch.*	+7,3309744...log. b^2.
−2,8798346.	−11,8027850.	−1,6154055.
7,0128566...log. 103.	7,8506420...log. 709.	5,7155689...log. 5.

$$E = + 99176 \ldots\ldots \text{log. } E = 9{,}9964066.$$

$$C = + (C\,1) + (C\,2) - (C\,3) \ldots (C\,1) = + 193801.$$

(C 2)	(C 3)
+19,6361784 . . . log. *cg.*	+19,6534270 . . . log. *ch.*
−11,3916711.	−10,0546544.
8,2445073 . . . log. 1756.	9,5987726 . . . log. 39698.
$C = + 155859.$	Log. C = 10,1927320.

$$D = - (D\,1) - (D\,2)$$

(D 1)	(D 2)
+19,6361784 . . . log. *cg.*	+19,6534270 . . . log. *ch.*
−11,1307920.	−10,3155335.
8,5053864 . . . log. 3202.	9,3378935 . . . log. 21772.
$D = - 24974.$	Log. D = 9,3974881.

$+19,1030165 \ldots \log. Ar.$

$-\ 9,7429685 \ldots \log. (F + b \frac{nr}{3600''\zeta})$.

$9,3600480 \ldots \log.$ Tang. H.

Tang. H positive.

Et comme A & $F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}$ sont négat.

$H = 192^d\ 54'\ 15''$.

Log. sinus $H = 9,3489300$.

$+20,1927320 \ldots \log. Cr.$

$-\ 9,3974881 \ldots \log. D.$

$10,7952439 \ldots \log.$ Tang. M.

Tang. M négative.

Et comme C est positif & D négatif.

$M = 99^d\ 6'\ 12''$.

Log. cosinus $M = 9,1992500$.

$$M - H = \left\{ \begin{array}{l} +\ 99^d\ 6'\ 12'' \\ -\ 192.\ 54.\ 15 \end{array} \right\} = -\ 93^d\ 48'\ 3'' = +\ 266^d\ 11'\ 57''.$$

Log. sinus $(M - H) = 9,9990437$.

sin. $(M - H)$ négatif, cosin. M négatif.

$\overline{\lambda}$

$+\ 18,1949633 \ldots \log. \zeta\pi.$
$+\ \ 9,1030165 \ldots \log. A.$
$+\ 27,2979798.$
$-\ \ 9,9964066 \ldots \log. E.$
$+\ 17,3015732.$
$-\ \ 9,3489300 \ldots \log.$ sin. H.
$7,9526432 \ldots \log. \lambda$

Distance des centres $= 30'\ 49'',5$.

$$\frac{\pi\zeta}{Er} \times D\ \frac{\text{sin.}\ (M - H)}{\text{cosin.}\ M}.$$

$+\ \ 8,1949633 \ldots \log. \frac{\pi\zeta}{r}.$
$+\ \ 9,3974881 \ldots \log. D.$
$+\ \ 9,9990437 \ldots \log.$ sin. $(M - H)$.
$+\ 27,5914951.$
$-\ \ 9,9964066 \ldots \log. E.$
$+\ 17,5950885.$
$-\ \ 9,1992500 \ldots \log.$ cos. M.
$8,3958385$

$$\frac{\pi\zeta}{Er} \times D\ \frac{\text{sin.}\ (M - H)}{\text{cos.}\ M} = -\ 2488$$

On voit

On voit par ce calcul, que, le 1.er Avril 1764, la diſtance des centres, obſervée à Londres à $9^h\ 4'\ 33''$ du matin, étoit de $30'\ 49'',5$; l'accroiſſement de l'angle horaire étoit à l'accroiſſement ſimultané de la diſtance des centres, comme plus cent mille eſt à moins deux mille quatre cents quatre-vingt-huit; la diſtance des centres étoit donc décroiſſante.

(93.) On ſait que 15 ſecondes de degré répondent à une ſeconde de temps; ſi donc on veut exprimer en ſecondes de degré, l'accroiſſement de la diſtance des centres correſpondant à un nombre x de ſecondes horaires, ou réciproquement; ſoit y le nombre de ſecondes de degré qui exprime l'accroiſſement de la diſtance des centres, puiſqu'en général $15\ x$ égale le nombre de ſecondes de degré du premier mobile écoulées pendant un nombre x de ſecondes de temps; que d'ailleurs l'accroiſſement de la diſtance des centres évalué en arc-de-cercle égale $\frac{ry}{206265''}$; que de plus l'accroiſſement de l'angle horaire évalué en arc-de-cercle égale $\frac{15\,rx}{206265''}$; on aura

$$15\ x\ \frac{\pi\,\zeta\,D\ \text{ſinus}\ (M - H)}{E\,r\ \text{coſinus}\ M} - ry = 0.$$

Cette formule nous apprend que, le 1.er Avril 1764, la diſtance des centres obſervée à Londres à $9^h\ 4'\ 33''$ du matin, décroiſſoit de $1'',1195$ de degré en $3''$ de temps; c'eſt-à-dire d'une ſeconde de degré en $2'',680$ de temps.

(94.) On n'a pas beſoin de tout cet appareil de calcul pour les courbes d'illumination qui ont donné lieu à la queſtion préſente. Dans ce cas la plupart des valeurs telles que A, $F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}$, E, λ, ſeront connues par des opérations préliminaires, il ne s'agira donc que d'évaluer C & D; comme d'ailleurs il n'eſt queſtion que de prononcer ſi la diſtance des centres croît ou décroît, ſans qu'il ſoit néceſſaire de connoître la quantité préciſe de l'accroiſſement ou du décroiſſement de cette diſtance; on pourra ſe contenter de vérifier ſi $F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta} - \frac{AD}{C}$ eſt poſitif ou négatif.

Remarque ſur la méthode précédente, relativement aux paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil.

(95.) Je ſuis entré dans quelques détails ſur la queſtion propoſée dans la ſection préſente, attendu qu'elle peut être fort utile dans pluſieurs cas. C'eſt par elle que l'on peut calculer pour tous les lieux de la Terre, le temps que Vénus ou Mercure emploient à entrer ſur le Soleil, ou à ſortir du diſque de cet aſtre: cet uſage, quand il ſeroit unique, méritoit une conſidération particulière.

Le procédé par lequel nous venons de former l'équation du *§. 93*, donne lieu aux réflexions ſuivantes. Cette formule n'eſt autre choſe qu'une équation différencielle dans laquelle on a ſubſtitué, aux différencielles de l'angle horaire & de la diſtance des centres, l'accroiſſement ſimultané de ces quantités; les réſultats ſeront donc d'autant plus rigoureux que les temps ſeront plus courts. Lors des paſſages de Vénus & de Mercure ſur le diſque du Soleil, ces planètes emploient pluſieurs minutes à entrer ou à ſortir du diſque de cet aſtre. On pourroit donc craindre quelqu'inexactitude, ſi l'on ſe contentoit d'un ſeul calcul. Pour obvier à cet inconvénient, on ſera deux calculs, le premier avec les élémens qui conviennent au commencement du phénomène; le ſecond avec les élémens qui conviennent à la fin; la moyenne proportionnelle arithmétique entre les deux réſultats ſatisfera au Problème.

Méthode pour calculer directement le temps que Vénus ou Mercure emploient à entrer ſur le Soleil, ou à ſortir du diſque de cet aſtre.

(96.) Quoique la formule du §. *93* ſoit très-ſuffiſante pour déterminer avec exactitude le temps que Vénus ou Mercure emploient à entrer ſur le Soleil, ou à ſortir du diſque de cet aſtre; il eſt cependant poſſible de parvenir à une équation plus directe, mais alors elle ſera plus compliquée.

(97.) Pour déterminer cette nouvelle équation, je reprends la formule du *§. 88*, ou plutôt je la mets ſous la forme ſuivante;

Accroiſſement de la diſtance des centres

$$= \frac{\pi\zeta}{\xi r} \times \frac{[C \times (F + \frac{nr}{\zeta v} \int \frac{rdg}{h}) - AD]}{r\sqrt{[A^2 + (F + \frac{nr}{\zeta v} \int \frac{rdg}{h})^2]}} \times \text{accroiſſ. arc horaire.}$$

Cette équation n'eſt qu'une transformation de celle du §. 88, dans laquelle on a ſubſtitué ξ à E, & $\int \frac{rdg}{hv}$ à $\frac{b}{3600''}$.

Je remarque que puiſque cette équation exprime en général, le rapport entre l'accroiſſement de la diſtance des centres & l'accroiſſement du temps (car l'accroiſſement de l'arc horaire n'eſt autre choſe qu'une expreſſion de l'accroiſſement du temps), on peut ſuppoſer donné, un certain intervalle de temps, & demander quelle eſt, dans cette hypothèſe, la variation de l'accroiſſement de la diſtance des centres, dépendante de l'angle horaire au commencement de chacun de ces intervalles; il ne s'agit que de différencier l'équation précédente, en ſuppoſant variable l'angle horaire, & conſtante la quantité, accroiſſement de l'arc horaire, qui eſt un des facteurs de cette équation. Soit donc

$$N = \frac{c\rho\varphi g}{r^3} - \frac{c\rho\rho\omega h}{r^4} \qquad P = \frac{c\rho\omega g}{r^3} + \frac{c\rho\rho\varphi h}{r^4}.$$

On aura

Variation de l'accroiſſement de la diſtance des centres =

$$\frac{\pi\zeta}{\xi r} \times \left\{ \frac{(N \times (F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}) - AP)}{r\sqrt{[A^2 + (F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta})^2]}} + \frac{[AC + D \times (F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta})]^2}{r[A^2 + (F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta})^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \times \frac{\text{Accroiſſ.}^t\ \text{arc horaire}}{r}$$

Soit maintenant

H un angle dont la tangente égale $\frac{Ar}{F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}}$.

K un angle dont la tangente égale $\frac{Nr}{P}$.

M un angle dont la tangente égale $\frac{Cr}{D}$.

Q un angle dont la tangente égale $\frac{Dr}{C}$.

L'équation précédente deviendra

Variation de l'accroiſſement de la diſtance des centres $=$

$$\frac{\pi\zeta}{\xi r} \times \left(\frac{P \text{ſin.} (K - H)}{r \text{coſin.} K} + \frac{D^2 \text{ ſin. } H \text{ ſin.}^2 (Q + H)}{A r^2 \text{ ſin.}^2 Q}\right) \frac{\text{Accroiſſement}^2 \text{ de l'arc horaire}}{r}.$$

(98.) Si l'on demande, pour les différens lieux de la Terre, quelle eſt, dans un temps donné, la quantité dont les centres du Soleil & de la Lune s'approchent ou s'éloignent; il eſt évident que cette quantité eſt égale à l'accroiſſement de la diſtance des centres de ces corps, dû à la vîteſſe qu'ils ont au commencement de l'inſtant que l'on conſidère & que l'on ſuppoſe uniforme pendant le temps en queſtion, plus à l'accroiſſement de la diſtance dû à la variation de la vîteſſe, que l'on ſuppoſe pareillement varier d'une manière uniforme. On a donc (*§. 91 & 97*) pour expreſſion de cette quantité,

$$\text{accroiſſement de la diſtance des centres} = \frac{\pi\zeta D \text{ ſin.} (M - H)}{E r^2 \text{ coſin.} M} \times \text{accroiſſ. arc hor.}$$

$$+ \frac{\pi\zeta}{\xi r} \times \left(\frac{P \text{ſin.} (K - H)}{r \text{ coſin.} K} + \frac{D^2 \text{ ſin. } H \text{ ſin.}^2 (Q + H)}{A r^2 \text{ ſin.}^2 Q}\right) \times \frac{\text{accroiſſ.}^2 \text{ arc hor.}}{r}$$

(99.) Rien de plus ſimple que d'avoir en ſecondes de degré, l'expreſſion de l'accroiſſement de la diſtance des centres, correſpondant à un nombre x de ſecondes horaires; ou réciproquement. Soit y le nombre de ſecondes de degré qui exprime cet accroiſſement de diſtance des centres; puiſqu'une ſeconde de temps répond à 15 ſecondes du premier mobile, 15 x exprime le nombre de ſecondes du premier mobile écoulées pendant le temps x; d'ailleurs, l'accroiſſement de la diſtance des centres évalué en arc-de-cercle égale $\frac{ry}{206265''}$, l'accroiſſement de l'angle horaire évalué en arc-de-cercle égale $\frac{15\, rx}{206265''}$: on aura donc

$$\frac{206265''}{225} y - \frac{206265''}{15} \times \frac{\pi\zeta D \text{ ſin.} (M - H)}{E r^2 \text{ coſinus } M} x$$

$$- \frac{\pi\zeta}{\xi r} \times \left(\frac{P \text{ ſin.} (K - H)}{r \text{ coſin.} K} + \frac{D^2 \text{ ſin.} H \text{ ſin.}^2 (Q + H)}{A r^2 \text{ ſin.}^2 Q}\right) x^2 = 0;$$

Cette équation, pour être rigoureuse, n'a pas besoin, comme celle du §. 93, que les mouvemens apparens du Soleil & de la Lune soient uniformes pendant le temps que l'on considère; elle exige uniquement (ce qui est toujours vrai lorsque le temps n'est pas fort grand) que la vîtesse varie uniformément.

(100.) Pour récapituler en peu de mots ce qui vient d'être démontré :

Soit

$$A = \overset{(A1)}{\frac{\psi l}{\zeta}} - \overset{(A2)}{\frac{q s \varphi}{r^2}} + \overset{(A3)}{\frac{c g \rho \omega}{r^3}} + \overset{(A4)}{\frac{c h p \rho \varphi}{r^4}}.$$

$$F = \overset{(F1)}{\frac{\theta l}{\zeta}} - \overset{(F2)}{\frac{q s \omega}{r^2}} - \overset{(F3)}{\frac{c g \rho \varphi}{r^3}} + \overset{(F4)}{\frac{c h p \rho \omega}{r^4}}.$$

$$E = \overset{(E1)}{\xi} - \overset{(E2)}{\frac{p s \pi}{r^2}} - \overset{(E3)}{\frac{c \rho q h \pi}{r^4}}.$$

$$C = \overset{(C1)}{\frac{n r^2}{\zeta v}} - \overset{(C2)}{\frac{c p \rho \omega g}{r^4}} - \overset{(C3)}{\frac{c \rho \varphi h}{r^3}}.$$

$$D = \overset{(D1)}{\frac{c p \rho \varphi g}{r^4}} - \overset{(D2)}{\frac{c \rho \omega h}{r^3}}.$$

$$N = \overset{(N1)}{\frac{c g \rho \varphi}{r^3}} - \overset{(N2)}{\frac{c h p \rho \omega}{r^4}}.$$

$$P = \overset{(P1)}{\frac{c g \rho \omega}{r^3}} + \overset{(P2)}{\frac{c h p \rho \varphi}{r^4}};$$

$$\text{Tang. } H = \frac{A r}{\left(F + b \times \frac{n r}{3600'' \zeta}\right)}. \qquad \text{Tang. } M = \frac{C r}{D}.$$

$$\text{Tang. } Q = \frac{D r}{C}. \qquad \text{Tang. } K = \frac{N r}{P}.$$

y l'accroissement de la distance des centres, exprimé en secondes de degré.

x le nombre de secondes horaires correspondant.

$$R = \frac{\pi \zeta}{\xi r} \times \left(\frac{P \text{ sin.} (K - H)}{\text{cosin.} K} + \frac{D^2 \text{ sin.} H \text{ sin.}^2 (Q + H)}{A r \text{ sin.}^2 Q} \right)$$

$$T = \frac{206265''}{30} \times \frac{\left(\frac{\pi \zeta}{E r} \times \frac{D \text{ sin.} (M - H)}{\text{cosin.} M} \right)}{R}.$$

$$V = \frac{206265''}{225} \times \frac{r}{R}.$$

on aura $$x^2 + 2Tx - Vy = 0.$$

(101.) Dans l'usage de cette formule, on doit avoir grand soin de ne point se tromper dans le choix des angles H, M, Q, K. En général la tangente de chacun de ces angles est déterminée par une fraction. Si le numérateur & le dénominateur sont tous deux positifs, l'angle est entre 0^d & 90^d. Si le numérateur est positif & le dénominateur négatif, l'angle est entre 90^d & 180^d; si le numérateur & le dénominateur sont tous deux négatifs, l'angle est entre 180^d & 270^d; si le numérateur est négatif & le dénominateur positif, l'angle est entre 270^d & 360^d. On évaluera les angles $M - H$, $K - H$, $Q + H$ relativement à ce premier calcul, en donnant à leurs sinus le signe qui leur convient; ces sinus seront positifs si les angles sont entre 0^d & 180^d, ces sinus seront négatifs si les angles sont entre 180^d & 360^d. On donnera pareillement à cosinus M, cosinus K, le signe convenable; ces cosinus seront positifs si les angles sont entre 0^d & 90^d, entre 270^d & 360^d; ils seront négatifs si les angles sont entre 90^d & 270^d. On n'oubliera pas également de donner à P & à D le signe qui leur convient.

y est positif, lorsque la distance des centres du Soleil & de la Lune est croissante.

y est négatif, lorsque la distance est décroissante.

x positive, indique que la variation y a lieu dans un temps postérieur à celui pour lequel on a calculé.

x négative, indique que la variation y a lieu dans un temps antérieur à celui pour lequel on a calculé.

Usage de l'équation précédente pour déterminer les diamètres de Vénus & de Mercure, par la durée de leur entrée sur le disque du Soleil, ou de leur sortie du disque de cet astre.

(102.) L'équation du §. 100, ordonnée par rapport à y, peut faire conclure, avec beaucoup de précision, le diamètre de Vénus ou de Mercure, par la durée de leur entrée sur le disque du Soleil, ou de leur sortie du disque de cet astre, sur-tout si l'on a observé avec exactitude cette entrée ou cette sortie. Il est clair en effet que le diamètre de ces planètes est égal à la quantité dont la distance des centres a varié pendant le temps de leur entrée ou de leur sortie, ce que l'équation du §. 100 apprend à connoître.

Il est superflu d'avertir qu'il faut avoir égard aux altérations que les causes physiques peuvent apporter. Supposons en effet que les rayons solaires s'infléchissent en passant dans l'atmosphère de Vénus; comme dans cette hypothèse le premier contact est observé plus tard, & le second contact est observé plus tôt qu'ils n'arrivent véritablement; il est bien évident que les durées totales de l'entrée ou de la sortie sont altérées d'une manière quelconque. On concluroit donc, par cette méthode, un diamètre plus petit que ne l'est celui de la planète. Quoique je sois éloigné de rien affirmer sur cette hypothèse, cette remarque est importante pour juger sainement du degré d'exactitude de ces déterminations délicates. Je remarquerai que lors du passage de Vénus du 3 Juin 1769, les durées observées de l'entrée & de la sortie de cette planète, ont été, en général, plus courtes que les durées calculées. Cette différence vient-elle des observations? doit-elle être attribuée à quelque cause physique ou à quelqu'incertitude dans les élémens? c'est ce que je n'entreprendrai pas de décider.

(103.) Appliquons le calcul à l'Éclipse du 1.er Avril 1764, & cherchons quel a dû être, à Londres, vers $9^h\,4'\,33''$ du matin, le temps employé par le centre de la Lune, à s'approcher de $3''$ de degré, du centre du Soleil. Je suppose (ainsi qu'il est aisé de le constater par des calculs entièrement semblables à ceux du §. 92) que l'on avoit pour cet instant

$A = -\ 12677.$
$F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta} = -\ 55331.$
$E = +\ 99176.$
$C = +\ 155859.$
$D = -\ 24974.$
$N = -\ 39980.$
$P = -\ 17593.$

Log. $\left\{\begin{array}{l} A = 9{,}1030165. \\ F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}\ 9{,}7429685. \\ E = 9{,}9964066. \\ C = 10{,}1927320. \\ D = 9{,}3974881. \\ D^2 = 18{,}7949762. \\ N = 9{,}6018428. \\ P = 9{,}2453399. \end{array}\right.$

$H = 192^d\ 54'\ 15''$, $M = 99^d\ 6'\ 12''$, $Q = 350^d\ 53'\ 48''$, $K = 246^d\ 14'\ 55''$.
$M - H = 266^d\ 11'\ 57''$, $K - H = 53^d\ 20'\ 40''$, $Q + H = 183^d\ 48'\ 3''$.

		Log.
ſin. H =	ſin. 192^d 54′ 15″ nég.	9,3489300.
ſin. $(M-H)$ =	ſin. 266. 11. 57. nég.	9,9990437.
coſ. M =	coſin. 99. 6. 12. nég.	9,1992500.
ſin. $(K-H)$ =	ſin. 53. 20. 40. poſit.	9,9043038.
coſin. K =	coſin. 246. 14. 55. nég.	9,6050560.
ſin.$^2(Q+H)$ =	+ ſin.^{2} 183. 48. 3.	17,6428800.
ſin.$^2 Q$ =	+ ſin.^{2} 350. 53. 48.	18,3984980.

D'ailleurs, on ſuppoſe que la diſtance des centres décroiſſoit de 3″ de degré. Donc $y = -\ 3''$.

$\text{Log. } y = 0{,}4771213 \ldots \text{Log. } \frac{206265''}{30} = +\ 3{,}8373043. \text{ Log. } \frac{206265''}{225} = +\ 2{,}9622431.$

donc

$R = +\ 579{,}23$
T négatif.
V poſitif.

Log. $\left\{\begin{array}{ll} R & = 7{,}7628534. \\ T & = 4{,}4702544. \\ V & = 5{,}1993897 \\ Vy & = 5{,}6765110. \\ \sqrt{(Vy)} & = 2{,}8382555. \end{array}\right.$

Puiſque T & y ſont des quantités négatives, l'équation qui réſout la queſtion eſt

$$x^2 - 2Tx + Vy = 0.$$

Si je

Si je compare cette équation avec les équations générales du second degré (*IV.e Mémoire, §. 41 & suivans*); je vois que *Année 1766.* dans le cas que je discute

$$\text{sinus}\left\{\begin{matrix}B\\B'\end{matrix}\right\} = \frac{r\sqrt{(Vy)}}{T}:$$

$$x = \frac{\sqrt{(Vy)}}{r}\ \text{tang.}\ \frac{B}{2}. \quad\Big|\quad x = \frac{\sqrt{(Vy)}}{r}\ \text{tang.}\ \frac{B'}{2}.$$

Les angles B, B' sont chacun moindres que 180^d, les angles $\frac{B}{2}$, $\frac{B'}{2}$ sont par conséquent chacun moindres que 90^d, & les deux valeurs de x sont positives.

$$+\ 12{,}8382555\ldots\text{log. } r\sqrt{(Vy)}.$$
$$-\ 4{,}4702544\ldots\text{log. } T.$$
$$8{,}3680011\ldots\text{log. sinus}\left\{\begin{matrix}B\\B'\end{matrix}\right\}$$

$B = 1^d\ 20'\ 14''$.	$B' = 178^d\ 39'\ 46''$.
$\frac{B}{2} = 0.\ 40.\ 7.$	$\frac{B'}{2} = 89.\ 19.\ 53.$
$+\ 8{,}0670411$ . . log. tang. $\frac{B}{2}$.	$+\ 11{,}9329000$ . . log. tang. $\frac{B'}{2}$.
$+\ 2{,}8382555$ . . log. $\sqrt{(Vy)}$.	$+\ 2{,}8382555$ . . log. $\sqrt{(Vy)}$.
$0{,}9052966$ . . log. x.	$4{,}7711555$ . . log. x.
$x = +\ 8'',041$.	$x = +\ 59041''$.

La première valeur de x nous fait voir que, le 1.er Avril 1764, vers $9^h\ 4'\ 33''$ du matin à Londres, le centre de la Lune a employé $8'',041$ de temps à s'approcher de $3''$ de degré du centre du Soleil.

(104.) Cette solution est conforme à celle du *§. 93*; en effet, si l'on multiplie par 3 le nombre $2'',680$ qui exprime le temps employé par le centre de la Lune, à s'approcher d'une seconde de degré du centre du Soleil, on aura $8'',040$. Dans le cas particulier que nous considérons, les deux équations des *§. 93 & 100*, conduisent donc au même résultat, mais il faut observer que le temps du phénomène est très-court, & que par conséquent

les différences des résultats ont dû être nulles. On ne doit donc pas conclure qu'il y auroit toujours une parfaite identité entre ces résultats.

(105.) Des deux valeurs de l'équation

$$x^2 + 2Tx - Vy = 0,$$

celle qui ne devient pas nulle par la supposition de $y = 0$, n'appartient certainement pas au Problème astronomique que nous considérons. En effet, la seule racine utile est évidemment celle qui donne un temps nul lorsque l'accroissement de la distance des centres est nulle. Cette considération exclut la valeur $x = + 59041''$.

SECTION DIXIÈME.

Détermination des points de passage de la portion de la courbe d'illumination, appartenante au commencement de l'Éclipse, à la portion appartenante à la fin.

(106.) J'ai donné *(§. 94)* une méthode générale pour vérifier si un résultat quelconque appartient au commencement ou à la fin de l'Éclipse; je vais déterminer, dans cette section, d'une manière plus directe les points de passage de la portion de la courbe d'illumination appartenante au commencement de l'Éclipse, à la portion de la courbe appartenante à la fin.

(107.) Cette nouvelle question est intimément liée avec la détermination des sommets. J'ai fait voir, dans la *cinquième section de ce Mémoire*, que les sommets des courbes d'illumination sont donnés par deux équations différentes, celle du *§. 31* & celle du *§. 33.* J'ai remarqué que ces équations ne peuvent avoir plus de quatre racines réelles, quoiqu'au premier coup d'œil elles semblent en promettre huit; que par conséquent quatre de ces racines sont essentiellement imaginaires: examinons ce qui a lieu dans tous les cas, relativement à la question présente.

(108). Si les quatre sommets déterminés par les formules du *§. 31,* sont réels, comme il arrive presque toujours dans les passages de Vénus & de Mercure sur le disque du Soleil, la

question n'a aucune difficulté; l'ovale d'illumination appartenant au commencement de l'Éclipse est absolument distinct de celui qui appartient à la fin.

Soit

$$f = \sqrt{\left[\left(\frac{\rho q}{r} + s\,\frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2}\right) \times \left(\frac{\rho q}{r} - s\,\frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2}\right)\right]}.$$

Lever du Soleil.

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f\omega}{q}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f\varphi}{q}.$$

Coucher du Soleil.

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f\omega}{q}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f\varphi}{q}.$$

$L = \frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial'} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}$, s'il s'agit d'un contact intérieur;

$L = \frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\partial} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}$, s'il s'agit d'un contact extérieur;

L'ovale d'illumination appartenant au commencement de l'Éclipse, est entièrement déterminé par la plus négative ou la moins positive des deux valeurs

$$b = \frac{3600''\,\zeta}{nr}\,[-F - \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

$$b = \frac{3600''\,\zeta}{nr}\,[-F + \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

L'ovale d'illumination appartenant à la fin de l'Éclipse, est entièrement déterminé par la moins négative ou la plus positive des deux valeurs

$$b = \frac{3600''\,\zeta}{nr}\,[-F + \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

$$b = \frac{3600''\,\zeta}{nr}\,[-F - \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

bien entendu qu'il faut substituer successivement dans chacune de ces équations les valeurs de A & de F correspondantes au lever & au coucher du Soleil sous les différens parallèles terrestres.

(109.) La seule difficulté qui peut se rencontrer, c'est lorsque l'équation du §. 33 a toutes ses valeurs, ou du moins quelques-unes de ses valeurs réelles; la portion de la courbe d'illumination appartenante au commencement de l'Éclipse, n'est pas alors séparée de

celle qui appartient à la fin. Il est donc nécessaire de déterminer le point de passage.

Année 1768. (110.) Pour résoudre le Problème, il faut employer les équations de la section huitième de mon *VI.e Mémoire.* En effet, le passage de la portion de la courbe d'illumination appartenante au commencement de l'Éclipse, à la portion qui appartient à la fin, doit se faire nécessairement par un point de notre globe, relativement auquel le commencement & la fin de l'Éclipse ont lieu dans le même instant physique; la durée de l'Éclipse est donc instantanée pour ce point particulier, & par conséquent le contact des limbes est un *maximum* de phase relativement à ce point. Dans la section huitième de mon *VI.e Mémoire*, j'ai donné des formules pour déterminer les points de la Terre qui observent une plus grande phase assignée au lever & au coucher du Soleil; il est donc évident que ces formules résolvent le Problème proposé dans la section présente. On trouvera dans la table du paragraphe suivant, le résultat des calculs relatifs à la question présente.

SECTION ONZIÈME.

Application sommaire des théories précédentes à la courbe d'illumination proprement dite, pour l'Éclipse du 1.er Avril 1764.

(111.) J'ai cru qu'il seroit agréable aux Astronomes d'avoir sous les yeux une application sommaire des méthodes précédentes à la courbe d'illumination pour l'Éclipse du 1.er Avril 1764. Ce travail leur présentera une esquisse des principales recherches auxquelles je viens de me livrer; ils verront, d'un coup d'œil, dans quelle partie de notre globe la courbe d'illumination s'est étendue, & quelles étoient les principales propriétés de cette courbe. J'ai eu soin de distinguer par un titre particulier chacune de ces propriétés; le titre ne s'applique qu'à la solution immédiatement inférieure; les autres valeurs sans titre désignent les points des différens parallèles qui n'ont aucune propriété particulière; ils servent uniquement à développer la suite de la courbe.

Courbe d'illumination pour l'Éclipse du 1.er Avril 1764.

LATITUDES.	LONGITUDES DES LIEUX QUI ONT OBSERVÉ			
	LA FIN DE L'ÉCLIPSE au lever du Soleil.	LE COMMENCEMENT DE L'ÉCLIPSE au lever du Soleil.	LA FIN DE L'ÉCLIPSE au coucher du Soleil.	LE COMMENCEMENT DE L'ÉCLIPSE au coucher du Soleil.
	BRANCHES de la courbe d'illumination appartenantes au lever du Soleil.		*BRANCHES de la courbe d'illumination appartenantes au coucher du Soleil.*	
	Sommets de la courbe d'illumination. Section V.e §. 32.			
85^d 14′ 27″ bo calc.	173^d 49′ 30″ or.	153^d 36′ 0″ occ.	173^d 49′ 30″ or.	153^d 36′ 0″ occ.
	Lieu qui a vu le commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil & la fin au lever, ou intersection des branches de la courbe d'illumination. Section VIII.e §. 84.			
85. 3. 28...	169. 47. 38 occ.	....	....	169. 47. 38.
80. 0. 0...	119. 33. 29...	88. 13. 29...	107. 42. 14...	141. 11. 44 or.
	Plus grande largeur des branches appartenantes au coucher du Soleil. Section VI.e §. 44.			
75. 7. 22...	....	....	95. 35. 3...	129. 16. 3.
70. 0. 0...	98. 36. 35...	68. 32. 5...	88. 41. 35...	122. 9. 35.
	Plus petite largeur des branches appartenantes au lever du Soleil. Section VI.e §. 48.			
60. 53. 52...	88. 57. 58...	59. 17. 58.		
60. 0. 0...	88. 11. 22...	58. 30. 50...	81. 41. 5...	112. 58. 35.
	Lieu qui a vu le dernier contact extérieur des limbes visible sur la terre. Sect. VII.e §. 58.			
56. 17. 21...	....	....	80. 39. 17.	
50. 0. 0...	80. 39. 28...	50. 25. 28...	79. 34. 13...	105. 12. 43.
40. 0. 0...	76. 46. 10...	45. 17. 10...	81. 32. 10...	92. 34. 10.
	Point de passage de la portion de la courbe appartenante au commencement de l'Éclipse à la portion qui appartient à la fin. Section X.e *La durée de l'Éclipse a été instantanée pour ce point particulier de la terre, d'ailleurs le moins boréal de tous ceux qui ont vu la fin de l'Éclipse au coucher du Soleil.*			
38. 12. 2...	....	....	88. 13. 12.	
	Sommet de la courbe d'illumination. Section V.e §. 37.			
38. 10. 50...	....	....	....	88. 48. 17.

LATITUDES.	LONGITUDES DES LIEUX QUI ONT OBSERVÉ			
	LA FIN DE L'ÉCLIPSE au lever du Soleil.	LE COMMENCEMENT DE L'ÉCLIPSE au lever du Soleil.	LA FIN DE L'ÉCLIPSE au coucher du Soleil.	LE COMMENCEMENT DE L'ÉCLIPSE au coucher du Soleil.
	BRANCHES de la courbe d'illumination appartenantes au lever du Soleil.		*BRANCHES de la courbe d'illumination appartenantes au coucher du Soleil.*	
30^{d} 0′ 0″ boréale.	70^{d} 7′ 36″ occ.	37^{d} 16′ 6″ occ.		
20. 0. 0...	64. 36. 38...	30. 57. 48.		
	Plus grande largeur de l'ovale d'illumination appartenant au lever du Soleil. Sect. VI.e §. 44.			
18. 5. 24...	63. 41. 47...	30. 0. 47.		
10. 0. 0...	59. 51. 59...	26. 44. 29.		
0. 0. 0...	54. 46. 0...	24. 26. 30.		
	Lieu qui a vu le premier contact extérieur des limbes viſible ſur la terre. Section VI.e §. 58.			
1. 1. 55 auſtrale.	....	24. 20. 21.		
10. 0. 0...	48. 28. 1...	24. 55. 1.		
	Point de paſſage de la portion de la courbe appartenante au commencement de l'Éclipſe, à la portion qui appartient à la fin. Section X.e *La durée de l'Éclipſe a été inſtantanée pour ce point particulier de la terre, d'ailleurs le plus auſtral de ceux qui ont vu le commencement de l'Éclipſe au lever du Soleil.*			
19. 34. 23...	....	33. 56. 12.		
	Sommet de la courbe d'illumination. Section V.e §. 37.			
19. 36. 12...	34. 38. 17.			

(112.) Rien de plus ſimple que de tracer maintenant ſur un globe la courbe d'illumination pour l'Éclipſe du 1.er Avril 1764. Cette courbe étoit compoſée d'une ſuite continue de points qui formoient une eſpèce de huit de chiffre. La portion de la courbe appartenante à la fin de l'Éclipſe au lever du Soleil, commençoit ſous le parallèle auſtral de 19^{d} 34′ 23″, avec une longitude occidentale de 33^{d} 56′ 12″; c'eſt-à-dire, dans la mer qui ſépare l'Afrique de l'Amérique; elle traverſoit le Breſil,

le pays des Amazones, coupoit l'Équateur à l'embouchure de la rivière des Amazones, passoit à l'ouest de la Cayenne, laissoit un peu à l'est les îles du Vent, traversoit la nouvelle Angleterre, le lac Ontario, la baie d'Hudson dans sa partie occidentale, & venoit finir sous le parallèle de 85^d 14′ 27″, avec une longitude orientale de 173^d 49′ 30″.

La portion de la courbe appartenante au commencement de l'Éclipse au lever du Soleil, commençoit sous le parallèle austral de 19^d 34′ 23″, avec une longitude occidentale de 33^d 56′ 12″, c'est-à-dire, dans la mer qui sépare l'Afrique de l'Amérique; elle coupoit l'Équateur sous une longitude occidentale de 24^d 26′ 30″, passoit à l'ouest des îles du Cap Verd, traversoit la mer du nord, passoit à l'est du banc de Terre-Neuve, de la Terre de Labrador, à l'ouest de la baie de Bafins, & finissoit sous le parallèle de 85^d 14′ 27″, avec une longitude occidentale de 153^d 36′ 0″.

La portion de la courbe appartenante à la fin de l'Éclipse au coucher du Soleil, commençoit sous le parallèle boréal de 38^d 12′ 2″, avec une longitude orientale de 88^d 13′ 12″; elle s'étendoit dans le pays des Tartares indépendans, passoit à l'Est de Tobolsk, traversoit la Tartarie Russe, la mer glaciale, & finissoit sous le parallèle de 85^d 14′ 27″, avec une longitude orientale de 173^d 49′ 30″.

La portion de la courbe appartenante au commencement de l'Éclipse au coucher du Soleil, commençoit sous le parallèle boréal de 38^d 12′ 2″, avec une longitude orientale de 88^d 13′ 12″; elle s'étendoit dans la Tartarie Chinoise, dans la partie orientale de la Tartarie Russe, dans la mer glaciale, & venoit finir sous le parallèle de 85^d 14′ 27″, avec une longitude occidentale de 153^d 36′ 0″.

(113.) Le lieu qui a vû le premier contact extérieur des limbes, visible sur la terre, est situé en Amérique, aux environs de l'embouchure de la rivière des Amazones; celui qui a observé le dernier contact visible sur notre globe, est situé en Tartarie, très-près de la ville de Biélojerck; celui enfin qui a observé le

commencement de l'Éclipſe au coucher du Soleil, & la fin au lever de cet aſtre, eſt ſitué dans la mer glaciale, ſous une latitude de $85^d\ 3'\ 28''$, avec une longitude occidentale de $169^d\ 47'\ 38''$; c'eſt-à-dire, dans une partie de notre globe entièrement inconnue.

Remarque ſur une propriété des courbes d'illumination.

(114.) Si l'on jette les yeux ſur la table du *§. 111*, il eſt aiſé de voir que les courbes d'illumination ſont ſuſceptibles d'une eſpèce de *maximum*, je m'explique. Si l'on parcourt les différentes longitudes correſpondantes aux branches qui appartiennent à la fin de l'Éclipſe au coucher du Soleil, & au commencement de l'Éclipſe au lever de cet aſtre; il eſt bien évident que les longitudes, après avoir décru juſqu'à une certaine latitude, recommencent à croître, & réciproquement *. Le point de la courbe où ſe fait le paſſage de l'accroiſſement de la longitude au décroiſſement de cette même quantité, & réciproquement, eſt donc un véritable *maximum* géométrique que je dois déterminer.

(115.) Les équations démontrées dans cet ouvrage, donneront facilement la ſolution de ce Problème. Il eſt ſenſible en effet qu'il ne s'agit que de déterminer le *maximum* des longitudes correſpondantes aux différentes branches de la courbe d'illumination.

Soit

y la différence en longitude entre le lieu qui compte midi à l'inſtant de la conjonction, & celui qui, ſous un parallèle donné, obſerve le commencement ou la fin de l'Éclipſe au lever ou au coucher du Soleil.

m l'arc ſémi-diurne du parallèle.

β l'angle horaire qui meſure le temps écoulé depuis la conjonction juſqu'à l'inſtant du phénomène.

J'ai démontré qu'en général

$$y = m - \beta$$

la ſuppoſition de $dy = 0$, donne donc pour condition du Problème,

$$dm - d\beta = 0.$$

* Voyez le parallèle boréal de 50^d pour les branches qui appartiennent à la fin de l'Éclipſe au coucher du Soleil, & le parallèle auſtral de $1^d\ 1'\ 55$ pour les branches qui appartiennent au commencement de l'Éclipſe au lever de cet aſtre.

(116.)

(116.) Si l'on suppose

$$f = \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}$$

$$H = \frac{\rho^2 q^2}{r^3} + \frac{p^2}{r}.$$

On a (§. 64)

$$\beta = -\frac{\zeta v}{nr} \times \left[\frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} \pm \frac{f\varphi}{q} \pm \sqrt{\left(L^2 - \left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q}\right)^2\right)}\right].$$

$$dm = \frac{pr^2 ds}{c^2 f};\ df = -\frac{Hs\,ds}{fr};\ \text{donc}$$

$$d\beta = -\frac{\zeta v\,ds}{nr} \times \left\{ \begin{array}{l} \mp \dfrac{\left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q}\right) \times \left(-\frac{\varphi}{q} \pm \frac{H\omega s}{fqr}\right)}{\sqrt{\left[L^2 - \left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q}\right)^2\right]}} \\ + \left(-\frac{\omega}{q} \mp \frac{H\varphi s}{fqr}\right). \end{array} \right.$$

On a donc pour équation du Problème

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\left[L^2 - \left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q}\right)^2\right]} \times \left[\frac{pr^2}{c^2 f} + \frac{\zeta v}{nr}\left(-\frac{\omega}{q} \mp \frac{H\varphi s}{fqr}\right)\right] \\ \mp \frac{\zeta v}{nr} \times \left[\left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} \mp \frac{f\omega}{q}\right) \times \left(-\frac{\varphi}{q} \pm \frac{H\omega s}{fqr}\right)\right] \end{array} \right\} = 0;$$

(117.) Comme la question présente me paroît plus curieuse qu'utile, & que le résultat du calcul est d'un degré fort élevé, je me contente d'indiquer l'équation qui la résout. Il ne seroit cependant pas impossible de parvenir à l'équation finale, si quelque circonstance importante l'exigeoit.

(118.) Remarquons un cas particulier, celui de $p = 0$, & par conséquent de $q = r$. L'équation qui résout la question est alors

$$\left. \begin{array}{l} L^2 \times \left(-\omega \mp \frac{H\varphi s}{fr}\right)^2 \\ -\left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{r} \mp \frac{f\omega}{r}\right)^2 \times \left[\left(-\omega \mp \frac{H\varphi s}{fr}\right)^2 + \left(-\varphi \pm \frac{H\omega s}{fr}\right)^2\right] \end{array} \right\} = 0;$$

ou (à cause de $H = \frac{\rho^2}{r}$; & de $f = \frac{\rho c}{r}$).

$$L \times \left(-\omega \mp \frac{\varphi\rho s}{rc}\right) \mp \left(\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{r} \mp \frac{\omega\rho c}{r^2}\right) \times \sqrt{\left(r^2 + \frac{\rho^2 s^2}{c^2}\right)} = 0,$$

Cette dernière équation eſt identique avec celle qui réſout le Problème propoſé dans la ſection ſeptième de ce Mémoire, ainſi qu'il eſt aiſé de le vérifier *(§. 51)*. La raiſon en eſt bien ſimple; dans le cas de l'équinoxe, l'arc ſémi-diurne eſt une quantité conſtante pour tous les parallèles; la queſtion préſente eſt donc identique avec celle de la ſection ſeptième de ce Mémoire.

ARTICLE SECOND.

De quelques queſtions que l'on réſout par les équations aux courbes d'illumination, & que l'on peut regarder comme des cas particuliers de ces courbes.

SECTION PREMIÈRE.

De pluſieurs queſtions générales.

(119.) Je vais parcourir maintenant pluſieurs queſtions que l'on réſout par les équations générales aux courbes d'illumination, & que l'on peut regarder comme des cas particuliers de ces courbes. On pourroit demander, par exemple, quelle eſt la courbe qui paſſe par tous les points de la Terre, qui obſervent une phaſe quelconque, une heure avant ou après le coucher du Soleil; lorſque le Soleil a parcouru une certaine portion de ſon arc ſémi-diurne, le tiers, le quart, le cinquième, &c. lorſque cet aſtre a une certaine hauteur donnée; mais ces Problèmes que l'on peut varier à l'infini, ſont plutôt du reſſort de la Trigonométrie ſphérique, que l'objet de l'ouvrage que je me ſuis propoſé. En effet, tout conſiſte à déterminer trigonométriquement les angles horaires correſpondans aux inſtans qui ſatisfont au Problème; la queſtion ſe réſout alors par les équations générales aux courbes d'illumination des *§. 9 & ſuivans*.

(120.) Parmi ces différens Problèmes, il y en a un ſur-tout qui mérite une attention particulière: je veux parler de la courbe d'illumination qui a lieu lorſque le centre apparent du Soleil ſe trouve à l'horizon, en faiſant entrer dans la queſtion la conſidération des réfractions horizontales & de la parallaxe.

Soit

s' le ſinus } de la latitude vraie de l'Obſervateur.
c' le coſinus }

(121.) A cauſe de la très-grande diſtance du Soleil à la Terre, on peut démontrer que, ſans erreur ſenſible, le ſinus de la hauteur du Soleil ſur l'horizon, abſtraction faite de la réfraction & de la parallaxe, a en général pour expreſſion

$$\text{ſinus (hauteur du Soleil)} = \frac{c'qh}{r^2} + \frac{ps'}{r} \ *.$$

La parallaxe abaiſſe l'aſtre, & la réfraction l'élève; donc lorſque le Soleil eſt à l'horizon apparent, il eſt réellement élevé ſur l'horizon d'une quantité égale à la parallaxe moins la réfraction horizontale; donc à cet inſtant

$$\text{Sinus (hauteur vraie du } \odot) = \text{ſin. (parall. horiz.} - \text{réfract. horiz.)};$$

On a donc pour cet inſtant

$$h = -\frac{ps'r}{c'q} + \text{ſin. (parallaxe horizontale} - \text{réfraction horizontale)} \times \frac{r^2}{c'q}.$$

(122.) Puiſque l'on vient de déterminer l'heure que l'on compte ſous chaque parallèle terreſtre, à l'inſtant où le centre du Soleil eſt à l'horizon apparent, en ayant égard à la réfraction & à la parallaxe; la courbe d'illumination correſpondante peut ſe conſtruire par les équations générales des *§. 9 & ſuivans.*

SECTION DEUXIÈME.

Détermination de l'inſtant où un Obſervateur ſuppoſé au centre de la Terre, verroit une phaſe quelconque.

(123.) Rien de plus facile que de déterminer, par les équations générales aux courbes d'illumination, l'inſtant où un Obſervateur ſuppoſé au centre de la Terre, verroit une phaſe quelconque. En effet, puiſque le centre de la Terre coincide avec le centre de l'Équateur; il eſt ſenſible que l'on peut appliquer à ce point

* Cette équation n'eſt pas géométriquement exacte; elle ne peut cependant pas induire en erreur, vu la très-grande diſtance du Soleil, comparée à l'excentricité de notre globe. Je donnerai dans un autre Mémoire la véritable forme de cette équation.

particulier ce que l'on a démontré en général pour un point quelconque pris à la surface de la Terre, en supposant 1.° que la latitude du lieu soit nulle; 2.° que le parallèle terrestre soit concentré en un seul point; c'est-à-dire que le rayon du parallèle soit nul.

Année 1764. (124.) On a vu *(second Mémoire, §. 19)* que le rayon d'un parallèle terrestre quelconque a pour expression $\frac{c\rho}{r}$; la supposition que le parallèle soit concentré dans un seul point, donne donc $\frac{c\rho}{r} = 0$; de plus, puisque la latitude du lieu est supposée nulle, on a $s = 0$.

Soit donc

$L = \frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\delta'} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}$ s'il s'agit d'un contact intérieur.

$L = \frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\delta} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}$ s'il s'agit d'un contact extérieur.

$L = \frac{\xi r\lambda}{\pi\zeta}$ s'il s'agit d'une distance assignée des centres dont la tangente égale λ.

On aura

$$b = -\frac{3600''\zeta}{nr}\left[\frac{\theta l}{\zeta} + \sqrt{\left(L^2 - \frac{\psi^2 l^2}{\zeta^2}\right)}\right].$$

$$b = -\frac{3600''\zeta}{nr}\left[\frac{\theta l}{\zeta} - \sqrt{\left(L^2 - \frac{\psi^2 l^2}{\zeta^2}\right)}\right].$$

Des deux valeurs de b, la plus négative ou la moins positive appartient à l'instant où l'Éclipse est croissante relativement au centre de la Terre; l'autre valeur appartient à l'instant où l'Éclipse est décroissante.

(125.) Il est évident que si l'on suppose L moindre que $\mp\frac{\psi l}{\zeta}$, les valeurs de b sont imaginaires; l'Observateur placé au centre de la Terre ne pourroit donc voir le phénomène qu'autant que L surpasse $\pm\frac{\psi l}{\zeta}$, ou (ce qui revient au même) qu'autant que sinus (latitude de la Planète à l'instant de la conjonction) est moindre que $\pm\frac{\pi\zeta L}{\psi r}$.

Détermination de la plus courte distance apparente des centres, relativement au centre de la Terre.

(126.) Il est aisé de voir que lors du passage des valeurs réelles de b aux valeurs imaginaires

$$L \pm \frac{\psi l}{\zeta} = 0;$$

$$b = -\frac{3600''\zeta}{nr} \times \frac{\theta l}{\zeta},$$

On a donc

Pour déterminer la plus courte distance apparente des centres qu'un Observateur placé au centre de la Terre puisse observer,

$$\lambda = \pm \frac{\pi}{\xi} \times \frac{\psi l}{r}.$$

Pour déterminer la distance de l'instant du phénomène à l'instant de la conjonction,

$$b = -\frac{3600''}{n} \times \frac{\theta l}{r}.$$

(127.) Lors de l'Éclipse du 1.er Avril 1764, un Observateur placé au centre de la Terre, n'auroit pas vu le disque du Soleil éclipsé par la Lune; la plus courte distance des centres, relativement à cet Observateur, eût été de 39′ 24″ de degré, 8′ 42″ de temps avant la conjonction.

SECTION TROISIÈME.

Détermination du lieu où l'on peut observer une phase donnée lorsque le Soleil est au zenit de l'Observateur.

(128.) Parmi les différentes observations que l'on peut se proposer lors d'une Éclipse de Soleil, il y en a sur-tout une qu'il seroit à desirer que les circonstances permissent de faire avec exactitude; celle du commencement ou de la fin de l'Éclipse, lorsque le Soleil est au zénit de l'Observateur. Cette observation ne peut être affectée d'aucune des illusions optiques qui ont leur source dans les réfractions; & par cela seul elle devient fort importante. Je ferai voir un autre usage, non moins utile, de cette observation, lorsque je parlerai des secours que les Éclipses de Soleil peuvent fournir pour déterminer la figure de la Terre,

ſans aucune opération géodéſique. Je vais donc chercher à déterminer le lieu où l'on peut faire cette obſervation.

(129.) Puiſque par la ſuppoſition la phaſe arrive lorſque le Soleil eſt au zénit de l'Obſervateur, je conclus qu'il eſt midi dans le lieu de l'Obſervation, & que la déclinaiſon du Soleil égale la diſtance de l'Équateur au zénit vrai de l'Obſervateur; c'eſt-à-dire la latitude vraie *.

Donc

Sinus (angle horaire) $=$ o.

Coſinus (angle horaire) $= r$.

Tang. (déclinaiſon du ☉) $=$ tang. (latitude vraie de l'Obſervateur).

Année 1764. Mais (2.ᵉ *Mémoire*, §. 18)

Tang. (latitude vraie) $= \frac{\rho}{r} \times$ tang. (latitude corrigée) $= \frac{\rho s}{c}$.

donc

$$g = 0,\ h = r,\ \frac{pr}{q} = \frac{\rho s}{c}.$$

(130.) Les réflexions précédentes nous font voir que ſi l'on ſuppoſe

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} + \frac{pq\varphi(\rho - r) \times (\rho + r)}{r^2 \sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} + \frac{pq\omega(\rho - r) \times (\rho + r)}{r^2 \sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}.$$

$$E = \xi - \frac{\pi \sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}}{r^2}.$$

$L = \frac{\sigma \tau' r E}{\pi \zeta \partial'} - \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}$, s'il s'agit d'un contact intérieur.

$L = \frac{\sigma \tau' r E}{\pi \zeta \partial} + \frac{\delta \tau r}{\pi \zeta}$, s'il s'agit d'un contact extérieur.

$L = \frac{E r \lambda}{\pi \zeta}$, s'il s'agit d'une diſtance aſſignée des centres dont la tangente égale λ.

On aura pour déterminer l'inſtant phyſique où l'on pourra obſerver la phaſe aſſignée lorſque le Soleil eſt au zénit.

* Cette propoſition n'eſt pas rigoureuſement exacte, elle ne peut cependant pas induire en erreur, vu la très-grande diſtance du Soleil comparée à l'excentricité de notre globe: je donnerai dans un autre Mémoire la véritable forme de cette équation.

$$b = - \frac{3600''\zeta}{nr} \times F - \frac{3600''\zeta}{nr} \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}.$$

$$b = - \frac{3600''\zeta}{nr} \times F + \frac{3600''\zeta}{nr} \sqrt{[(L + A) \times (L - A)]}.$$

(131.) Des deux valeurs de b, la plus négative ou la moins positive appartient à l'Obſervateur qui voit la phaſe aſſignée avant le paſſage apparent du centre de la Planète par la perpendiculaire à l'orbite relative, menée par le centre du Soleil ; l'autre valeur déſigne le lieu qui voit la phaſe après le paſſage de la Lune par la perpendiculaire à l'orbite relative.

(132.) Rien de plus ſimple que la détermination de la longitude du lieu qui voit le phénomène ; en effet, puiſque nous venons de déterminer le nombre de ſecondes horaires écoulées depuis la conjonction juſqu'à l'inſtant du phénomène, & que d'ailleurs on compte midi dans le lieu ; on aura tout de ſuite la longitude du lieu par la méthode de l'*article VI du 3.ᵉ Mémoire.* *Année 1765.*

(133.) On remarquera que la quantité $\sqrt{(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2)}$ peut ſe calculer par la ſeconde Table du *§. 20 du II.ᵉ Mémoire.* *Année 1764.* En effet, ainſi qu'il a déjà été obſervé *(§. 31)* $\frac{r^2 \varrho}{\sqrt{(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2)}}$ eſt l'expreſſion de celui des demi-diamètres terreſtres, qui fait, avec le plan de l'équateur, un angle égal au complément de la déclinaiſon du Soleil. Soit donc Y ce demi-diamètre que l'on trouvera tout calculé par la Table dont je viens de parler ; on aura $\sqrt{(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2)} = \frac{r^2 \varrho}{Y}$.

(134.) Il eſt évident que ſi l'on ſuppoſe L moindre que $\pm A$, les valeurs de b ſont imaginaires ; aucun Obſervateur ne peut donc voir la phaſe aſſignée lorſque le Soleil eſt au zénit, qu'autant que L ſurpaſſe $\pm A$, ou (ce qui revient au même) qu'autant que

ſin. (lat. de la Plan. à l'inſtant de la conj.) eſt moindre que $\frac{\pi\zeta}{\frac{1}{4}r}\left(\mp L - \frac{pq\varphi(\varrho - r)\times(\varrho + r)}{r^2\sqrt{(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2)}}\right)$.

Détermination de la plus courte distance apparente des centres que l'on puisse observer lorsque le Soleil est au zénit.

(135.) Il est aisé de voir que lors du passage des valeurs réelles de b aux valeurs imaginaires,

$$L = \pm A,$$

$$b = -\frac{3600''\zeta}{nr} \times F,$$

on a donc

Pour déterminer la plus courte distance apparente des centres que l'on puisse observer lorsque le Soleil est au zénit

$$\lambda = \pm \frac{A\pi\zeta}{Er}.$$

Pour déterminer la distance de l'instant du phénomène à l'instant de la conjonction

$$b = -\frac{3600''\zeta}{nr} \times F.$$

(136.) Lors de l'Éclipse du 1.er Avril, aucun Observateur n'a pu voir le disque du Soleil éclipsé par la Lune, lorsque le Soleil étoit au zénit; la plus courte distance des centres que l'on ait pu observer dans cette circonstance étoit de 40′ 5″ de degré, 8′ 45″ de temps avant la conjonction; la longitude du lieu où l'on auroit pu faire l'observation, est de 24^d 19′ 45″ orientale, & sa latitude de 4^d 48′ 50″ boréale. Je remarquerai en passant que cette latitude est toujours égale à la déclinaison du Soleil.

On seroit dans l'erreur si l'on croyoit qu'en changeant dans les valeurs de A, F, E du *§. 130* & dans l'équation du *§. 134*, le signe des termes qui contiennent $\sqrt{(\varrho^2 q^2 + p^2 r^2)}$, on auroit les formules pour le Nadir; cette proposition n'est pas vraie pour un globe elliptique; il faudroit que toutes les normales passassent par le centre du globe.

*Détermination de l'*azimut *de la Planète à l'instant du phénomène.*

(137.) Il est aisé de déterminer l'angle que fait, avec le premier vertical, la ligne qui joint les centres du Soleil & de la Planète à l'instant du phénomène, c'est-à-dire, l'azimut de la Planète

Planète. En effet, j'ai démontré que la tangente de l'angle de la ligne qui joint les centres du Soleil & de la Planète, avec la parallèle à l'orbite relative, a pour expression $\frac{rA}{F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta}}$;

Soit

m le sinus } de l'angle de la ligne des centres avec la parallèle à l'orbite
n le cosinus } relative.

ω le sinus } de l'angle de l'orbite relative avec le fil parallèle ou équa-
φ le cosinus } torial, qui coincide à cet instant avec le premier vertical.

X le sinus } de l'angle azimutal de la Planète.
X' le cosinus }

Puisque d'après les constructions de ce Mémoire, l'angle azimutal égale 360^d, moins l'angle de la ligne des centres avec la parallèle à l'orbite relative, moins l'angle de la parallèle à l'orbite relative avec le fil équatorial; on a

$$X = -\frac{n\omega + m\varphi}{r}, \quad X' = \frac{n\varphi - m\omega}{r}.$$

Les angles azimutaux sont comptés, suivant l'usage ordinaire, depuis 0^d jusqu'à 360^d, en commençant par l'orient vrai, & en continuant par le midi.

(138.) Dans les équations

$$X = -\frac{n\omega + m\varphi}{r}, \quad X' = \frac{n\varphi - m\omega}{r};$$

on donnera à ω le signe qui lui convient *(§. 1.er)*; φ est toujours positif; quant à m & n, ils doivent avoir respectivement le même signe que les quantités A & $F + b \times \frac{nr}{3600'' \zeta}$.

(139.) Si X & X' sont des quantités toutes deux positives; l'azimut est entre 0^d & 90^d, le centre de la Planète est entre l'orient & le midi.

Si X est positif & X' négatif; l'azimut est entre 90^d & 180^d, le centre de la Planète est entre le midi & le couchant.

Si X & X' sont des quantités toutes deux négatives; l'azimut

eſt entre 180^d & 270^d; le centre de la Planète eſt entre le couchant & le nord.

Si X eſt négatif & X' poſitif; l'azimut eſt entre 270^d & 360^d, le centre de la Planète eſt entre le nord & l'orient.

SECTION QUATRIÈME.

Détermination du nombre de ſecondes horaires écoulées entre le premier & le dernier inſtant phyſique, où l'on peut obſerver une phaſe quelconque ſous un parallèle donné.

(140.) On peut ſe propoſer un Problème analogue à celui réſolu dans la Section ſeptième du 1.er article de ce Mémoire. On demandoit alors en général, quel lieu de la Terre obſerve le premier, quel lieu obſerve le dernier une phaſe quelconque; on peut, par analogie, demander le premier & le dernier inſtant phyſique où cette phaſe peut être obſervée ſous un parallèle donné, & par conſéquent le nombre de ſecondes horaires écoulées entre ces inſtans extrêmes.

(141.) Les équations démontrées dans ce Mémoire, fourniſſent les moyens de réſoudre cette nouvelle queſtion.

Soit

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{qs\varphi}{r^2} + \frac{cg\rho\omega}{r^3} + \frac{chp\rho\varphi}{r^4}.$$

$$F = \frac{\theta' l}{\zeta} - \frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg\rho\varphi}{r^3} + \frac{chp\rho\omega}{r^4}.$$

$$E = \xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho qh\pi}{r^4}.$$

$$L = \frac{\sigma\tau' r E}{\pi\zeta\partial} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact intérieur.}$$

$$L = \frac{\sigma\tau' r E}{\pi\zeta\partial} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}, \text{ s'il s'agit d'un contact extérieur.}$$

On a vu (§. 11) que pour déterminer à quel inſtant phyſique un lieu ſitué ſous un parallèle donné, obſerve une phaſe quelconque, lorſque l'on compte dans ce lieu une certaine heure aſſignée, on a

$$= - \frac{3600'' \zeta}{nr} [F \pm \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

Il s'agit donc de différencier cette quantité, en ne ſuppoſant variable que l'angle horaire; on connoîtra alors l'heure que l'on compte à l'inſtant du phénomène, dans le lieu particulier qui obſerve le premier ou le dernier la phaſe aſſignée; on connoîtra de plus, par les méthodes ordinaires, la diſtance à la conjonction, & la longitude du lieu.

(142.) La méthode de *maximis* & *minimis* donne tout de ſuite,

Pour un contact intérieur.

$$(\varphi r h + p \omega g)^2 \times (L^2 - A^2) - \left(A \times (\omega r h - p \varphi g) - \frac{\sigma \tau' r}{\zeta \vartheta'} q g L\right)^2 = 0;$$

Pour un contact extérieur.

$$(\varphi r h + p \omega g)^2 \times (L^2 - A^2) - \left(A \times (\omega r h - p \varphi g) - \frac{\sigma \tau' r}{\zeta \vartheta} q g L\right)^2 = 0;$$

(143.) Si l'on exécute les opérations indiquées par l'analyſe, & que l'on veuille réduire l'équation à une ſeule variable, le réſultat final ſera d'un degré trop élevé pour être diſcuté facilement : remarquons cependant un cas particulier, celui où la diſtance aſſignée des centres eſt nulle. On n'a alors qu'un ſeul facteur qui ſatisfaſſe à la queſtion, $A = 0$ *. La ſuppoſition de $A = 0$ *(IV.e Mémoire, §. 9)* détermine ſous chaque parallèle, les deux ſeuls points où l'on puiſſe obſerver l'Éclipſe centrale; la ſolution actuelle eſt donc conforme à ce que l'on ſait d'ailleurs. En effet, puiſque l'on cherche le premier & le dernier inſtant où la phaſe peut être obſervée ſous le parallèle, on doit trouver les deux ſeuls points où elle eſt viſible ſous ce parallèle. *Année 1766.*

(144.) Soit maintenant

g le ſinus, h le coſinus } de l'angle horaire correſpondant au dernier inſtant où une phaſe quelconque peut être obſervée ſous un parallèle.

g' le ſinus, h' le coſinus } de l'angle horaire correſpondant au premier inſtant où la même phaſe peut être obſervée ſous le parallèle.

(ces valeurs doivent être déterminées par les équations du *§. 142.*)

* La propoſition eſt évidente puiſque dans notre ſuppoſition, $L = 0$ d'après la remarque du *§. 14;* & que par conſéquent toute la partie de l'équation multipliée par L, diſparoît.

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{qs\varphi}{r^2} + \frac{cg\rho\omega}{r^3} + \frac{ch\rho\rho\varphi}{r^4}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg\rho\varphi}{r^3} + \frac{ch\rho\rho\omega}{r^4}.$$

$$E = \xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho qh\pi}{r^4}.$$

b le nombre de secondes horaires écoulées entre la conjonction & le dernier instant physique où l'on peut observer la phase sous le parallèle.

$$A' = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{qs\varphi}{r^2} + \frac{cg'\rho\omega}{r^3} + \frac{ch'\rho\rho\varphi}{r^4}.$$

$$F' = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{qs\omega}{r^2} - \frac{cg'\rho\varphi}{r^3} + \frac{ch'\rho\rho\omega}{r^4}.$$

$$E' = \xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho qh'\pi}{r^4}.$$

b' le nombre de secondes horaires écoulées entre la conjonction & le premier instant physique où l'on peut observer la phase sous le parallèle.

$y =$ le nombre de secondes horaires écoulées entre les deux instans.

On aura

$$b - b' = \frac{3600''\zeta}{nr} \times [-F + F' + \sqrt{(L^2 - A^2)} + \sqrt{(L^2 - A'^2)}].$$

Donc

$$y = \frac{3600''\zeta}{nr} \times [\frac{cg\rho\varphi}{r^3} - \frac{cg'\rho\varphi}{r^3} - \frac{ch\rho\rho\omega}{r^4} + \frac{ch'\rho\rho\omega}{r^4} + \sqrt{(L^2 - A^2)} + \sqrt{(L^2 - A'^2)}].$$

Détermination du nombre de secondes horaires écoulées entre l'instant physique où l'on observe sous un parallèle assigné, une phase quelconque au lever du Soleil, & l'instant où l'on observe la même phase au coucher de cet astre.

(145.) Soit

$$f = \frac{\sqrt{(\rho^2 q^2 r^2 - \rho^2 q^2 s^2 - p^2 r^2 s^2)}}{r^2}.$$

$L = \frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\delta'} - \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}$, s'il s'agit d'un contact intérieur.

$L = \frac{\sigma\tau' r\xi}{\pi\zeta\delta} + \frac{\delta\tau r}{\pi\zeta}$, s'il s'agit d'un contact extérieur.

Lever du Soleil.	*Coucher du Soleil.*
$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} - \frac{f\omega}{q}$.	$A' = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{\varphi s}{q} + \frac{f\omega}{q}$.
$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} + \frac{f\varphi}{q}$.	$F' = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{\omega s}{q} - \frac{f\varphi}{q}$.

b le nombre de secondes horaires écoulées entre la conjonction & l'instant physique de la phase observée au lever du Soleil.

b' le nombre de secondes horaires écoulées entre la conjonction & l'instant physique de la phase observée au coucher du Soleil.

y le nombre de secondes horaires écoulées entre les deux instans.

On aura

$$b' - b = \frac{3600''\zeta}{nr} \times [- F' + F + \sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

Donc

$$y = \frac{3600''\zeta}{nr} \times [\frac{2\varphi f}{q} + \sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}].$$

Détermination du maximum, *& du* maximum maximorum *de la quantité précédente.*

(146.) Rien de plus simple que de déterminer sans calcul, le *maximum* de cette dernière quantité ; en effet, on aura évidemment le *maximum* de y, si l'on peut avoir à la fois les conditions qui donnent le *maximum* de chacun des termes qui composent y. Or je vois que la supposition de $\omega = 0$, $\varphi = r$, & de $\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{rs}{q} = 0$ remplissent ces conditions; en effet, puisque $\omega = 0$, & $\varphi = r$, le terme $\frac{2f\varphi}{q}$ est le plus grand possible; de plus puisque $\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{rs}{q} = 0$, A & $A' = 0$; donc la quantité $\sqrt{(L^2 - A'^2)} + \sqrt{(L^2 - A^2)}$ a sa plus grande valeur; donc si l'on suppose $\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{rs}{q} = 0$, condition qui n'implique pas avec la supposition de $\omega = 0$ & $\varphi = r$; on aura le cas où les trois composans de y sont les plus grands possibles; la valeur de y sera alors

$$y = \frac{3600''\zeta}{nr} \times \left(\frac{2fr}{q} + 2L\right).$$

(147.) Quant au *maximum maximorum* de cette dernière quantité, il eſt clair qu'il aura lieu ſous l'Équateur; en effet, dans l'expreſſion $y = \frac{3600''\zeta}{nr} \times \left(\frac{2fr}{q} + 2L\right)$, il n'y a de variable que la quantité f; la méthode de *maximis* & *minimis* donne donc tout de ſuite (à cauſe de $df = -\frac{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2) s ds}{fr^4}$)

$$s = 0.$$

On a dans ce cas

$$y = \frac{3600''\zeta}{nr} \times (2\rho + 2L)$$

ſinus (latitude de la Lune à l'inſtant de la conjonction) = o.

(148.) On peut conclure de cette recherche, que le *maximum maximorum* de temps qui puiſſe s'écouler entre le premier inſtant phyſique où l'on commence à obſerver une Éclipſe ſur notre globe au lever du Soleil, & le dernier inſtant où l'on finit de l'obſerver au coucher de cet aſtre, a lieu lorſque l'orbite relative de la Lune eſt perpendiculaire au cercle de déclinaiſon du Soleil, la latitude de la Lune étant d'ailleurs nulle à l'inſtant de la conjonction. L'entrée & la ſortie de l'ombre ſe fait par deux points de l'Équateur; la trace du phénomène traverſe la Terre dans le ſens de ſon plus grand diamètre.

(149.) Si l'on ſuppoſoit la Terre ſphérique, toutes les autres circonſtances étant d'ailleurs les mêmes, on auroit $y = \frac{3600''\zeta}{nr} \times (2r + 2L)$. L'ellipticité de la Terre augmente donc la durée totale de l'Éclipſe ſur notre globe d'une quantité égale à $\frac{3600''\zeta}{nr} \times (2\rho - 2r)$. Je réſerve à m'étendre ſur ce ſujet, lorſque je parlerai des moyens que les Éclipſes de Soleil peuvent fournir pour déterminer la figure de la Terre ſans aucune opération géodéſique.

Remarques sur les équations des §. 142 *&* 144, *& sur les méthodes que l'on en peut tirer pour déterminer le* maximum *de temps écoulé entre le premier & le dernier instant physique où l'on observe une phase assignée sous un parallèle quelconque.*

(150). Les recherches auxquelles nous venons de nous livrer ont bien déterminé le *maximum* de temps écoulé entre l'instant physique où l'on observe sous un parallèle assigné, une phase quelconque au lever du Soleil, & l'instant où l'on observe la même phase au coucher de cet astre; mais elles ne nous font rien connoître sur le *maximum* de temps écoulé entre le premier & le dernier instant physique où l'on observe la phase sous un parallèle quelconque; en effet, pour peu que l'on réfléchisse sur la nature des deux questions, il sera aisé de voir que les solutions ne doivent point toujours coincider.

(151.) La méthode naturelle qui se présente pour résoudre ce nouveau Problème, est de substituer, dans l'équation du *§. 144*, les valeurs de g, h, g', h', que l'on tire des équations du *§. 142*, & de différencier cette nouvelle équation en faisant varier tous les élémens de l'Éclipse. Il est évident que le résultat ne peut être que très-compliqué. Quelques réflexions analogues à celles que nous avons faites ci-dessus, nous dispenseront de ce calcul, & nous conduiront fort simplement à un résultat très-approché.

(152.) Dans l'équation du *§. 142*, si l'on suppose à la fois, (ce qui n'implique aucune contradiction)

$$A = 0, \quad \omega = 0, \quad \varphi = r,$$

On aura

$$\left.\begin{matrix} r\,h \mp \dfrac{\sigma\tau' q g}{\zeta\delta'} \\ r\,h \mp \dfrac{\sigma\tau' q g}{\zeta\delta} \end{matrix}\right\} = 0 \left\{\begin{matrix} \text{s'il s'agit d'un contact intérieur.} \\ \text{s'il s'agit d'un contact extérieur.} \end{matrix}\right.$$

On connoîtra donc l'heure que l'on compte au premier & au dernier inſtant où l'on obſerve la phaſe aſſignée ſous un parallèle quelconque, dans l'hypothèſe que l'orbite relative ſoit perpendiculaire au cercle de déclinaiſon du Soleil, & que la Lune ait la latitude déterminée par l'équation

$$\frac{\psi l}{\zeta} - \frac{qs}{r} + \frac{chp\rho}{r^3} = 0.$$

Je vais faire voir maintenant que ces ſuppoſitions ne peuvent manquer d'approcher très-près de celles qui donneroient le véritable *maximum* de y ſous le parallèle. Afin de ne pas multiplier les calculs, je ne conſidérerai que les équations qui ont lieu pour le contact extérieur, bien entendu que le procédé eſt abſolument ſemblable pour les autres cas.

(153.) De l'équation $rh \mp \frac{\sigma\tau' q g}{\zeta\partial} = 0$, on tire $\frac{gr}{h} = \pm\frac{\zeta\partial r^2}{\sigma\tau' q}$. On peut conclure d'abord que les tangentes, & conſéquemment les ſinus des deux angles horaires qui appartiennent au premier & au dernier inſtant phyſique, où l'on obſerve la phaſe ſous le parallèle aſſigné, ne diffèrent que par le ſigne; & que les coſinus de ces angles ont le même ſigne; on a donc

$$g = -g' = \frac{r^2\zeta\partial}{\sqrt{(\zeta^2\partial^2 r^2 + \sigma^2\tau'^2 q^2)}};$$

$$h = h' = -\frac{\sigma\tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2\partial^2 r^2 + \sigma^2\tau'^2 q^2)}},$$

& l'équation du *ſ. 144*, devient

$$y = \frac{3600''\zeta}{nr}\left\{\begin{array}{l}\frac{2c\rho g}{r^2} + \frac{2\delta\tau r}{\pi\zeta} \\ + \frac{2\sigma\tau' r}{\pi\zeta\partial}\times\left(\xi - \frac{ps\pi}{r^2} - \frac{c\rho q h\pi}{r^4}\right).\end{array}\right.$$

$$y = \frac{3600''\zeta}{nr}\left\{\begin{array}{l}\frac{2c\rho}{r^2}\times\frac{r^2\zeta\partial}{\sqrt{(\zeta^2\partial^2 r^2 + \sigma^2\tau'^2 q^2)}} + \frac{2\delta\tau r}{\pi\zeta} \\ + \frac{2\sigma\tau' r}{\pi\zeta\partial}\times\left(\xi - \frac{ps\pi}{r^2} + \frac{c\rho q\pi}{r^4}\times\frac{\sigma\tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2\partial^2 r^2 + \sigma^2\tau'^2 q^2)}}\right);\end{array}\right.$$

(154.) Dans

(154.) Dans les suppositions qui ont lieu pour notre système planétaire, la quantité $\frac{r^2 \zeta \partial}{\sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)}}$, approche très-près d'être égale au sinus total, c'est le sinus d'environ $89^d\ 44'$; le terme $\frac{2 c \rho g}{r^2}$ approche donc très-près de sa plus grande valeur. Ce terme, à la vérité, seroit un peu plus grand si l'on supposoit g plus grand que sinus $89^d\ 44'$, mais alors on auroit h moindre que $\frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)}}$; & le terme

$$\frac{2 \sigma \tau' r}{\pi \zeta \partial} \times \left(\xi - \frac{p s \pi}{r^2} + \frac{c \rho q \pi}{r^4} \times \frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)}}\right)$$

seroit évidemment plus petit; l'augmentation du premier terme ne compenseroit pas la diminution du second. Par un raisonnement contraire, si l'on supposoit g moindre que sinus $89^d\ 44'$, & conséquemment h plus grand que $\frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)}}$; l'augmentation du second terme ne compenseroit pas la diminution du premier. Les suppositions du *§. 152* ne peuvent donc être que très-près de celles qui donneroient le véritable *maximum* de y du *§. 144*.

(155.) Le calcul confirme ces réflexions. Soit proposé, en effet, de déterminer sous l'Équateur, le *maximum* de durée de l'Éclipse, en supposant que l'orbite relative soit perpendiculaire au cercle de déclinaison du Soleil, que l'Éclipse arrive à l'instant de l'équinoxe, & que la Lune ait la latitude déterminée par l'équation du *§. 152*, c'est-à-dire que sa latitude soit nulle. (Quoique cette hypothèse n'ait pas lieu dans notre système planétaire, il suffit, pour que l'on puisse la calculer, qu'elle n'implique pas géométriquement contradiction, & qu'elle arrive dans les circonstances les plus défavorables à la formule du *§. 153*). Si l'on conserve d'ailleurs toutes les autres données de l'Éclipse du 1.er Avril 1764; on tirera de l'équation du *§. 153*, $y = 6^h\ 12'\ 35''$.

L'équation $y = \frac{3600'' \zeta}{n r} \times (2 \rho + 2 L)$ du *§. 147*,

donne rigoureusement le même résultat ; or il est évident, par la forme de la solution, que pour la Terre, cette dernière équation doit répondre à la plus grande durée de l'Éclipse sous l'Équateur ; donc la formule du *§. 153* donne aussi cette plus grande durée.

(156.) Les raisonnemens par lesquels nous sommes parvenus à l'équation du *§. 153*, ne sont pas particuliers à l'Équateur ; ils peuvent également s'appliquer à un parallèle quelconque. On doit donc conclure que, toutes choses d'ailleurs égales, l'on a le *maximum* de temps qui puisse s'écouler entre le premier & le dernier instant physique où l'on puisse observer une phase quelconque sous un parallèle, lorsque l'orbite relative est perpendiculaire au cercle de déclinaison du Soleil, & que la Lune a la latitude déterminée par l'équation

$$\text{sinus (latitude de la Lune)} = \frac{\pi \zeta}{\frac{1}{4} r} \times \left(\frac{qs}{r} + \frac{c p \varrho}{r^3} \times \frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)}} \right).$$

Les points de ces parallèles qui observent les premiers & les derniers, le phénomène assigné, sont ceux pour lesquels il arrive aux heures déterminées par les équations

$$g = -\frac{r^2 \zeta \partial}{\sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)}}. \qquad g = +\frac{r^2 \zeta \partial}{\sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)}};$$

$$h = -\frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)}}. \qquad h = -\frac{\sigma \tau' q r}{\sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)}}.$$

(157.) Nous remarquerons en finissant, que le *maximum maximorum* de y n'a pas précisément lieu sous l'Équateur, mais sous le parallèle déterminé par l'équation

$$\varrho \zeta \partial s + \frac{\sigma^2 \tau'^2 q^2 \varrho s}{\zeta \partial r^2} + \frac{\sigma \tau' p c}{\zeta \partial r} \times \sqrt{(\zeta^2 \partial^2 r^2 + \sigma^2 \tau'^2 q^2)} = 0.$$

ARTICLE TROISIÈME.

Détermination de l'heure que l'on compte dans un lieu dont la longitude est donnée, lorsque l'on observe dans ce lieu une phase quelconque assignée.

(158.) Je terminerai ce Mémoire par la méthode pour trouver l'heure que l'on compte dans un lieu dont la longitude

est connue, lorsque l'on observe dans ce lieu une phase quelconque assignée. J'ai déjà remarqué que la solution directe des Problèmes dans lesquels la longitude du lieu est donnée, dépend de la quadrature du cercle; on ne peut donc pas les résoudre directement. Examinons s'il ne seroit pas possible de suppléer à la solution directe, en employant une série très-convergente, dont les premiers termes exprimeroient, sans erreur sensible, l'heure demandée.

(159.) Pour entendre la formation de cette série, soit, comme dans le §. 9.

sinus (demi-diamètre horizontal de la Lune) $= \frac{d}{b'} \times$ sinus (parallaxe horizontale polaire).

$\partial =$ cosinus (somme du demi-diamètre du Soleil & du demi-diamètre horizontal de la Lune).

$\partial' =$ cosinus (différence du demi-diamètre du Soleil & du demi-diamètre horizontal de la Lune).

$\sigma =$ sinus } demi-diamètre du Soleil.
$\tau =$ cosinus }

$\tau' =$ cosinus (demi-diamètre horizontal de la Lune).

$\delta =$ sinus (demi-diam. horiz. de la Lune) $\times \frac{\text{cos. (parall. horiz. polaire)}}{r}$.

b le nombre de secondes horaires écoulées depuis la conjonction jusqu'à l'instant pour lequel on calcule.

$$A = \frac{\psi l}{\zeta} - \frac{q s \varphi}{r^2} + \frac{c g \rho \omega}{r^3} + \frac{c h p \rho \varphi}{r^4}.$$

$$F = \frac{\theta l}{\zeta} - \frac{q s \omega}{r^2} - \frac{c g \rho \varphi}{r^3} + \frac{c h p \rho \omega}{r^4}.$$

$$E = \xi - \frac{p s \pi}{r^2} - \frac{c \rho q h \pi}{r^4} - \frac{b^2 \gamma \pi}{3600''^2 r}.$$

Si, pour simplifier le calcul, on suppose $\tau = r$, & que de plus, l'on nomme H un angle dont la tangente égale $\frac{A r}{F + b \times \frac{n r}{3600'' \zeta}}$; il suit de ce que j'ai démontré dans les précédens Mémoires (*III.e Mémoire §. 1.er, & V.e Mémoire §. 46*), que l'on a *Années 1765 & 1767.*

Contact extérieur des limbes.

$$\sigma = \left(\frac{A\zeta\pi}{E\times \text{sin}.H} - \frac{\delta r}{E}\right)\times\frac{\partial}{\tau'},$$

Contact intérieur des limbes.

$$\sigma = \left(\frac{A\zeta\pi}{E\times \text{sin}.H} + \frac{\delta r}{E}\right)\times\frac{\partial'}{\tau'};$$

Au moyen de ces dernières équations, il est sensible que l'on peut demander quel devroit être le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on pût observer un contact des limbes dans un lieu donné, à un instant assigné. Voyons comment ce Problème peut mener à la solution de celui que je me suis proposé dans cet article. Je me contenterai de développer l'analyse pour un commencement d'Éclipse, bien entendu qu'elle s'applique à une phase quelconque.

(160.) Soit

B le lieu pour lequel on calcule.

K l'heure que l'on compte dans le lieu B à l'instant du commencement de l'Éclipse.

m l'heure que l'on compte dans le lieu B à l'instant de la conjonction.

Comme il n'est aucun lieu où la plus grande phase arrive trois heures ou même deux heures avant la conjonction; par la formule du paragraphe précédent, je cherche quel devroit être le demi-diamètre du Soleil, pour que dans le lieu B, on pût voir commencer l'Éclipse aux heures $m - 3$, $m - 2$.

Soient Σ & Σ' ces valeurs respectives, & Δ le vrai demi-diamètre du Soleil; il est sensible que si la différence des heures étoit proportionnelle à la différence des demi-diamètres, on auroit

$$\Sigma - \Sigma' : 3600'' :: \Sigma - \Delta : 3600'' \times \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'},$$

& par conséquent

$$K = m - 3 + 3600'' \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'}.$$

Cette dernière équation n'est pas rigoureusement exacte; soit donc n un nouvel instant $= m - 3 + 3600'' \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'}$. Par la formule du paragraphe précédent, je cherche quel devroit être le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on pût observer un contact à cet instant. Soit Σ'' ce demi-diamètre; en vertu de la

loi de continuité qui tend à s'établir, on approche d'avoir la proportion ſuivante,

$$\Sigma - \Sigma'' : 3600'' \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'} :: \Sigma - \Delta : 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')};$$

& par conſéquent

$$K = m - 3 + 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')}.$$

Cette dernière équation n'eſt pas encore rigoureuſe; ſoit $m - 3 + 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} + X$ l'expreſſion rigoureuſe de K.

En vertu de la loi de continuité, qui tend à s'établir entre les différences des demi-diamètres ſucceſſifs déterminés par la formule du §. 159, & l'accroiſſement du temps; on a, avec une exactitude ſuffiſante,

$$X : 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{\Sigma - \Sigma'} :: \Sigma'' - \Delta : \Sigma' - \Sigma''.$$

Donc

$$X = \left(3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{\Sigma - \Sigma'}\right) \frac{\Sigma'' - \Delta}{\Sigma' - \Sigma''}.$$

Donc

$$K = m - 3 + 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')}$$

$$+ \left(3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{(\Sigma - \Sigma')}\right) \times \frac{(\Sigma'' - \Delta)}{(\Sigma' - \Sigma'')}.$$

(161.) Pour récapituler ce qui vient d'être démontré, dans les paragraphes précédens, & réunir les formules du commencement & de la fin de l'Éclipſe,

Soit

B le lieu pour lequel on calcule.

K l'heure que l'on compte dans le lieu B à l'inſtant du commencement ou de la fin de l'Éclipſe.

m l'heure que l'on compte dans le lieu B à l'inſtant de la conjonction.

Δ le demi-diamètre du Soleil.

Σ la valeur que devroit avoir le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on pût obſerver un contact des limbes dans le lieu B, à l'heure $m \mp 3$.

Σ' la valeur que devroit avoir le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on put observer un contact des limbes dans le lieu *B*, à l'heure $m \mp 2$.

Σ'' la valeur que devroit avoir le demi-diamètre du Soleil, pour que l'on put observer un contact des limbes dans le lieu *B*, à l'heure

$$m \mp 3 \pm 3600'' \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'}.$$

On a

$$K = m \mp 3 \pm 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')}$$

$$\pm \left(3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600'' \frac{(\Sigma - \Delta)}{(\Sigma - \Sigma')}\right) \times \frac{(\Sigma'' - \Delta)}{(\Sigma' - \Sigma'')}.$$

Les signes supérieurs appartiennent au commencement de l'Éclipse, les signes inférieurs appartiennent à la fin.

Les quantités Δ, Σ, Σ', Σ'', doivent être évaluées en secondes & dixièmes de secondes de degré.

Si l'on veut avoir égard à l'inflexion des rayons solaires, il faudra, lors des contacts extérieurs, diminuer le demi-diamètre du Soleil d'une quantité de secondes de degré égale à l'inflexion; il faudra augmenter le demi-diamètre du Soleil de la même quantité lors des contacts intérieurs.

(162.) Puisque tangente $H = \dfrac{Ar}{F + b \times \dfrac{nr}{3600''\zeta}}$; on a

$$\text{sinus } H : \text{cosinus } H :: A : F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}.$$

Les quantités *A* & sinus *H* ont donc le même signe; c'est-à-dire, que sinus *H* doit être positif lorsque *A* est positif, que sinus *H* doit être négatif lorsque *A* est négatif. Cette remarque fait voir que dans l'usage des formules du *§. 159*, on peut toujours calculer, comme si les quantités *A*, $F + b \times \dfrac{nr}{3600''\zeta}$ & sinus *H* étoient réellement positives, quel que soit d'ailleurs le signe de ces quantités.

EXEMPLE.

(163.) *On demande quelle a dû être, le 1.er Avril 1764, l'heure du commencement de l'Éclipse à Pithiviers, que je suppose de 31″ de temps plus occidental que Paris, avec une latitude de $48^d\ 12'\ 38''$ boréale.*

SOLUTION. Puisque Pithiviers est plus occidental de 31″ de temps que Paris, on comptoit $10^h\ 30'\ 52''$ du matin dans ce lieu, lors de la conjonction; d'ailleurs, si l'on suppose une inflexion de $4'',5$ dans les rayons solaires qui rasent le limbe de la Lune, $\Delta = 15'\ 55''$. Je cherche, conformément à ce qui est prescrit, les valeurs de Σ & de Σ' correspondantes à $10^h\ 30'\ 52'' - 3^h$, & à $10^h\ 30'\ 52'' - 2^h$; c'est-à-dire, à $7^h\ 30'\ 52''$, & à $8^h\ 30'\ 52''$ du matin; j'ai $\Sigma = 53'\ 44''$, $\Sigma' = 30'\ 1''$, $3600''\ \frac{\Sigma - \Delta}{\Sigma - \Sigma'} = 1^h\ 35'\ 40''$. Je cherche pareillement la valeur de Σ'' correspondante à $7^h\ 30'\ 52'' + 1^h\ 35'\ 40''$: c'est-à-dire, à $9^h\ 6'\ 32''$, & j'ai $\Sigma'' = 16'\ 38''$,

$$3600''\ \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} = 1^h\ 37'\ 31'',$$

$$3600''\ \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600''\ \frac{(\Sigma - \Delta)}{(\Sigma - \Sigma')} = 1'\ 51'',$$

$$\Sigma'' - \Delta = 43'',\ \Sigma' - \Sigma'' = 13'\ 23'',$$

$$\left(3600''\ \frac{(\Sigma - \Delta)^2}{(\Sigma - \Sigma') \times (\Sigma - \Sigma'')} - 3600''\ \frac{(\Sigma - \Delta)}{(\Sigma - \Sigma')}\right) \times \frac{(\Sigma'' - \Delta)}{(\Sigma' - \Sigma'')} = 6''.$$

Donc

$$K = 10^h\ 30'\ 52'' - 3^h + 1^h\ 37'\ 31'' + 6'' = 9^h\ 8'\ 29''.$$

On voit par-là que, le 1.er Avril 1764, l'Éclipse a commencé à Pithiviers à $9^h\ 8'\ 29''$ du matin.

(164.) On trouveroit par de semblables calculs, que si l'on suppose Saint-Maur sous le parallèle boréal de $48^d\ 50'\ 2''$ avec une longitude orientale de 17″ de temps, comptée de Paris, l'Éclipse du 1.er Avril 1764 a dû finir dans ce lieu à midi 10′ 29″.

(165.) Dans la formule du §. 159, j'ai supposé $\tau = r$; dans la rigueur géométrique, τ est une inconnue, puisque c'est le cosinus du demi-diamètre cherché du Soleil. Il n'est pas difficile d'éviter cette légère inexactitude, & de parvenir à l'expression rigoureuse de ce demi-diamètre; mais alors on aura à résoudre une équation du second degré.

Soit

$$H \text{ un angle dont la tangente} = \frac{Ar}{F + b \times \frac{nr}{3600''\zeta}}.$$

Soit de plus

Contacts extérieurs.	*Contacts intérieurs.*
P un angle dont la tangente égale $\frac{\delta \partial r}{E\tau'}$.	P un angle dont la tangente égale $\frac{\delta \partial' r}{E\tau'}$;
$\left.\begin{matrix} Q \\ Q' \end{matrix}\right\}$ les angles dont le sin. égale $\frac{A \zeta \pi \partial \text{ cosin. } P}{Er\tau' \text{ sin. } H}$.	$\left.\begin{matrix} Q \\ Q' \end{matrix}\right\}$ les angles dont le sin. égale $\frac{A \zeta \pi \partial' \text{ cosin. } P}{Er\tau' \text{ sin. } H}$;

On aura

$$\text{demi-diam. du } \odot = \begin{Bmatrix} Q - P \\ Q' - P \end{Bmatrix} \qquad \text{demi-diam. du } \odot = \begin{Bmatrix} Q + P \\ Q' + P \end{Bmatrix}$$

(166.) Pour entendre ce que signifient les deux racines de ces dernières équations; soit cherché par ces formules le demi-diamètre du Soleil qui, le 1.er Avril 1764, auroit donné un commencement d'Éclipse à Pithiviers, à $7^h\ 30'\ 52''$ du matin. On aura

$$\text{demi diamètre du Soleil} = \begin{cases} 0^d\ 53'\ 43'' \\ 178.\ 36.\ 33 \end{cases}$$

La première valeur ne diffère que de $1''$ de celle donnée par la formule du §. 159; elle appartient donc au véritable Problème des Éclipses. Quant à la seconde valeur, elle apprend que si l'on supposoit un Soleil, dont le demi-diamètre fut de $178^d\ 36'\ 33''$, & que l'on n'eut aucun égard à l'épaisseur de la Terre, on auroit pu également observer à Pithiviers, le 1.er Avril 1764, un contact des limbes à $7^h\ 30'\ 52''$ du matin; ou plutôt on auroit pu mener par l'œil de l'Observateur, une ligne droite qui eût été à la fois tangente au disque de la Lune & au disque d'un Soleil, dont le demi-diamètre eût été de $178^d\ 36'\ 33''$.

OBSERVATION

OBSERVATION
DU PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL, FAITE À PARIS LE 3 JUIN 1769, Dans l'Obſervatoire du Collége Mazarin.

Par M. DE LA LANDE.

JE m'étois occupé depuis pluſieurs jours des préparatifs néceſ- ſaires pour cette importante obſervation, & j'avois pris des arrangemens pour qu'elle fut faite par cinq ou ſix Obſervateurs avec moi; j'avois fait venir de Londres une excellente lunette achromatique de Dollond, portant 40 lignes d'ouverture, & j'avois réglé une pendule dans la lanterne qui eſt au haut de la coupole, d'où Vénus pouvoit être vue juſqu'à $7^h\ 58'$ du ſoir; mais le mauvais temps a rendu mes précautions preſqu'inutiles. 7 Juin 1769.

Le 1.er Juin, il plut preſque toute la journée; le 2 & même le 3, il y eut encore de la pluie; & juſqu'à 6 heures du ſoir, on n'avoit preſque pas d'eſpérance d'apercevoir l'entrée de Vénus ſur le Soleil; les nuages parurent enſuite ſe diſſiper, mais à $6^h\ 53'$ ils revinrent couvrir le Soleil.

J'avois annoncé, dans la *Connoiſſance des Temps,* le premier contact pour $7^h\ 14'$, mais les nuages qui me cachoient préciſément le bord ſupérieur du Soleil, ne ſe diſſipèrent qu'à $7^h\ 21'\ 12''$, de temps vrai, & Vénus étoit déjà avancée ſur le Soleil aſſez ſenſiblement. M. l'abbé Marie, Profeſſeur de Mathématiques au Collége Mazarin, avec qui j'obſervois, eſtima l'entrée du centre de Vénus à $7^h\ 29'\ 7''$; il s'occupoit principalement à conſidérer le diſque de Vénus, ſur lequel il ne voyoit, non plus que moi, aucune apparence d'atmoſphère *.

* Voyez les Mémoires de l'Académie pour l'année 1761, *page 373*. Mais M. l'abbé Chappe, qui croyoit avoir aperçu l'atmoſphère de Vénus en 1761, n'en a plus parlé dans ſes Obſervations de 1769.

Pendant que Vénus avançoit ſur le Soleil, je me ſervis du quart-de-cercle pour déterminer ſa poſition, en obſervant ſes paſſages & ceux des bords du Soleil au fil horizontal & au fil vertical de la Lunette; mais ces obſervations ſont trop peu importantes pour en remplir ce Mémoire.

A $7^h 38' 10''$, Vénus étoit preſqu'entièrement ſur le Soleil, il ne reſtoit plus que 35 à 40" de temps pour avoir le contact intérieur, qui étoit notre plus importante obſervation; mais un filet de nuages couvrit le bord ſupérieur du Soleil, & ne me laiſſa voir Vénus qu'à $7^h 40' 24''$, alors Vénus étoit avancée ſur le Soleil, en ſorte qu'il y avoit au moins 4 ſecondes de degré entre les bords.

Il ne me reſta plus d'autre reſſource que celle du quart-de-cercle, avec lequel je continuai de déterminer la poſition de Vénus ſur le Soleil, ce que je fis malgré la pluie qui m'inondoit, auſſi-bien que M. le Paute d'Agelet, qui faiſoit avec un autre quart-de-cercle de ſemblables obſervations.

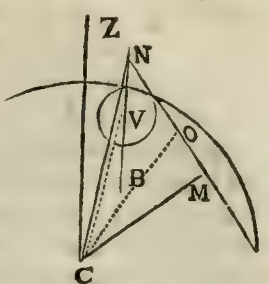
A $7^h 57' 55''$, Vénus étoit à l'horizon ſenſible bordé par les arbres qui ſont au-delà de la Seine, vers Argenteuil & Colombes; les nuages qui nous avoient dérobé le premier contact étoient aſſez près de nous pour ne pas cacher le Soleil à ces villages; auſſi a-t-on vu le contact dans l'Obſervatoire de M. le Marquis de Courtanvaux, à Colombes, même à l'École Militaire, & à l'Obſervatoire royal, & ſi les préparatifs que j'avois faits avec tant de peine ont été preſqu'inutiles, j'ai été conſolé en apprenant que l'obſervation avoit très-bien réuſſi à d'autres Obſervateurs.

Pour conclure de ces obſervations le temps de la conjonction de Vénus, j'ai ſuppoſé d'abord que le contact intérieur ſoit arrivé à $7^h 38' 45''$ *, & j'ai calculé par la méthode la plus rigoureuſe l'effet de la parallaxe ſur l'entrée de Vénus à Paris; je rapporterai ici ma méthode, comme étant préférable à celles qui ont été publiées juſqu'ici.

Soit *C* le centre du Soleil, *ZC* le vertical, *NM* l'orbite de Vénus, *N* le lieu vrai de Vénus, *V* ſon lieu apparent dans le

* Il eſt arrivé à $7^h 38' 43''$, ſuivant M. Meſſier; à $7^h 38' 45''$, ſuivant M.[rs] de Fouchy & de Bory; & à $7^h 38' 50''$, ſuivant M. Maraldi.

moment où elle touchoit le bord inférieur du Soleil; l'angle de position étoit alors de 7d 1′ 47″, calculé pour le centre même de Vénus, & non pas seulement pour le Soleil, comme on le fait communément; l'inclinaison relative de l'orbite de Vénus 8d 28′ 59″, trouvée avec la plus grande exactitude par la méthode différentielle que j'ai donnée pour avoir le mouvement horaire en centièmes de secondes: ces deux angles ajoutés ensemble, donnent l'inclinaison de l'orbite par rapport à l'Équateur 15d 30′ 46″; l'angle parallactique pour le centre de Vénus, dont la déclinaison étoit de 22d 38′ 42″, & pour la latitude de mon Observatoire, qui est celle du milieu de Paris, 48d 51′ 29″, étoit alors de 36d 47′ 48″. Connoissant à peu-près le temps du milieu du passage en *M* & la perpendiculaire *CM*, on en conclud facilement l'angle *MCN* 49d 35′ 20″, & par conséquent *ZCN*, angle du vertical avec le rayon mené au vrai lieu de Vénus *N*, égal à l'angle *CNB*, il étoit de 2d 43′ 14″; la hauteur apparente de Vénus étoit de 2d 9′ 40″, & la différence des parallaxes de 21″,798; celle du Soleil étant supposée 8″,67; on a donc la parallaxe de hauteur *NV* de 21″,782, & l'angle *NCV* de 3′ 53″,12 qui, ajouté à l'angle *CNB*, donne l'angle *CVB* de 2d 47′ 7″,12; dans le triangle *CNV*, supposant la différence des demi-diamètres *CV* de 914″,8, on trouve la vraie distance *CN* qui répond au moment du contact, de 15′ 36″,557; mais pour avoir cette distance en centièmes de secondes, il est bon d'avoir l'angle *NCV* avec la précision des dixièmes de secondes. Supposant la perpendiculaire *CM* de 10′ 7″, comme je l'avois trouvée par mes calculs, on a la portion de l'orbite vraie qui répond à la distance *CN*; on la convertit en temps, à raison de 4′ 0″,11 par heure, & l'on a 2h 58′ 13″,3; c'est le temps qui a dû s'écouler depuis le milieu du passage jusqu'à l'instant où Vénus étoit à la distance vraie *CN*, que nous avons trouvée correspondre à la distance observée *CV*, qui est la différence des demi-diamètres 15′ 44″,3



& 29″½, c'eſt-à-dire 15′ 14″,8 ; ſi l'on prend *CO* = *CV*, on aura le point *O* du contact intérieur vrai ou vu du centre de la Terre. Suppoſant toujours *CM* de 10′ 7″, on trouve que *MO* répond à 2^h 51′ 1″,2, & diffère de *MN* de 7′ 11″ de temps ; c'eſt l'effet de la parallaxe ſur le contact vu de Paris, en ſuppoſant la parallaxe de 8″,67 le jour du paſſage, ou 8″,8 dans les moyennes diſtances du Soleil à la Terre. Le contact obſervé à Paris 7^h 38′45″, donne pour le milieu du paſſage 10^h 36′ 57″, & la conjonction à 10^h 4′ 35″, c'eſt-à-dire 4′ 42″ plus tard que je ne l'avois annoncé dans le Mémoire que j'ai publié ſur cette matière en 1764 *, & plus tard de 8′ 57″ que ſuivant le Mémoire de M. Pingré, publié en 1767 **; quant à la plus courte diſtance que j'avois calculée en 1764 d'après le paſſage de 1761, à peine ai-je trouvé une demi-ſeconde à y changer après l'obſervation.

Concluſions du Paſſage.

Pour qu'on puiſſe faire uſage des élémens que je viens de rapporter ſous des latitudes un peu différentes de la mienne, telles qu'on les a aux environs de Paris, j'obſerverai que le changement de l'angle parallactique eſt égal à celui de la latitude, multiplié par le ſinus de l'azimut & diviſé par le coſinus de la hauteur, en ſorte qu'en diminuant d'un ſeptième l'augmentation en latitude, on a la diminution de l'angle parallactique qui répond à une même heure ſous les deux latitudes différentes.

De même le changement de hauteur eſt égal à celui de la latitude, multiplié par le coſinus de l'azimut, c'eſt-à-dire dans ce cas-ci, les $\frac{52}{100}$ du changement de la latitude.

On peut avec ces nombres faire ſervir à vingt ou trente lieues de Paris au nord & au midi, les Tables des hauteurs & des angles parallactiques que j'ai publiées dans la Connoiſſance des Mouvemens céleſtes de 1762 & de 1763, & qui ſont très-utiles pour le calcul des obſervations faites au quart-de-cercle.

* A Paris, chez Lattré, Graveur, rue Saint-Jacques.

** A Paris, chez Cavelier, Libraire, rue Saint-Jacques.

ADDITION contenant quelques Obſervations qui me ſont parvenues depuis la lecture de ce Mémoire.

LE contact intérieur a été obſervé à Saron par M. le Préſident de Saron à $7^h 44' 0''$, à 2 ou 3" près, à cauſe de l'exceſſive ondulation & des irrégularités de Vénus & du Soleil : ſuivant la carte des Triangles de la France, il y a $5' 35''$ de différence entre les Méridiens de Paris & de Saron, ce qui donne pour le contact réduit au Méridien de Paris, $7^h 38' 25''$.

Cette obſervation a été faite à Rouen, par M. Dulague, à $7^h 33' 40''$; par M. Bouin, à $7^h 33' 46''$.

A Caën, par M. Pigot, à $7^h 26' 25''$.

Au Havre de Grâce, par M. Diquemar, à $7^h 30' 50''$, avec une lunette de 5 pieds.

A Stockolm, contact intérieur obſervé par M. Wilcke, $8^h 41' 45''$, Vénus ſe détachant totalement du bord du Soleil; ſuivant M. Ferner, $8^h 41' 8''$; ſuivant M. Wargentin, $8^h 41' 47''$. M. Wilcke avoit un bon téleſcope de 18 pouces, M. Ferner une lunette achromatique de 10 pieds qui groſſiſſoit quatre-vingt-ſept fois, & M. Wargentin une lunette ordinaire de 21 pieds, avec laquelle il avoit obſervé déjà le paſſage de 1761.

A Upſal, M. Melander vit le contact intérieur à $8^h 40' 12''$, avec une lunette de 20 pieds; M. Bergman à $8^h 40' 9''$, avec une lunette de 21 pieds; M. Proſperin à $8^h 40' 12''$, avec une lunette de 16 pieds; M. Salenius à $8^h 40' 15''$, avec une lunette de 12 pieds. C'eſt le moment où l'on vit ſe rompre la bande obſcure ou le ligament noir, qui uniſſoit encore les bords de Vénus & du Soleil, quoique Vénus parut entièrement ſur le diſque ſolaire.

A Cajanebourg, latitude $64^d 13' 30''$, & $1^h 41' 44''$ à l'orient de Paris; M. Planman, avec une bonne lunette de 21 pieds, dont il s'eſt déjà ſervi pour le paſſage de 1761, obſerva le contact intérieur à $9^h 20' 45''\frac{1}{2}$; il ne vit point le contact intérieur de la ſortie, mais le contact extérieur ou la ſortie totale de Vénus arriva à $15^h 32' 27''$, aſſez exactement

malgré l'ondulation du bord du Soleil : je me servirai de cette observation pour trouver la parallaxe du Soleil.

OBSERVATIONS qui ont manqué.

M. Wargentin, qui m'envoya ces observations aussitôt qu'il les eut reçues, m'apprit que M. Mallet, qui étoit allé à Pello, au nord de Torneå, n'avoit pu y voir aucun des deux contacts, & que M. Hellant à Torneå n'avoit pas même aperçu le Soleil pendant la durée du passage. La même chose est arrivée à M. le Gentil qui étoit à Pondicheri dans les Indes orientales; à M. Call, Astronome Anglois qui étoit à Madras; à M. Pictet, de Genève, qui étoit allé à Oumba en Lapponie, à $66^d 45'$ de latitude, & $2^h 7' 37''$ à l'orient de Paris, sur la côte orientale de la mer blanche. Il en a été de même du P. Beraud, à Lyon, &c.

A Brest, le contact intérieur fut observé par M. de Verdun à $7^h 11' 37''$; par M. Blondeau, à $7^h 12' 4''$; & par M. Duval le Roi, à $7^h 12' 7''$. Ces observations réduites à Paris, donnent plus que l'on n'y a observé; mais le Soleil étant plus élevé à Brest qu'à Paris, les observations ont dû y être moins affectées par l'ondulation & les irrégularités que causoient les vapeurs.

A Toulouse, M. d'Arquier, Correspondant de l'Académie, estima le contact à $7^h 35' 8''$, mais le Soleil étoit fort près de l'horizon & le bord très-irrégulier; M. Garipuy ne l'observa qu'à $7^h 35' 30''$.

A Péterſbourg, on n'a point vu l'entrée de Vénus, mais seulement la sortie; le contact intérieur parut au P. Stahl $3^h 25' 34''$, à M. Lexell $3^h 25' 41''$, au P. Mayer $3^h 25' 43''$; le contact extérieur ou la sortie entière de Vénus arriva, suivant M. Stahl, à $3^h 43' 14''$; suivant M. Lexell, à $3^h 43' 24''$; suivant M. Albert Euler, à $3^h 43' 31''$; suivant le P. Mayer, à $3^h 43' 41''$. Le P. Mayer avoit une bonne lunette achromatique de 18 pieds; M. Euler, une lunette achromatique de 7 pieds; M. Lexell, un télescope de Short de 2 pieds $\frac{1}{2}$; le P. Stahl, un télescope de 3 pieds $\frac{1}{2}$.

A Ponoi, latitude $67^d 4' 30''$, longitude $2^h 35' 14''$; M. Mallet, de Genève, observa le contact intérieur de Vénus à $10^h 15' 4''$ du soir.

Les obſervations de M. Rumowsky, faites à Kola ſur la mer Blanche, latitude 68^d 53', & 2^h 2' 15" à l'orient de Paris; celles de M. Kraft à Orenbourg, latitude 51^{d}46', & 3^h 31' 12" à l'orient de Paris; celles de M. Chriſtophe Euler à Orsk, latitude 51^d 12', & 3^{h}44' 43" à l'orient de Paris, ſe trouveront dans le *Tome XIV* des Mémoires de Péterſbourg.

M. Iſlenief, à Yakoutsk, latitude 62^d 1' 50", & 8^{h}29' 50" à l'orient de Paris, vit le contact intérieur de la ſortie à 10^h 2' 36", & le contact extérieur ou la ſortie totale à 10^h 18' 56" $\frac{1}{2}$.

M. Lowitz, à Gurief près d'Aſtracan, latitude 47^d 7', & 3^h 18' 47" à l'orient de Paris, obſerva le contact intérieur de la ſortie à 4^h 52' 55", & la ſortie totale à 5^h 11' 6".

A Wardoë ou Wardhus, île de la mer Glaciale, ſous la latitude de 70^d 22' 35", & 1^h 54' 54" à l'orient de Paris, le P. Hell, Jéſuite, Aſtronome de Leurs Majeſtés Impériale & Royale, envoyé de la part du Roi de Danemarck, par les ſoins de M. le Comte de Thott, Miniſtre d'État, obſerva le contact intérieur de Vénus ou la formation du filet lumineux à 9^h 34' 10",6, & le contact intérieur de la ſortie ou le point noir formé entre Vénus & le Soleil, à 15^h 27' 24",6 avec une lunette achromatique de Dollond, de 10 pieds; cette obſervation eſt la ſeule qui ait réuſſi complètement dans le nord: je m'en ſervirai pour déduire la parallaxe du Soleil.

Obſervation importante.

En Californie, au village de Saint-Joſeph, latitude 23^d 3' 37", & 7^h 28' 10" à l'occident de Paris, M. l'abbé Chappe obſerva le premier contact intérieur à 0^h 17' 26",9, & le ſecond à 5^h 54' 50",3; cette obſervation, qui lui a coûté la vie, eſt la plus importante de toutes, & la plus propre à déterminer la parallaxe, par comparaiſon avec celles qui ont été faites dans le nord de notre continent, comme je le ferai voir dans un autre Mémoire.

Autre Observation importante.

Au fort du Prince de Galles, ſur les côtes de la baie d'Hudſon, latitude 58^d 47' 30", & 6^h 26' 18" ou 20" à l'occident de Paris, Mrs Dymond & Wales obſervèrent le paſſage, chacun avec un téleſcope de 2 pieds de foyer, qui groſſiſſoit cent vingt fois.

	M. DYMOND.	M. WALES.
Premier contact extérieur....	0^h 57′ 0″ ½....	0^h 57′ 7″ ½.
Premier contact intérieur.....	1. 15. 25.......	1. 15. 21.
Second contact intérieur.....	7. 0. 48 ½....	7. 0. 45 ½.
Sortie totale...............	7. 19. 20 ¼....	7. 19. 1 ¼.

Le dernier contact étoit fort difficile à bien observer, parce que les bords étoient mal terminés.

Parallaxe du Soleil.

La comparaison de ces deux observations d'Amérique, m'a donné pour la parallaxe moyenne du Soleil 8″,54; mais l'observation du P. Hell comparée avec celle de Californie donne 8″,80, & avec celle du Fort 9″,07: je discuterai cette matière dans les *Mémoires de 1770.*

A Norriton dans la Pensylvanie, M. Smith observa le contact intérieur a 2^h 30′ 15″, avec un télescope de deux pieds qui grossissoit quatre-vingt-quinze fois; la latitude est de 40^d 9′ 56″; & la différence des méridiens environ 5^h 10′ 50″ à l'occident de Paris, ou 5^h 11′ 45″ suivant M. Pingré.

A Philadelphie, place de l'Hôtel-de-ville, *(State house square)* le contact intérieur fut observé par M. Erving à 2^h 31′ 24″, avec un télescope de 4 pieds ½ de foyer qui grossissoit quatre cents fois; & par M. Prior à 2^h 31′ 36″; la latitude est 39^d 56′ 55″, la différence des Méridiens 5^h 10′ 27″.

A Lewestown, au cap de Delaware, 38^d 47′ 27″ de latitude; sous le même Méridien que la ville de Philadelphie, M. Biddle observa le contact intérieur à 2^h 29′ 53″, avec un télescope de deux pieds de foyer; M. Pingré en conclud la différence des Méridiens 5^h 9′ 52″.

A Cambridge, dans la nouvelle Angleterre, latitude 42^d 25′; différence des Méridiens 4^h 53′ 59″, M. Winthrop avec un télescope de Short de deux pieds de foyer, observa le contact à 2^h 47′ 30″. Ce Savant est le même à qui l'on doit l'observation du passage de Mercure en 1740.

Entre 5^h 24′ 23″ & 5^h 37′ 23″, la distance du bord septentrional du Soleil au bord austral de Vénus, parut de 6′ 16″,2, & celle

& celle du bord du Soleil au bord boréal de Vénus 5′ 17″,6, avec un micromètre objectif de Dollond; d'où l'on conclud la plus courte distance apparente des centres 9′ 59″,7. Diamètre 58,″6.

A Mexico, M. d'Alzate & M. Bartolache observèrent le contact intérieur à midi 55′ 34 ou 36″.

A Cadiz, M. Tofino *(on prononce Tofigno)* Commandant des Gardes de la Marine, observa le contact intérieur à 7^h 2′ 30″: mais ce ne fut qu'à 7^h 4′ 0″ qu'il aperçut sensiblement la lumière du Soleil au-delà du bord de Vénus.

A Porto en Portugal, ou plutôt à Agromonte, près de la ville, le P. Manuel Alvarès de Queiros, Professeur royal de Philosophie, observa le contact intérieur à 6^h 54′ 35″.

L'Académie a aussi reçu l'observation du P. Christophe, Capucin, faite à la Martinique, mais j'en ignore les circonstances.

M. Mohr, Ministre de la religion à Batavia, dans l'île de Java aux Indes orientales, a observé le contact intérieur de la sortie à 8^h 30′ 13″, & la sortie totale à 8^h 48′ 31″; la latitude est à peu-près de 6^d 12′ méridionale. Il observa aussi le second contact intérieur de Mercure sur le Soleil, le 10 Novembre à 7^h 33′ 32″, & la sortie totale à 7^h 35′ 11″, avec le même télescope: il avoit une très-bonne pendule réglée par le moyen d'un quart-de-cercle *(Voyez les Mémoires de l'Académie de Harlem, tome XI).* M. Hennert, Professeur de Mathématiques en l'Université d'Utrecht, est celui qui m'a communiqué ces deux observations.

Passage de Mercure.

Je rendrai compte dans un autre Mémoire des observations faites en Angleterre.



OBSERVATION DE L'ÉCLIPSE DE SOLEIL DU 4 JUIN 1769.

Par M. DE LA LANDE.

7 Juin 1769.

J'AI observé cette Éclipse au Collége Mazarin, dans le même endroit où j'avois observé la veille le passage de Vénus; je me suis servi d'un micromètre-objectif de M. Passemant, appliqué à un télescope de 32 pouces, & je me suis occupé sur-tout à observer les distances des cornes de l'Éclipse, afin d'en tirer, s'il étoit possible, de nouvelles lumières sur l'inflexion de $4''\frac{1}{2}$ que M. du Séjour reconnut, principalement par de semblables distances, que M. Short avoit observées à Londres le 1.er Avril 1764; plusieurs de ces distances ont été observées par M. Marie, Professeur de Mathématiques au Collège Mazarin; je les ai marquées de la lettre *M*.

A $6^h\ 48'\ 0''$, nous avons vu le Soleil légèrement entamé par la Lune.

6. 51. 20, commencement de l'immersion d'une grande tache.

6. 52. 0, immersion totale de la même tache.

6. 58. 40, $1323\frac{1}{2}$ parties pour la distance des cornes.

7. 2. 10, 1461.

7. 4. 22, 1545.

7. 13. 0, commencement de l'immersion d'une grande tache.

7. 14. 23 ou 24, immersion totale.

7. 16. 52, $1838\frac{1}{2}$.

7. 20. 7, 1885.

7. 21. 52, 1903.

7. 25. 52, 1952.

7. 28. 53, 1949.

7. 27. 22, 1951.

A 7^{h} 33′ 5″, immersion d'une tache.
7. 33. 32, immersion de celle qui en étoit voisine.
7. 40. 43, M. *douteux*; émersion de la première tache.
7. 41. 58, commencement de l'immersion d'une tache longue & pointue.
7. 43. 51, immersion totale.
7. 45. 57, 1937.
7. 46. 22, 1911 $\frac{1}{2}$.
7. 53. 22, 1858 $\frac{1}{2}$.
7. 54. 59, 1837.
7. 54. 13, M. émersion d'une tache.
7. 54. 29, M. émersion de la tache voisine.
7. 54. 53, M. émersion d'une autre petite tache.
7. 56. 50, 1797.
7. 58. 36, M. 1748.
8. 3. 20, M. 1645.
8. 11. 40, 1455.
8. 13. 38, 1341.
8. 16. 27, 1204.
8. 20. 46, 972.
8. 21. 54, M. fin de l'émersion d'une grande tache.
8. 26. 12, 432.
8. 27 & quelques secondes, fin de l'Éclipse.

Je remarquai très-bien sur la partie méridionale de la Lune des inégalités sensibles ou espèces de montagnes, que ma lunette rendoit extrêmement visibles.

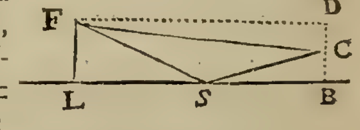
Pour tirer de cette Éclipse les conclusions principales qu'elle fournit, je supposerai le mouvement horaire de la Lune 37′ 57″ sur l'écliptique; le mouvement en latitude décroissante 3′ 28″; la différence des parallaxes horizontales à Paris 61′ 8″; le diamètre horizontal de la Lune 33′ 28″; & l'augmentation

7^{h} 0″	16″,3
7. 30	19,0
8. 0	21,6
8. 25	23,7

telle qu'elle eſt dans la Table de l'autre part; le diamètre du Soleil 31′ 34″, tel que je l'ai déterminé avec ſoin (*Mémoires de l'Académie, année 1760, page 48.*)

La première diſtance des cornes que j'ai obſervée à 6h 58′40″, eſt de 1323 parties ½, dont le diamètre du Soleil occupoit 2338; elle étoit donc de 17′ 52″, & par conſéquent, la diſtance des centres, en ne tenant pas compte ici de l'inflexion, étoit de 27′ 19″.

Pour comparer cette diſtance avec celle qui en eſt la plus éloignée, je choiſis la fin de l'éclipſe obſervée par M. Meſſier à 8h 27′ 22″, la diſtance des centres étant par conſéquent alors de 32′ 43″; je calcule pour ces deux temps d'obſervation, la parallaxe de la Lune dans le ſphéroïde aplati, que je trouve de 34′ 4″ & de 28′ 27″ en longitude, de 42′ 38″ & de 36′ 29″ en latitude; le mouvement apparent ſe trouve donc être de 49′ 59″ en longitude, & de 1′ 1″ en latitude dans l'intervalle des deux obſervations. Soit *S* le centre du Soleil, *LSB* une partie de l'Écliptique, *C* le centre de la Lune dans la première obſervation, *F* ſon lieu apparent à la fin de l'éclipſe, en ſorte qu'on ait *SC* = 27′ 19″, *SF* = 32′43″, *FD* = 49′ 59″, *CD* = 1′ 1″; on trouvera l'angle *CFD* = 1d 14′, l'angle *CFS* = 34d 35′, *FCS* = 42d 59′, *SL* = 26′ 32″, *FL* = 19′ 9″; ainſi la diſtance à la conjonction vraie étoit de 1′ 55″ à la fin de l'éclipſe, & la latitude vraie 55′ 38″; d'où il ſuit que la conjonction vraie eſt arrivée à 8h 30′ 38″, avec 55′ 27″ de latitude boréale & 2ſ 13d 51′ 55″ de longitude.



Les anciennes Tables de Mayer, dont je m'étois ſervi pour calculer cette éclipſe dans la Connoiſſance des Temps, donnent une longitude trop petite de 1′ 12″, & une latitude trop grande de 26″.

J'ai voulu comparer auſſi cette longitude obſervée avec celle des Tables nouvelles de Mayer, dont on ſe ſert pour calculer à Londres *le Nautical almanac;* j'ai trouvé qu'elles donnent une longitude trop petite de 12″ ſeulement: auſſi m'a-t-on aſſuré en Angleterre que l'erreur n'alloit preſque jamais à 45″ dans ces

nouvelles Tables de Mayer, qui ont été comparées avec un très-grand nombre d'observations de M. Bradley, calculées par M. Morris. Elles se trouveront dans mon *Astronomie.*

ADDITION

Contenant quelques Observations qui me sont parvenues depuis la lecture de ce Mémoire.

Calculs de M. Mechain.

Les Éclipses de Soleil étant la meilleure méthode de déterminer les différences des méridiens, j'ai profité des observations que j'avois reçues, pour engager M. Mechain à en tirer des conséquences; cet habile calculateur s'est servi pour cela de la nouvelle méthode que j'ai donnée dans mon *Astronomie;* il y a fait entrer la considération de l'aplatissement de la Terre, supposé de $\frac{1}{230}$, l'inflexion de $4''\frac{1}{2}$, la parallaxe du Soleil de $9''$: voici le résultat de ses calculs, en supposant la conjonction vraie à Paris, $8^h\ 31'\ 6''$ de temps vrai, & la fin de l'éclipse à Paris $8^h\ 27'\ 20''$. M. Cassini l'a observée à $8^h\ 27'\ 19''$, & M. Messier à $8^h\ 27'\ 22''$, réduite à l'Observatoire.

VILLES.	LATITUDE.	FIN observée.	DIFFÉRENCE supposée.	DIFFÉR. des MÉRIDIENS, calculée.	NOMS des OBSERVATEURS.
Bologne..	$44^d\ 29'\ 36''$	$7^h\ 28'\ 14''$	$36'\ 5''$ *occ.*	$36'\ 16''$	M. Zanotti.
Brest....	48. 23. 0	7. 56. 44	27. 23 *occ.*	27. 17	M. de Verdun.
Cadiz...	36. 31. 7	7. 17. 59	34. 16 *occ.*	34. 25	M. Tofino.
Greenwich.	51. 28. 40	8. 23. 32	9. 16 *occ.*	9. 21	M. Maskelyne.
Gripswald	54. 16. 0	9. 30. 49	45. 8 *occ.*	43. 38	M. Rohl.
Milan....	45. 28. 10	8. 47. 50	27. 20 *occ.*	27. 27	Le P. de la Grange.
Vurtsbourg.	49. 46. 6	9. 3. 40	31. 35 *occ.*	30. $16\frac{1}{2}$	Le P. Huberti.

J'observerai seulement que le temps de la conjonction dont M. Méchain s'est servi, est fondé sur l'observation de M. le Président de Saron, qui observa le commencement de l'éclipse à Saron à $6^h\ 53'\ 8''$, & la fin à $8^h\ 32'\ 15''$, avec une excellente

lunette achromatique; en ſorte qu'il regarde la durée de l'éclipſe comme très-exacte: il en réſulte que la différence des méridiens eſt de 5′ 11″, au lieu de 5′ 35″ que donne le calcul des triangles de la France: en admettant ce réſultat, la conjonction vraie ſe trouve à 8h 31′ 6″ dans 2ſ 13d 51′ 56″ de longitude, avec 55′ 43″ ½ de latitude boréale. M. Crozet qui a bien voulu faire à Lyon de ſemblables calculs, a trouvé pour Bologne 36′ 4″, & pour Milan 27′ 21″, mais c'eſt en ſe ſervant de la conjonction que j'ai calculée ci-deſſus, & que je crois préférable.

L'obſervation de Breſt fut faite par M. de Verdun à 7h 56′ 41″ ½, par M. Duval-le-Roi à 7h 56′ 32″, par M. Blondeau à 7h 56′ 34″, & par M. Fortin à 7h 56′ 44″.

M. Tofino à Cadiz obſerva le commencement à 6h 1′ 34″, & la fin à 7h 17′ 59″.

A Greenwich, M. Maskelyne obſerva le commencement à 6h 38′ 54″, & la fin à 8h 23′ 30″; M. Hitchins à 6h 38′ 59″ & 8h 23′ 35″; M. Dunn à 6h 39′ 9″ & 8h 23′ 33″; ils remarquèrent tous, comme moi, diverſes inégalités ſur le bord de la Lune, quoique l'air fut calme & le Ciel très-ſerein.

A Toulouſe, M. d'Arquier, Correſpondant de l'Académie, obſerva le commencement de l'éclipſe à 6h 39′ 20″, la fin à 8h 9′ 14″; M. Garipui à 8h 9′ 14″.

A Kergars près l'Orient, M. d'Après obſerva la fin de l'éclipſe à 8h 0′ 34″.

La longitude de Breſt ayant été diſcutée à l'occaſion du paſſage de Vénus qui y a été très-bien obſervé, j'ai engagé M. Mechain à calculer auſſi l'obſervation de l'éclipſe de Soleil du 5 Août 1766; commencement de l'éclipſe à Breſt, 5h 15′ 42″ du ſoir; fin, 7h 1′ 46″: commencement obſervé à Paris par un milieu entre M. Maraldi & M. de Saron, 5h 44′ 12″: conjonction vraie déduite de l'obſervation le 5 Août, 5h 25′ 46″ à Breſt, avec 4ſ 13d 10′ 34″ de longitude, & 32′ 30″ ½ de latitude boréale; différence des méridiens 27′ 22″. En ſe ſervant de l'obſervation de M. Maraldi, faite à 5h 44′ 8″, on trouve 27′ 18″ pour la différence des méridiens, ce qui s'accorde à 1″

Obſervation de 1766.

près avec le résultat de l'observation de 1769; cette différence est de 27′ 23″ par les triangles de la France.

La longitude de Cadiz qui se trouve de 34′ 25″ par le calcul de l'éclipse de 1769, a été trouvée de 34′ 32″ par M. Pingré, en calculant la même éclipse suivant d'autres considérations, dont il rendra compte dans les Mémoires de l'Académie, & de 34′ 16″ seulement par M. du Séjour, au moyen de l'éclipse de 1764; elle étoit marquée de 33′ 25″ dans la *Connoissance des Temps*, avant les calculs dont nous venons de rendre compte. Longitude de Cadiz.

La longitude de Rome a été aussi discutée par M. Mechain, au moyen de l'Éclipse du 8 Janvier 1750: le commencement fut observé à 8^h 34′ 35″ du matin, & la fin à 11^h 11′ 32″, sous la latitude de 41^d 54′, & 4″ à l'est de Saint-Pierre de Rome; il en résulte que la conjonction vraie arriva à 10^h 18′ 28″$\frac{1}{2}$, dans 9^s 18^d 7′ 16″ de longitude, avec 43′ 21″ de latitude boréale: la fin de l'Éclipse fut observée à Berlin à 11^h 20′ 5″$\frac{1}{2}$, d'où il résulte que la différence des méridiens est de 3′ 45″, & entre Berlin & Saint-Pierre de Rome, 3′ 49″; par conséquent Saint-Pierre est de 40′ 36″ à l'orient de Paris, en supposant que Berlin soit à 44′ 25″ de Paris, comme je l'ai trouvé par d'autres observations. Observation de 1750.

A Upsal, la fin de l'Éclipse de 1769 a été observée entre 10^h 3′ 48″ & 10^h 3′ 53″.

A Stockolm, entre 10^h 4′ 52″ & 10^h 4′ 53″; M. Pingré en conclud la différence des méridiens 1^h 2′ 50″$\frac{1}{2}$.

A Cajanebourg, commencement de l'Éclipse à 9^h 0′ 53″, fin à 11^h 0′ 0″$\frac{1}{2}$; M. Euler en a conclu la différence des méridiens 1^h 41′ 40″; je ne trouve que 1^h 41′ 11″ par l'observation du passage; M. Pingré trouvoit 1^h 40′ 40″ par le passage de 1761.

A Ponoi en Lapponie, M. Mallet observa la fin de l'Éclipse à midi 7′ 55″, sous la latitude de 67^d 4′ 30″, 2^h 35′ 15″ à l'orient de Paris.

A Péterſbourg, le P. Mayer observa le commencement de l'Éclipse à 9^h 10′ 29″, la fin à 11^h 6′ 14″; M. Lexell à 9^h 10′ 29″, la fin à 11^h 6′ 9″; M. Stahl observa le commencement à 9^h 10′ 25″; M. Kotelnikow vit la fin à 11^h 6′ 6″, &

M. Euler à 11^h 6′ 5″; la longitude qui résulte de ces observations en suivant le calcul de M. Euler, 1^h 52′ 5″; suivant M. Pingré, 1^h 51′ 56″.

A Yakoutsk sur la Lena, M. le capitaine Issenief observa le commencement de l'Éclipse à 5^h 5′ 52″, & la fin à 6^h 52′ 37″½; latitude 62^d 1′ 50″; différence des méridiens, 8^h 29′ 50″.

A Gurief, M. Lowitz observa le commencement de l'Éclipse à 11^h 29′ 52″, & la fin à midi 26′ 48″; latitude 47^d 7′ 3″; différence des méridiens 3^h 18′ 47″.

A Wardoë, le P. Hell observa le commencement sensible avec la lunette de quatre pieds de son quart-de-cercle, à 9^h 22′ 47″; il estime qu'il y avoit 5 ou 6″ que le vrai commencement étoit arrivé; la fin avec une lunette achromatique de dix pieds, à 11^h 22′ 35″, à la précision d'une seconde; il en déduit la différence des méridiens de 1^h 55′ 6″: M. Euler trouve 1^h 55′ 2″, & M. Crozet 1^h 54′ 56″.

A Gibraltar, M. le Lieutenant Jardine observa le commencement de l'Éclipse à 6^h 8′ 0″, & la fin à 7^h 20′ 33″, avec un télescope de deux pieds: latitude 36^d 4′ 44″, environ 28′ 46″ à l'occident de Paris.

A Hawkhil près d'Édimbourg, latitude 55^d 57′ 37″: la fin de l'Éclipse fut observée par M. Lind & M. Hoy avec des lunettes achromatiques, à 8^h 17′ 30″ de temps moyen qu'il faut réduire en temps vrai, en ajoutant 2′ 7″; M. Pingré en conclud la distance du méridien de Hawkhil, 21′ 56″; & celle d'Édimbourg, 22′ 20″.

J'ai reçu également les observations de M. le prince duc de Croy, faites à Calais, conjointement avec M. de Fourcroy; celles de M. Simonin & du R. P. Théodore d'Almeida à Bayonne; celles de M. de Relingue, ingénieur du Roi, à Montreuil-sur-mer; de M. de Nantia, près de Nanci; & de M. Tournant à Laon: mais elles ont été déjà communiquées à l'Académie, soit pour le passage de Vénus, soit pour l'éclipse de Soleil, de même que celles de Vienne, d'Ingolstat & de Copenhague, pour l'éclipse de Soleil.

MÉMOIRE

MÉMOIRE
SUR
LE RAPPORT DES DIFFÉRENTES DENSITÉS DE L'ESPRIT-DE-VIN, AVEC SES DIFFÉRENS DEGRÉS DE FORCE;

D'où l'on déduit un moyen sûr de connoître avec précision la qualité & la force des Esprits-de-vin & des Eaux-de-vie.

Par M. BRISSON.

LES occupations auxquelles je me suis livré depuis plusieurs années m'ayant souvent fait desirer de trouver plus d'exactitude qu'il n'y en a dans les Tables des pesanteurs spécifiques des corps, tant solides que liquides, que nous ont données les Physiciens; les résultats de quelques expériences que j'ai faites ne s'accordant point avec les pesanteurs spécifiques de quelques corps, indiquées dans ces Tables, j'ai pris le parti d'en éprouver quelques-unes, pour essayer de connoître d'où pouvoit venir l'erreur. Ces épreuves m'ont appris que les erreurs de ces Tables étoient encore beaucoup plus considérables que je ne les avois crues d'abord; ce qui m'a déterminé à travailler moi-même à en former une, la plus complète qu'il me sera possible: quelque long & pénible que soit ce travail, il ne me rebutera point, & je n'épargnerai aucun soin pour y donner toute l'exactitude dont je suis capable. 24 Décemb. 1768.

C'est en travaillant à cette Table, que j'ai remarqué les faits dont je me propose de rendre compte dans ce Mémoire; quelques-uns

ſont tout-à-fait nouveaux ; les autres ont déjà été diſcutés, mais non pas avec la préciſion néceſſaire, ni avec les détails qu'ils exigent pour être bien connus.

On a remarqué depuis long-temps que le mélange de l'eau & de l'eſprit-de-vin, a une denſité plus grande que ne l'exigent les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs qui le compoſent; M. de Reaumur [a] fit voir, en 1733, que deux volumes de liqueurs, l'un d'eau & l'autre d'eſprit-de-vin, occupoient, étant bien mêlés enſemble, un eſpace moindre que la ſomme des deux volumes qu'avoient les deux liqueurs priſes ſéparément; c'eſt-à-dire que ces deux volumes, qui, étant ſéparés, pouvoient remplir chacun un vaſe d'une capacité déterminée, ne rempliſſoient pas, étant mêlés, un troiſième vaſe égal en capacité aux deux premiers: il fit voir, en un mot, que la peſanteur ſpécifique de ce mélange étoit plus grande qu'elle n'auroit dû l'être, relativement à la denſité de ces deux liqueurs & à la proportion ſuivant laquelle le mélange étoit fait. Il donna auſſi quelques détails ſur la quantité dont le volume diminue, ſuivant que l'eſprit-de-vin eſt mêlé avec une quantité d'eau plus ou moins grande; mais les réſultats de ſes expériences, qui lui ſuffiſoient pour l'objet qu'il avoit en vue, ne lui donnèrent que des *à peu-près :* mon deſſein a été d'obtenir plus d'exactitude, & j'oſe dire que j'y ai réuſſi, parce que les moyens que j'ai employés ſont plus ſuſceptibles de préciſion & moins ſujets à erreur, que ne le ſont ceux dont s'eſt ſervi M. de Reaumur.

[a] *Voyez Mém. de l'Académie, année 1733, p. 165.*

M. Geoffroy [b], dès 1718, avoit auſſi examiné cette matière, mais par des moyens qui ſont encore moins ſuſceptibles d'exactitude : il tenta de déterminer le degré de force des différentes eſpèces d'eaux-de-vie; & le meilleur moyen, ſelon lui, eſt d'en brûler une quantité meſurée; ce qui reſte de flegme après la déflagration, apprend combien l'eau-de-vie contenoit d'eſprit : par exemple, ſi ce qui demeure de flegme, eſt la moitié du volume qu'on a mis en expérience, il juge que l'eau-de-vie contenoit moitié eſprit & moitié flegme. On voit combien cela eſt peu exact; car on ſait que, pendant que la partie ſpiritueuſe

[b] *Mém. de l'Acad. 1718, p. 37.*

brûle, une portion du flegme s'évapore, & l'on ignore quelle est cette portion évaporée: ce moyen fait donc toujours croire l'eau-de-vie plus forte qu'elle ne l'est réellement. L'Académie va juger si les moyens dont je me suis servi, sont plus susceptibles d'exactitude.

Les expériences de M. de Reaumur, prouvent d'une manière incontestable que le mélange de l'esprit-de-vin avec l'eau augmente de densité à mesure qu'on l'affoiblit par une nouvelle addition d'eau, non-seulement en raison de l'excès de la densité de l'eau sur celle de l'esprit-de-vin, mais dans une raison plus grande: elles prouvent encore que cet excès d'augmentation de densité est causé par la pénétration des deux liqueurs, puisqu'après le mélange, le volume est moindre qu'il ne l'étoit auparavant; mais suivant quelle progression cette densité augmente-t-elle, à mesure qu'on affoiblit le mélange? cet excès de densité qui naît de la pénétration, est-il causé uniquement par l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin? ou bien est-il causé seulement par l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau? ou bien enfin est-il causé par l'introduction mutuelle des particules d'une liqueur dans les pores de l'autre? ce sont autant de points que nous allons examiner.

Pour procéder avec ordre, je vais 1.° rendre compte des expériences que j'ai faites pour arriver au but que je me suis proposé d'atteindre. 2.° Je donnerai un détail bien circonstancié des résultats de ces expériences. 3.° Je tâcherai de donner de chacun des faits une explication claire & précise. 4.° J'en déduirai quelques principes qui pourront avoir leur utilité.

Mon principal dessein a été de reconnoître dans quelle progression augmente la densité de l'esprit-de-vin, à mesure qu'on l'affoiblit de plus en plus en y mêlant de l'eau; c'est dans cette vue que j'ai fait séparément un grand nombre de mélanges d'esprit-de-vin & d'eau dans différentes proportions; l'esprit-de-vin dont je me suis servi, étoit très-déflegmé, & autant qu'il peut l'être par la distillation; sa pesanteur spécifique étoit à celle de l'eau de pluie comme $837\frac{1}{8}$ est à 1000; l'eau que j'ai employée, étoit

de l'eau diſtillée, dont la peſanteur ſpécifique étoit exactement la même que celle de l'eau de pluie; & l'eau de pluie à laquelle j'ai comparé ces liqueurs, étoit une eau que j'ai reçue immédiatement du nuage dans un grand vaſe de fayence bien net, que j'ai laiſſé repoſer pendant quelque temps, afin de donner lieu à l'évaporation des ſubſtances volatiles qu'elle auroit pu contenir, & que j'ai enſuite filtrée au papier gris, pour la purger, le plus qu'il étoit poſſible, des ſubſtances étrangères qui auroient pu s'y trouver mêlées; pour plus de ſûreté, je n'ai même reçu cette eau de pluie que quelque temps après que la pluie a été commencée, afin qu'il s'y trouvât moins de ces corps étrangers qui ſont ſouvent ſuſpendus dans l'air, & qui ſont ordinairement ramenés juſqu'à terre par la première ondée.

J'ai donc fait ſéparément quinze mélanges d'eſprit-de-vin & d'eau dans différentes proportions; ſavoir, dans un j'ai mêlé une partie d'eau avec quinze parties d'eſprit-de-vin; dans un autre, j'ai mêlé deux parties d'eau avec quatorze parties d'eſprit-de-vin; dans un troiſième, j'ai mêlé trois parties d'eau avec treize parties d'eſprit-de-vin, & ainſi de ſuite, en mettant toujours une partie d'eau de plus & une partie d'eſprit-de-vin de moins, juſqu'à ce que je fuſſe arrivé au mélange qui ne contenoit qu'une partie d'eſprit-de-vin & quinze parties d'eau.

J'entends ici par *parties*, des volumes égaux, & non pas des poids égaux; & chacun de ces volumes a été meſuré par le moyen d'un chalumeau de verre renflé que je rempliſſois toujours également en le plongeant dans la liqueur autant qu'il étoit néceſſaire pour la faire arriver à la partie du tube qui étoit marquée par un fil délié; de ſorte que dans ces meſures je n'ai pas eu la plus petite erreur à craindre.

J'ai mis tous ces mélanges dans des bouteilles bien bouchées, pour empêcher l'évaporation, ſur-tout celle de la partie ſpiritueuſe; je les ai remuées fortement pour faciliter le mélange; après quoi je les ai laiſſé repoſer pendant un temps plus que ſuffiſant pour laiſſer diſſiper le degré de chaleur que les deux liqueurs avoient acquis en ſe mêlant.

Je me ſuis enſuite aſſuré par le moyen d'un aréomètre, de la peſanteur ſpécifique de chacun de ces mélanges, ainſi que de celles de l'eſprit-de-vin pur & de l'eau pure: l'aréomètre dont je fais uſage, n'a point les défauts des pèſe-liqueurs dont on ſe ſert ordinairement; c'eſt, comme à l'ordinaire, un aréomètre de verre, leſté de mercure, mais dont la tige, qui eſt très-menue, eſt ſurmontée d'un petit baſſin propre à recevoir des poids, à peu-près dans le goût des pèſe-liqueurs dont s'eſt ſervi M. Lavoiſier pour éprouver la peſanteur ſpécifique des différentes eſpèces d'eau *. Après m'être aſſuré avec exactitude du poids de mon aréomètre, je l'ai plongé dans chacune de mes liqueurs, ayant ſoin de le faire enfoncer toujours de la même quantité, en le chargeant d'autant de poids qu'il étoit néceſſaire; ſon centre de gravité eſt placé aſſez bas pour qu'on puiſſe le charger d'une quantité aſſez conſidérable ſans qu'il faſſe la baſcule: on voit par-là que cet aréomètre meſure toujours des volumes égaux, quelle que ſoit la denſité de la liqueur dans laquelle on le plonge; & qu'il eſt ſuſceptible de donner avec la plus grande préciſion, la peſanteur ſpécifique du volume de liqueur qu'il meſure; car on ſait que le poids de ce volume de liqueur eſt la ſomme du poids de l'aréomètre & des poids dont il eſt chargé: j'ai encore eu ſoin à chaque fois que j'ai retiré mon aréomètre d'une liqueur, de le bien eſſuyer avant de le plonger dans une autre, & de tenir ſa ſurface bien nette, afin qu'il ne s'y attachât aucunes bulles d'air, qui auroient augmenté ſon volume; moyennant que la tige de mon aréomètre eſt très-menue, l'enfoncement produit par $\frac{1}{8}$ de grain, eſt très-ſenſible, & l'on ne peut pas ſe tromper de cette quantité.

Pour obtenir toute l'exactitude que je deſirois, il y avoit encore une choſe néceſſaire; c'étoit de faire prendre à toutes mes liqueurs la même température dans le moment où je les ai ſoumiſes à l'expérience: auſſi n'y ai-je pas manqué; le degré de chaleur que je leur ai donné, a été celui du lieu où j'opérois, & qui étoit marqué par 14 degrés au-deſſus de la congélation du thermomètre de M. de Reaumur: c'eſt auſſi ce même degré que

* Cet inſtrument eſt connu ſous le nom d'*Aréomètre de Farenheit.*

j'emploie dans toutes les épreuves que je fais pour former la Table des pesanteurs spécifiques des corps, à laquelle je travaille: j'ai choisi ce degré par préférence à tout autre, parce que c'en est un qu'il est aisé de se procurer en tout temps; dans les jours chauds, il est rare qu'on ne puisse pas l'avoir le matin ou le soir, & dans les jours froids on peut aisément échauffer son appartement à ce point-là.

Après avoir pris toutes ces précautions que j'ai crues nécessaires, j'ai déterminé avec la plus grande exactitude, la pesanteur spécifique de chacune de mes liqueurs; savoir, celle de l'eau pure, celle de l'esprit-de-vin pur, & celle de tous les mélanges que j'avois formés avec ces deux liqueurs: le poids du volume d'eau mesuré par mon aréomètre, s'est trouvé de $820\frac{3}{8}$ grains, ou de 1 once 3 gros $28\frac{3}{8}$ grains; le poids du même volume d'esprit-de-vin rectifié s'est trouvé de $686\frac{3}{4}$ grains, ou de 1 once 1 gros $38\frac{3}{4}$ grains; le poids du même volume de chacun des mélanges s'est toujours trouvé de plus en plus grand, à mesure que le mélange contenoit une plus grande quantité d'eau: cela devoit être ainsi, je m'y attendois bien; mais ce à quoi je ne m'attendois pas, c'est la manière dont se fait le progrès de cette augmentation de poids. Afin qu'on puisse en juger, je donne ici une Table qui contient le poids de chacun de ces volumes de liqueur; & entre chacun des termes, j'ai marqué la différence qu'il y a d'un poids à l'autre: toutes ces différences donnent la progression suivant laquelle se fait l'augmentation de densité.

Nous avons dit plus haut que le mélange de l'esprit-de-vin avec l'eau augmente de densité, à mesure qu'on l'affoiblit par une nouvelle addition d'eau, non-seulement en raison de l'excès de la densité de l'eau sur celle de l'esprit-de-vin, mais dans une raison plus grande: nous avons dit de plus que cet excès d'augmentation de densité venoit de ce que les deux liqueurs se pénétroient en se mêlant, puisqu'après le mélange, le volume est moindre qu'il ne l'étoit auparavant; maintenant, pour faire connoître quelle est la portion de cette augmentation de densité qui est causée par la pénétration, je joins ici une seconde Table qui contient 1.° le

poids réel que pèſe chaque volume de liqueur meſuré par l'aréomètre; 2.° le poids qu'il devroit ſeulement peſer relativement à la peſanteur ſpécifique de chacune des liqueurs, & dans le cas où il n'y auroit point de pénétration; 3.° la différence qu'il y a d'un de ces poids à l'autre, laquelle différence eſt la portion de l'augmentation de denſité qui eſt cauſée par la pénétration.

I. *TABLE des Poids des volumes de liqueurs meſurés par l'Aréomètre, la température de ces liqueurs étant marquée par 14 degrés au-deſſus de la congélation du Thermomètre de M. de Reaumur.*

EAU DISTILLÉE.	ESPRIT-DE-VIN.	POIDS en grains.	DIFFÉR.
0 parties.	16 parties.	pèſent $686\frac{6}{8}$	
1.	15.	$699\frac{4}{8}$	$12\frac{6}{8}$
2.	14.	$711\frac{5}{8}$	$12\frac{1}{8}$
3.	13.	$723\frac{1}{8}$	$11\frac{4}{8}$
4.	12.	734	$10\frac{7}{8}$
5.	11.	$744\frac{4}{8}$	$10\frac{4}{8}$
6.	10.	$754\frac{5}{8}$	$10\frac{1}{8}$
7.	9.	$764\frac{3}{8}$	$9\frac{6}{8}$
8.	8.	$773\frac{3}{8}$	9
9.	7.	$780\frac{7}{8}$	$7\frac{4}{8}$
10.	6.	$787\frac{3}{8}$	$6\frac{4}{8}$
11.	5.	$793\frac{5}{8}$	$6\frac{2}{8}$
12.	4.	$798\frac{4}{8}$	$4\frac{7}{8}$
13.	3.	$803\frac{2}{8}$	$4\frac{6}{8}$
14.	2.	$808\frac{2}{8}$	5
15.	1.	$813\frac{6}{8}$	$5\frac{4}{8}$
16.	0.	$820\frac{3}{8}$	$6\frac{5}{8}$

II. *TABLE de l'Augmentation de la denſité du mélange de l'eau & de l'eſprit-de-vin, cauſée par la pénétration des deux liqueurs.*

EAU DISTILLÉE.	ESPRIT-DE-VIN.	PÈSENT en grains.	DEVROIENT ne peſer que	AUGMENTAT. de denſité, cauſée par la pénétration.
0 parties.	16 parties.	686 $\frac{96}{128}$		
1.......	15.......	699 $\frac{64}{128}$....	695 $\frac{13}{128}$....	4 $\frac{51}{128}$
2.......	14.......	711 $\frac{80}{128}$....	703 $\frac{58}{128}$....	8 $\frac{22}{128}$
3.......	13.......	723 $\frac{16}{129}$....	711 $\frac{103}{128}$....	11 $\frac{41}{128}$
4.......	12.......	734.......	720 $\frac{20}{128}$....	13 $\frac{108}{128}$
5.......	11.......	744 $\frac{64}{128}$....	728 $\frac{65}{128}$....	15 $\frac{127}{128}$
6.......	10.......	754 $\frac{80}{128}$....	736 $\frac{110}{128}$....	17 $\frac{98}{128}$
7.......	9.......	764 $\frac{48}{128}$....	745 $\frac{27}{128}$....	19 $\frac{21}{128}$
8.......	8.......	773 $\frac{48}{128}$....	753 $\frac{72}{128}$....	19 $\frac{104}{128}$
9.......	7.......	780 $\frac{112}{128}$....	761 $\frac{117}{128}$....	18 $\frac{123}{128}$
10.......	6.......	787 $\frac{48}{128}$....	770 $\frac{34}{128}$....	17 $\frac{14}{128}$
11.......	5.......	793 $\frac{80}{128}$....	778 $\frac{79}{128}$....	15 $\frac{1}{128}$
12.......	4.......	798 $\frac{64}{128}$....	786 $\frac{124}{128}$....	11 $\frac{68}{128}$
13.......	3.......	803 $\frac{32}{128}$....	795 $\frac{41}{128}$....	7 $\frac{119}{128}$
14.......	2.......	808 [illegible]....	803 $\frac{86}{128}$....	4 $\frac{74}{128}$
15.......	1.......	813 $\frac{96}{128}$....	812 $\frac{3}{128}$....	1 $\frac{93}{128}$
16.......	0.......	820 $\frac{48}{128}$		

Voyons maintenant ce qui réſulte de ces expériences. Par la ſeule inſpection de la première Table, on voit que l'eſprit-de-vin augmente de denſité, à meſure qu'on y mêle de l'eau de plus en plus, par des quantités qui vont toujours en diminuant, juſqu'à ce que le mélange ſoit compoſé de trois parties d'eau & d'une partie d'eſprit-de-vin; enſuite, en continuant d'ajouter de l'eau, la denſité augmente par des quantités, qui vont elles-mêmes en augmentant; mais ce qu'il faut bien remarquer, c'eſt que ces quantités, dont la denſité augmente, à meſure

mesure qu'on affoiblit l'esprit-de-vin, en y ajoutant de l'eau, & qui vont, comme je l'ai dit, toujours en diminuant, sont cependant toujours plus grandes que ne l'est l'excès de la densité de l'eau sur celle de l'esprit-de-vin, jusqu'à ce que le mélange soit composé de parties égales d'eau & d'esprit-de-vin: après ce terme elles sont moindres que cet excès; car chaque volume de mélange, mesuré par l'aréomètre, est composé de seize parties, soit d'eau, soit d'esprit-de-vin: or le volume d'eau, mesuré par l'aréomètre, pèse, comme nous l'avons dit, 820 $\frac{3}{8}$ grains, dont la seizième partie est 51 $\frac{35}{128}$ grains; de même le volume d'esprit-de-vin, mesuré par l'aréomètre, pèse 686 $\frac{3}{4}$ grains, dont la seizième partie est 42 $\frac{118}{128}$ grains; l'excès de 51 $\frac{35}{128}$ sur 42 $\frac{118}{128}$ est 8 $\frac{45}{128}$. A chaque fois que l'on fait un mélange, qui tient une partie d'esprit-de-vin de moins & une partie d'eau de plus, sa densité ne devroit donc augmenter que de 8 $\frac{45}{128}$ grains: cependant la moindre quantité dont cette densité augmente, jusqu'à ce que le mélange soit composé de parties égales d'eau & d'esprit de vin, est de 9 grains; elle va même quelquefois jusqu'à 12 $\frac{3}{4}$ grains; donc, jusqu'à ce terme, la quantité dont la densité augmente, est toujours plus grande que ne l'est l'excès de la densité de l'eau sur l'esprit-de-vin. Après ce terme, ces quantités sont toujours moindres que cet excès; car la plus grande ne va qu'à 7 $\frac{1}{2}$ grains. Tout cela prouve évidemment ce que nous avons dit plus haut, savoir, que l'eau & l'esprit-de-vin se pénètrent en se mêlant; mais cela prouve en même temps que cette pénétration n'a lieu que jusqu'à ce que le mélange soit composé de parties égales d'eau & d'esprit de vin, & non au-delà. Aussi la seconde Table fait-elle voir que l'augmentation de densité, qui est causée par cette pénétration, est alors la plus grande possible; car elle est de 19 $\frac{104}{128}$ grains; dans tous les autres mélanges elle est moindre. Pour m'assurer davantage de ce fait, qui m'a paru intéressant, j'ai formé un nouveau mélange, ou, pour mieux dire, au mélange déjà fait, & qui étoit composé de huit parties d'eau & de huit parties d'esprit-de-vin, j'ai ajouté une nouvelle partie d'eau; cela a donné un mélange composé de neuf parties d'eau & de huit parties d'esprit-de-vin. J'ai pesé ce

mélange, pour ſavoir ſi l'augmentation de denſité, qui naît de la pénétration, ſeroit plus grande, ou plus petite, ou égale à celle qui ſe trouve dans le melange de parties égales. Je l'ai trouvée plus petite: le volume de ce mélange, meſuré par l'aréomètre, devroit ne peſer que 757 $\frac{47}{68}$ grains, dans le cas où il n'y auroit point du tout de pénétration; il s'eſt trouvé peſer 777 $\frac{1}{8}$ grains; l'augmentation de denſité, cauſée par la pénétration, n'a donc été dans ce cas-là que de 19 $\frac{56}{128}$ grains, & par conſéquent moindre que celle du mélange de parties égales. Donc nous avons raiſon de dire que la pénétration n'a point lieu au-delà du terme d'égalité des deux liqueurs.

Cependant, ſuivant M. de Reaumur, cette pénétration a lieu au-delà de ce terme; puiſque, ſelon lui, la diminution du volume, la plus grande poſſible, ſe trouve dans un mélange compoſé de deux parties d'eau & d'une partie d'eſprit-de-vin. Cela eſt ſi oppoſé à ce que mes expériences m'ont appris, que j'ai voulu voir par moi-même ce qui en étoit. J'ai donc répété les expériences de M. de Reaumur. Pour cela j'ai fait pluſieurs mélanges d'eſprit-de-vin & d'eau, dans différentes proportions, & j'ai toujours remarqué que la plus grande diminution du volume s'eſt trouvée dans le mélange de parties égales. Mais on demandera, pourquoi donc M. de Reaumur a-t-il trouvé cette plus grande diminution du volume dans le mélange compoſé de deux parties d'eau & d'une partie d'eſprit-de-vin? je crois qu'en voici la raiſon. M. de Reaumur n'a point fait ſes mélanges ſéparément; à un mélange déjà fait, il a ajouté de l'eau de plus en plus, c'eſt-là ce qui l'a induit en erreur; car ayant mêlé cent meſures d'eau avec cent meſures d'eſprit-de-vin, il a trouvé que le volume étoit diminué de quatre meſures; à ce mélange il a ajouté ſucceſſivement cent autres meſures d'eau, & le volume s'eſt encore trouvé diminué d'environ une meſure. Mais il faut remarquer que les cent premières meſures d'eau, en ſe mêlant avec les cent meſures d'eſprit-de-vin, ont fait acquérir au mélange un certain degré de chaleur, qui a empêché que la diminution du volume ne fût auſſi grande qu'elle devoit l'être; & M. de Reaumur, avant d'ajouter ces cent dernières meſures d'eau, n'a probablement pas laiſſé aſſez refroidir le mélange; de forte

que les cent dernières mesures d'eau ajoutées ont achevé de le refroidir; ce qui a fait un peu diminuer le volume. Il est donc probable que cette dernière diminution du volume a été causée par le refroidissement, & non pas par la pénétration des liqueurs. Au reste, il paroît que M. de Reaumur n'a parlé de cela que par occasion; aussi ne l'a-t-il déterminé qu'en gros; mais si l'on veut savoir au juste quelle est la diminution du volume en pareil cas, il faut 1.° connoître le degré de température des deux liqueurs; 2.° faire en sorte qu'elles aient toutes deux le même; 3.° leur donner le temps de perdre le degré de chaleur qu'elles ont acquis en se mêlant; 4.° ne mesurer la diminution du volume que quand elles sont revenues au degré de température qu'elles avoient avant l'expérience. Quoi qu'il en soit, il est sûr que la plus grande diminution du volume se trouve dans le mélange composé de parties égales d'eau & d'esprit-de-vin; c'est ce que l'expérience m'a toujours fait voir.

Voyons maintenant quel est le rapport de l'augmentation de densité, qui vient de la pénétration, avec le poids des liqueurs qui composent le mélange. Dans le mélange de huit parties d'eau & de huit parties d'esprit-de-vin, qui est celui dans lequel se trouve la plus grande augmentation de densité, le poids des huit parties d'eau est 410 grains $\frac{24}{128}$; l'augmentation de densité qui naît de la pénétration, est de 19 grains $\frac{104}{128}$: cette plus grande augmentation de densité est donc égale à $\frac{1}{20}$ & environ $\frac{2}{3}$, ou plus simplement à $\frac{3}{62}$ du poids de l'eau. D'une autre part, dans ce mélange, le poids des huit parties d'esprit-de-vin est 343 grains $\frac{48}{128}$; la plus grande augmentation de densité causée par la pénétration, est donc égale à $\frac{1}{17}$ & environ $\frac{1}{3}$, ou plus simplement à $\frac{3}{52}$ du poids de l'esprit-de-vin. M. de Reaumur ne l'a trouvée égale qu'à environ $\frac{1}{20}$ ou $\frac{3}{60}$: c'est effectivement celle qui se trouve dans un mélange composé de deux parties d'eau & d'une partie d'esprit-de-vin; mais, comme nous venons de le dire, c'est à tort que M. de Reaumur l'a regardée comme la plus grande possible.

Jusqu'ici nous voyons bien clairement que, dans le mélange

de l'eau & de l'esprit-de-vin, il y a une pénétration réelle & une augmentation de densité qui naît de cette pénétration: mais cette augmentation de densité est-elle dûe uniquement à l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin? ou bien est-elle causée seulement par l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau? ou bien enfin est-elle dûe à l'introduction mutuelle des particules d'une liqueur dans les pores de l'autre? c'est ce que nous allons examiner. Il me paroît, par mes expériences, qu'elle est dûe en partie à l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, & en partie à l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau; mais que la première cause y contribue plus que la seconde: cela s'accorde assez bien avec les idées que nous avons des porosités de l'eau & de l'esprit-de-vin.

Je dis 1.° que cette augmentation de densité, est dûe en partie à l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, & en partie à celle des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau; en voici la preuve. La plus grande augmentation de densité causée par la pénétration, a été, comme nous l'avons dit, d'environ 20 grains sur huit parties d'esprit-de-vin mêlées à huit parties d'eau: si cette augmentation de densité n'étoit dûe qu'à l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, une partie d'esprit-de-vin mêlée à quinze parties d'eau, devroit recevoir une augmentation de densité de 2 grains $\frac{1}{2}$, puisque huit parties en reçoivent une augmentation de 20 grains; car il y auroit alors plus d'eau qu'il n'en faudroit pour remplir ses pores: cependant ce mélange ne reçoit une augmentation de densité que d'environ 1 grain $\frac{3}{4}$, comme on le peut voir dans la seconde Table; ce qui vient sans doute de ce qu'il y a trop peu d'esprit-de-vin pour fournir assez de particules de ce fluide propres à s'insinuer dans les pores de l'eau; l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'esprit-de-vin, n'est donc pas la seule cause du phénomène; d'un autre côté, si cette augmentation de densité n'étoit dûe qu'à l'introduction des particules de l'esprit-de-vin dans les pores de l'eau, une partie d'eau mêlée à quinze parties d'esprit-de-vin, ne devroit

recevoir une augmentation de denſité que de 2 grains $\frac{1}{2}$, puiſque huit parties n'en reçoivent une augmentation que de 20 grains; cependant ce mélange en reçoit une augmentation de près de 4 grains $\frac{1}{2}$, comme on peut encore le voir dans la ſeconde Table; ce qui vient ſans doute de ce que l'eau s'inſinue elle-même dans les pores de l'eſprit-de-vin qui ſe trouve en grande quantité dans ce mélange: l'introduction des particules de l'eſprit-de-vin dans les pores de l'eau, n'eſt donc pas non plus la ſeule cauſe du phénomène; donc ce phénomène eſt produit par la pénétration mutuelle des deux liqueurs.

On voit déjà la vérité de ce que nous avons dit en ſecond lieu, ſavoir, que l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'eſprit-de-vin contribue pour une plus grande part à l'augmentation de denſité qui naît de la pénétration, que ne le fait l'introduction des particules de l'eſprit-de-vin dans les pores de l'eau, puiſqu'en mêlant une partie d'eau à quinze parties d'eſprit-de-vin, la denſité a été augmentée de 4 grains $\frac{51}{128}$ de plus qu'elle ne devoit l'être indépendamment de la pénétration, tandis qu'en mêlant une partie d'eſprit-de-vin à quinze parties d'eau, la denſité n'a été augmentée que de 1 grain $\frac{93}{128}$ de plus qu'elle ne devoit l'être; il ſe trouve donc dans l'eau plus de particules capables de pénétrer l'eſprit-de-vin, qu'il ne ſe trouve dans l'eſprit-de-vin de particules capables de pénétrer l'eau: donc l'introduction des particules de l'eau dans les pores de l'eſprit-de-vin, contribue davantage à l'augmentation de denſité qui naît de la pénétration, que ne le fait l'introduction des particules de l'eſprit-de-vin dans les pores de l'eau; & il paroît par les réſultats de nos expériences, que la première cauſe contribue au phénomène pour environ $\frac{2}{3}$, tandis que la ſeconde cauſe n'y contribue que pour environ $\frac{1}{3}$.

Ces faits prouvent évidemment que les particules de l'eau ne ſe reſſemblent pas toutes, comme le prétendent quelques Phyſiciens; que l'eau n'eſt pas compoſée de parties tout-à-fait homogènes; que quelques-unes de ces parties diffèrent des autres, au moins en grandeur; car ſi toutes les parties de l'eau étoient parfaitement ſemblables entr'elles, elles ſeroient toutes également capables de ſe loger dans les pores de l'eſprit-de-vin propres à

les recevoir, & l'augmentation de denſité qui naît de la pénétration, ſeroit auſſi grande qu'elle peut l'être, ſitôt qu'on mêleroit à l'eſprit-de-vin une portion d'eau ſuffiſante pour remplir ſes pores: or, il n'en arrive pas ainſi; car cette augmentation de denſité n'eſt la plus grande poſſible que dans un mélange compoſé de huit parties d'eau & de huit parties d'eſprit-de-vin, c'eſt-à-dire, dans un mélange compoſé de parties égales d'eau & d'eſprit-de-vin; & elle s'eſt trouvée de près de 20 grains ſur une maſſe de ce mélange, qui peſoit 773 grains $\frac{3}{8}$. Cependant une de ces portions d'eau ſeroit plus que ſuffiſante pour produire toute cette augmentation de denſité, ſi les particules étoient toutes également propres à pénétrer l'eſprit-de-vin, puiſque cette ſeule portion pèſe plus de 51 grains: or, une ſeule de ces portions d'eau, mêlée à 15 portions d'eſprit-de-vin, n'en a augmenté la denſité que d'environ 4 grains $\frac{1}{2}$ de plus qu'elle ne devoit l'être, indépendamment de la pénétration, encore y a-t-il une portion de ces 4 grains $\frac{1}{2}$ d'augmentation qui eſt dûe à la pénétration des particules de l'eſprit-de-vin dans les pores de l'eau; donc il ne s'eſt trouvé dans cette portion d'eau qu'un petit nombre de particules capables de ſe loger dans les pores de l'eſprit-de-vin, dont la plupart ſont demeurés vides ou n'ont pu ſe remplir davantage que par l'addition de nouvelles portions d'eau: donc toutes les particules de l'eau ne ſe reſſemblent pas parfaitement; on en peut dire, à plus forte raiſon, autant de l'eſprit-de-vin.

Cette opinion eſt diamétralement oppoſée au ſentiment de ceux qui, regardant l'eau comme un élément, jugent en conſéquence, que toutes ſes parties ſont homogènes: de même qu'eux, je regarderai, s'ils le veulent, l'eau comme un élément; mais je ne conviendrai pas de cette homogénéité que je ne crois pas eſſentielle à ce que nous appelons *élément.* La matière du feu n'eſt-elle pas regardée comme un élément? mais ſi cette matière eſt la même que celle de la lumière, comme on en convient preſque univerſellement aujourd'hui, Newton n'a-t-il pas prouvé avec la dernière évidence, que ce fluide qui répand la clarté, n'eſt point homogène? l'homogénéité n'eſt donc pas eſſentielle à ce que nous appelons *élément.* L'air lui-même eſt mis par preſque tous les

Phyficiens, au nombre des élémens; cependant M. de Mairan, voulant expliquer comment deux tons différens pouvoient fubfifter enfemble dans le même air, fuppofa, avec une vraifemblance avouée de tous les Phyficiens, que les molécules de l'air différoient entr'elles en grandeur, en degré de tenfion, de reffort, &c. ne pouvons-nous pas fuppofer la même chofe à l'égard de l'eau, tant qu'il n'y aura pas de faits qui prouvent le contraire? mais outre ce droit qui nous eft commun avec tout le monde, les faits que je viens de rapporter, prouvent évidemment le défaut de cette homogénéité dans l'eau, & en conféquence, rendent certain ce qui n'étoit auparavant que vraifemblable.

Toutes les épreuves que j'ai faites, & que je viens de rapporter, fur tous ces différens mélanges d'efprit-de-vin & d'eau, m'ont fourni un moyen sûr de connoître exactement les qualités & les degrés de force des différentes efpèces d'efprit-de-vin & d'eau-de-vie; cela peut avoir fon utilité. Il y a un grand nombre de circonftances dans lefquelles il eft important au Phyficien de connoître le degré de force de l'efprit-de-vin qu'il emploie dans fes expériences : cela peut être utile au commerce, pour connoître les différentes qualités des efprits-de-vin & des eaux-de-vie; enfin cela peut fervir dans les cas de conteftations entre le Fermier & le Négociant, à les juger avec équité.

Nous avons vu dans ce Mémoire, que la denfité des différentes efpèces d'efprit-de-vin, ainfi que celle des différentes efpèces d'eau-de-vie, n'eft pas proportionnelle à la quantité de flegme qu'elles contiennent. Le pèfe-liqueur, tel que celui dont on s'eft fervi jufqu'à préfent, ne peut donc pas déterminer leur degré de force; car, outre le défaut qu'il a (& qui eft effentiel), favoir, celui de ne pas opérer fur des volumes égaux, fes degrés d'enfoncement, qui font proportionnels à la denfité de la liqueur, ne le font pas au degré de force des eaux-de-vie, puifque ce degré de force n'eft pas lui-même proportionnel à cette denfité. Je m'explique : fi à une eau-de-vie dans laquelle le pèfe-liqueur s'enfonce, par exemple, jufqu'au 40.e degré, l'on compare deux autres eaux-de-vie, l'une plus forte & l'autre plus foible que l'eau-de-vie de comparaifon; je fuppofe que dans la plus forte

le pèse-liqueur s'enfonce jusqu'au 45.e degré, & dans la plus foible jusqu'au 35.e degré seulement : je dis que la force de la première n'est pas autant au-dessus de celle de l'eau-de-vie de comparaison, que la force de la seconde est au-dessous, quoique le pèse-liqueur marque autant de degrés en-dessus pour l'une, qu'il en marque en-dessous pour l'autre ; de sorte que le pèse-liqueur fera juger la plus forte, plus forte qu'elle ne l'est réellement, & la plus foible, plus foible qu'elle ne l'est aussi.

Pour éviter ces erreurs, je fais usage des connoissances que m'ont fournies mes expériences ; elles m'ont appris suivant quelle progression la densité des eaux-de-vie augmente à mesure qu'elles contiennent plus de flegme. J'appellerai désormais *eau-de-vie*, tout esprit-de-vin affoibli par de l'eau, quelle que soit la quantité d'eau qu'il contienne. Dans ce sens, je puis regarder comme des eaux-de-vie de différens degrés de force, les différens mélanges que j'ai faits d'esprit-de-vin & d'eau, & qui m'ont servi à mes épreuves. Car l'huile de vin que contient l'eau-de-vie, y est en trop petite quantité *, pour altérer sa densité d'une manière sensible.

En formant moi-même ces mélanges, j'ai connu exactement la quantité d'esprit & de flegme que contenoit chacune de ces eaux-de-vie. En les éprouvant avec mon pèse-liqueur, qui, comme je l'ai dit, mesure toujours des volumes égaux, j'ai connu leur densité ou pesanteur spécifique ; c'est-là ce qui forme la première Table que j'ai donnée ci-dessus. J'ai donc connu exactement par-là le rapport qu'il y a entre leur pesanteur spécifique & leur degré de force ; les mêmes expériences m'ont encore fait connoître quel est le rapport qui se trouve entre les densités des unes & celles des autres, & elles peuvent m'apprendre aussi quel rapport il y a entre les pesanteurs spécifiques de ces différentes eaux-de-vie & celle de toute autre liqueur à laquelle je voudrois les comparer. C'est d'après ces connoissances que j'ai formé la Table suivante, qui contient les pesanteurs spécifiques de ces différentes eaux-de-vie, comparées à celle de l'eau de Seine,

* L'eau-de-vie contient environ $\frac{1}{10000}$ d'huile de vin.

Entre

Entre chacun des termes, j'ai mis la différence qu'il y a de l'un à l'autre. On verra bientôt à quoi peuvent servir ces différences.

J'ai choisi l'eau de la Seine pour la liqueur de comparaison ; parce que c'est celle qui est le plus à la portée de tous ceux auxquels je desire rendre ce moyen utile.

III. *TABLE des pesanteurs spécifiques des différentes Eaux-de-vie, fortes & foibles, comparées à celle de l'Eau de Seine, la Température de ces liqueurs étant marquée par 14 degrés au-dessus de la congélation du Thermomètre de M. de Reaumur.*

ESPRIT.	EAU OU FLEGME.	PESANTEURS spécifiques.	DIFFÉR.
Esprit-de-vin bien rectifié..	....	837	
Eau-de-vie tenant 15 parties.	1 partie... ou $\frac{1}{16}$ d'eau.	852 $\frac{1}{2}$	15 $\frac{1}{2}$
14....	2.........$\frac{1}{8}$.....	867 $\frac{1}{3}$	14 $\frac{5}{6}$
13....	3 ....$\frac{3}{16}$....	881 $\frac{1}{3}$	14
12....	4....... $\frac{1}{4}$.....	894 $\frac{1}{2}$	13 $\frac{1}{6}$
11....	5.........$\frac{5}{16}$.....	907 $\frac{1}{3}$	12 $\frac{5}{6}$
10....	6.........$\frac{3}{8}$.....	919 $\frac{2}{3}$	12 $\frac{1}{3}$
9....	7.........$\frac{7}{16}$.....	931 $\frac{2}{3}$	12
8....	8.........$\frac{1}{2}$.....	942 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{5}{6}$
7....	9.........$\frac{9}{16}$....	951 $\frac{2}{3}$	9 $\frac{1}{6}$
6....	10.........$\frac{5}{8}$.....	959 $\frac{2}{3}$	8
5....	11.........$\frac{11}{16}$....	967 $\frac{1}{4}$	7 $\frac{7}{12}$
4....	12.........$\frac{3}{4}$.....	973 $\frac{1}{6}$	5 $\frac{11}{12}$
3....	13.........$\frac{13}{16}$.....	979	5 $\frac{5}{6}$
2....	14.........$\frac{7}{8}$.....	985	6
1....	15.........$\frac{15}{16}$....	991 $\frac{3}{4}$	6 $\frac{3}{4}$
Eau de Seine filtrée au sable..................		1000	8 $\frac{1}{4}$

Pour connoître le degré de force des eaux-de-vie par le moyen de la Table précédente, il faut 1.° avoir un pèse-liqueur, dont la tige soit surmontée d'un petit bassin propre à recevoir des poids;

le volume que doit avoir ce pèſe-liqueur eſt indifférent, quel qu'il ſoit, il donnera toujours les mêmes rapports entre les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs qu'on éprouvera par ſon moyen; il vaut cependant mieux qu'il ſoit plutôt grand que petit, les erreurs, s'il s'en trouvoit, ſeroient moindres.

2.° Connoître exactement le poids de ce pèſe-liqueur, & même le marquer deſſus, afin de ne pas l'oublier.

3.° Avoir de petits poids très-exacts, juſqu'à des huitièmes de grain.

4.° Avoir de l'eau de Seine filtrée au ſable, dans une fontaine de grès ou dans quelqu'autre vaſe non-ſoluble à l'eau, afin qu'aucune ſubſtance étrangère ne change ſa peſanteur ſpécifique.

5.° Prendre une pinte de l'eſprit-de-vin ou de l'eau-de-vie qu'on veut éprouver, & la laiſſer repoſer pendant quelque temps à côté de l'eau à laquelle on la comparera, afin que les deux liqueurs prennent la même température; & connoître cette température par le moyen d'un thermomètre.

6.° Plonger le pèſe-liqueur dans l'eau, & y ajouter les poids néceſſaires pour le faire enfoncer juſqu'à la marque qui doit être ſur ſa tige; additionner ces poids avec le poids du pèſe-liqueur, la ſomme ſera le poids du volume d'eau meſuré par l'inſtrument, qu'il faut écrire pour ne pas l'oublier.

7.° Après avoir bien eſſuyé le pèſe-liqueur, faire la même opération ſur l'eau-de-vie; ce qui donnera le poids du même volume d'eau-de-vie meſuré par l'inſtrument, qu'il faut écrire auſſi.

Enſuite on fera cette proportion, & l'on dira, le poids du volume d'eau meſuré par le pèſe-liqueur, eſt au poids du volume d'eau-de-vie auſſi meſuré par le pèſe-liqueur, comme 1000 eſt à un quatrième terme, qui donnera le rapport de l'un à l'autre; ce rapport une fois connu, on connoîtra le degré de force de l'eau-de-vie par le moyen de la Table précédente.

Par exemple, je ſuppoſe que le volume d'eau meſuré par le pèſe-liqueur, pèſe 820 grains $\frac{1}{2}$, & que le même volume d'eau-de-vie auſſi meſuré par le pèſe-liqueur, pèſe 773 grains $\frac{3}{8}$, on dira, $820\frac{1}{2}$ eſt à $773\frac{3}{8}$ comme 1000 eſt à un quatrième

terme qu'on trouvera être $942\frac{1}{2}$; on cherchera ce terme dans la Table, & l'on trouvera qu'il répond à une eau-de-vie qui contient huit parties d'esprit & huit parties de flegme, ou, ce qui est la même chose, moitié esprit & moitié flegme.

Il arrivera le plus souvent que le quatrième terme de la proportion ne se trouvera pas dans la Table; dans ce cas-là, il faudra chercher quels sont les deux termes voisins entre lesquels il faudroit le placer; ce sont les deux termes contigus, dont l'un est plus petit & l'autre plus grand que le quatrième terme trouvé; les différences qui se trouveront entre ces trois termes, détermineront le degré de force de l'eau-de-vie éprouvée. Je suppose, par exemple, que le volume d'eau mesuré par le pèse-liqueur, pèse, comme nous l'avons dit ci-dessus, 820 grains $\frac{1}{2}$, & que le même volume d'eau-de-vie aussi mesuré par le pèse-liqueur, pèse 777 grains $\frac{1}{4}$; on dira $820\frac{1}{2}$ est à $777\frac{1}{4}$ comme 1000 est à un quatrième terme qu'on trouvera être $947\frac{1}{4}$; ce terme ne se trouve point dans la Table, mais on voit qu'il devroit être placé entre ces deux termes $942\frac{1}{2}$ & $951\frac{2}{3}$, dont le premier répond à une eau-de-vie qui contient huit parties d'esprit & huit parties de flegme, & le second répond à une eau-de-vie qui contient sept parties d'esprit & 9 parties de flegme; d'où il suit que l'eau-de-vie à laquelle répond le terme trouvé $947\frac{1}{4}$, contient moins de huit seizièmes d'esprit, mais plus de sept seizièmes; & comme le terme trouvé $947\frac{1}{4}$, diffère un peu plus du terme supérieur $942\frac{1}{2}$ que du terme inférieur $951\frac{2}{3}$, savoir, de $4\frac{3}{4}$ du premier, tandis qu'il ne diffère que de $4\frac{5}{12}$ du second, & que d'un autre côté, l'on voit par la Table, que les augmentations de densité qui sont marquées par les différences placées entre chaque terme, vont en diminuant, à mesure que les eaux-de-vie deviennent plus foibles, on peut juger sans erreur sensible, que la force de l'eau-de-vie éprouvée tient le milieu entre celles des deux eaux-de-vie auxquelles répondent les deux termes $942\frac{1}{2}$ & $951\frac{2}{3}$, & qu'elle contient par conséquent, quinze trente-deuxièmes d'esprit & dix-sept trente-deuxièmes de flegme, & ainsi de tous les autres cas; & si l'on sait combien la pièce d'eau-de-vie que l'on vient d'éprouver, tient de pintes, il sera aisé de déterminer

le nombre des pintes d'esprit qu'elle contient : ce nombre est les quinze trente-deuxièmes de la totalité ; par exemple, si la pièce étoit de 480 pintes, elle contiendroit dans ce cas-là 225 pintes d'esprit.

J'ai dit ci-dessus qu'il falloit laisser reposer pendant quelque temps, l'eau-de-vie qu'on veut éprouver, à côté de l'eau à laquelle on doit la comparer, afin que les deux liqueurs prennent la même température; c'est une condition absolument essentielle, sans laquelle on ne peut pas avoir le rapport de leur densité : il seroit même mieux que ces liqueurs eussent la même température que celle avec laquelle j'ai fait mes épreuves, qui étoit marquée par 14 degrés au-dessus du terme de la congélation du thermomètre de M. de Reaumur; la raison de cela est que l'eau & l'eau-de-vie se condensent ou se dilatent toutes deux par le froid ou le chaud, mais non pas proportionnellement : il faut cependant avouer que quelques degrés de plus ou de moins ne causeront pas une erreur bien grande; car j'ai répété les mêmes épreuves à 3 degrés de moins, c'est-à-dire, à 11 degrés; l'erreur que cela a produit, a été d'environ $\frac{1}{128}$ ce qui n'est assurément pas une grande erreur en pareil cas: malgré cela il vaut mieux faire toutes ces épreuves à un degré de température qui ne soit pas fort éloigné de 14; j'ai fait voir ci-dessus qu'il est aisé de se procurer ce degré dans tous les temps.



MANIÈRE

De sommer les Suites dont les termes sont des puissances semblables de Sinus ou Cosinus d'arcs qui forment une progression arithmétique.

Par M. l'Abbé BOSSUT.

M. EULER a déjà donné dans son Ouvrage intitulé *Introductio ad Analysim infinitorum*, la manière de trouver la somme d'une suite de sinus ou cosinus d'arcs qui croissent en progression arithmétique. Il rapporte ces sortes de suites aux suites récurrentes ; cette méthode est très-savante & très-ingénieuse. En voici une autre qui a l'avantage d'être extrêmement simple, & qui s'applique avec une égale facilité à toutes les puissances des sinus ou cosinus des arcs proposés. 11 Février 1769.

(1.) Commençons par nous rappeler que si z & u représentent deux arcs décrits avec le même rayon 1, on a ces théorèmes,

$$\text{I. } \sin.(z+u) = \sin. z \cos. u + \cos. z \sin. u.$$
$$\text{II. } \sin.(z-u) = \sin. z \cos. u - \cos. z \sin. u.$$
$$\text{III. } \cos.(z+u) = \cos. z \cos. u - \sin. z \sin. u.$$
$$\text{IV. } \cos.(z-u) = \cos. z \cos. u + \sin. z \sin. u.$$
$$\text{V. } 2 \sin. z \sin. u = \cos.(z-u) - \cos.(z+u).$$
$$\text{VI. } 2 \sin. z \cos. u = \sin.(z-u) + \sin.(z+u).$$
$$\text{VII. } 2 \cos. z \cos. u = \cos.(z-u) + \cos.(z+u).$$

qu'il est inutile de démontrer ici, parce qu'ils sont très-familiers aux Géomètres. Je me contente d'observer, pour la suite, que $+ \sin. - z = - \sin. z$.

PROBLEME I.

(2.) *Sommer la suite finie* $S = \text{sin. } q + \text{sin. } 2q + \text{sin. } 3q + \text{sin. } 4q + \text{sin. } 5q + \ldots + \text{sin. } nq$!

SOLUTION.

Supposons constamment $u = q$, & faisons successivement $z = q$, $z = 2q$, $z = 3q$, $z = 4q$, ..., $z = nq$. On aura (*théor. V*),

$$2 \text{ sin. } q = \frac{1 - \text{cos. } 2q}{\text{sin. } q},$$

$$2 \text{ sin. } q = \frac{\text{cos. } q - \text{cos. } 3q}{\text{sin. } 2q},$$

$$2 \text{ sin. } q = \frac{\text{cos. } 2q - \text{cos. } 4q}{\text{sin. } 3q},$$

$$2 \text{ sin. } q = \frac{\text{cos. } 3q - \text{cos. } 5q}{\text{sin. } 4q},$$

$$2 \text{ sin. } q = \frac{\text{cos. } 4q - \text{cos. } 6q}{\text{sin. } 5q},$$

$$2 \text{ sin. } q = \frac{\text{cos. } 5q - \text{cos. } 7q}{\text{sin. } 6q},$$

....

$$2 \text{ sin. } q = \frac{\text{cos.}(n-1)q - \text{cos.}(n+1)q}{\text{sin. } nq}.$$

D'où l'on tire évidemment cette suite de rapports égaux; $1 - \text{cos. } 2q : \text{sin. } q :: 1 - \text{cos. } 2q : \text{sin. } q :: \text{cos. } q - \text{cos. } 3q : \text{sin. } 2q :: \text{cos. } 2q - \text{cos. } 4q : \text{sin. } 3q :: \text{cos. } 3q - \text{cos. } 5q : \text{sin } 4q :: \text{cos. } 4q - \text{cos. } 6q : \text{sin. } 5q :: \text{cos. } 5q - \text{cos. } 7q : \text{sin. } 6q ::$ .... $:: \text{cos. } (n-1)q - \text{cos. } (n+1)q : \text{sin. } nq$. Donc, par la théorie des proportions, $1 - \text{cos. } 2q$ $\text{sin. } q :: 1 - \text{cos. } 2q + \text{cos. } q - \text{cos. } 3q + \text{cos. } 2q - \text{cos. } 4q + \text{cos. } 3q - \text{cos. } 5q + \text{cos. } 4q - \text{cos. } 6q + \text{cos. } 5q - \text{cos. } 7q +$ .... $+ \text{cos. } (n-1)q - \text{cos. } (n+1)q : \text{sin. } q + \text{sin. } 2q + \text{sin. } 3q + \text{sin. } 4q + \text{sin. } 5q + \text{sin. } 6q + \ldots + \text{sin. } nq$, proportion qui donne, en effaçant les

termes qui se détruisent, $S = \frac{\text{sin.}q\,[1 + \text{cos.}q - \text{cos.}nq - \text{cos.}(n+1)q]}{1 - \text{cos.}2q}$.
C. Q. F. T.

PROBLEME II.

(3.) *Sommer la suite* $S = \text{cos.}q + \text{cos.}2q + \text{cos.}3q + \text{cos.}4q + \ldots\ldots + \text{cos.}nq$!

SOLUTION.

Supposons constamment $z = q$, & faisons successivement $u = q$, $u = 2q$, $u = 3q$, $u = 4q$, ... $u = nq$. On aura (*théor. VI*),

$$2\,\text{sin.}q = \frac{\text{sin.}2q}{\text{cos.}q},$$
$$2\,\text{sin.}q = \frac{\text{sin.}3q - \text{sin.}q}{\text{cos.}2q},$$
$$2\,\text{sin.}q = \frac{\text{sin.}4q - \text{sin.}2q}{\text{cos.}3q},$$
$$2\,\text{sin.}q = \frac{\text{sin.}5q - \text{sin.}3q}{\text{cos.}4q},$$
$$2\,\text{sin.}q = \frac{\text{sin.}6q - \text{sin.}4q}{\text{cos.}5q},$$
$$2\,\text{sin.}q = \frac{\text{sin.}7q - \text{sin.}5q}{\text{cos.}6q},$$
....
$$2\,\text{sin.}q = \frac{\text{sin.}(n+1)q - \text{sin.}(n-1)q}{\text{cos.}nq},$$

D'où l'on tire, $\text{sin.}2q : \text{cos.}q :: \text{sin.}2q : \text{cos.}q :: \text{sin.}3q - \text{sin.}q : \text{cos.}2q :: \text{sin.}4q - \text{sin.}2q : \text{cos.}3q :: \text{sin.}5q - \text{sin.}3q : \text{cos.}4q :: \text{sin.}6q - \text{sin.}4q : \text{cos.}5q :: \text{sin.}7q - \text{sin.}5q : \text{cos.}6q ::\ldots \ldots\ldots\ldots :: \text{sin.}(n+1)q - \text{sin.}(n-1) : \text{cos.}nq$. Donc, par la théorie des proportions, $\text{sin.}2q : \text{cos.}q :: \text{sin.}2q + \text{sin.}3q - \text{sin.}q + \text{sin.}4q - \text{sin.}2q + \text{sin.}5q - \text{sin.}3q + \text{sin.}6q - \text{sin.}4q + \text{sin.}7q - \text{sin.}5q :: \ldots\ldots + \text{sin.}(n+1)q - \text{sin.}(n-1)q : \text{cos.}q + \text{cos.}2q + \text{cos.}3q + \text{cos.}4q + \text{cos.}5q + \text{cos.}6q + \ldots\ldots + \text{cos.}nq$. Ainsi, en effaçant les

termes qui se détruisent, $S = \frac{\text{cos. } q\, [\text{sin. } nq + \text{sin. } (n+1)q - \text{sin. } q]}{\text{sin. } 2q}$.

C. Q. F. T.

PROBLEME III.

(4.) *Sommer la suite* $S = \text{sin. } q^2 + \text{sin. } 2q^2 + \text{sin. } 3q^2 + \text{sin. } 4q^2 + \text{sin. } 5q^2 + \ldots\ldots + \text{sin. } nq^2$!

SOLUTION.

On a *(théor. V.)* $\text{sin. } q^2 = \frac{1 - \text{cos. } 2q}{2}$,

$$\text{sin. } 2q^2 = \frac{1 - \text{cos. } 4q}{2},$$

$$\text{sin. } 3q^2 = \frac{1 - \text{cos. } 6q}{2};$$

$$\text{sin. } 4q^2 = \frac{1 - \text{cos. } 8q}{2};$$

$$\text{sin. } 5q^2 = \frac{1 - \text{cos. } 10q}{2};$$

....

$$\text{sin. } nq^2 = \frac{1 - \text{cos. } 2nq}{2}.$$

Donc $S = \frac{1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots + 1}{2} - \frac{1}{2}(\text{cos. } 2q + \text{cos. } 4q + \text{cos. } 6q + \text{cos. } 8q + \text{cos. } 10q + \ldots\ldots + \text{cos. } 2nq)$.

Or, en faisant $2q = x$, on a $\text{cos. } 2q + \text{cos. } 4q + \text{cos. } 6q + \text{cos. } 8q + \text{cos. } 10q + \ldots + \text{cos. } 2nq = \text{cos. } x + \text{cos. } 2x + \text{cos. } 3x + \text{cos. } 4x + \text{cos. } 5x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \text{cos. } nx =$ *(problème précédent)* $\frac{\text{cos. } x\, [\text{sin. } nx + \text{sin. } (n+1)x - \text{sin. } x]}{\text{sin. } 2x} = \frac{\text{cos. } 2q\, [\text{sin. } 2nq + \text{sin. } (n+1)2q - \text{sin. } 2q]}{\text{sin. } 4q}$.

Ainsi,

Ainsi ;

$$S = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \text{cos. } 2q \left(\frac{\text{sin. } 2nq + \text{sin. } (n+1)2q - \text{sin. } 2q}{\text{sin. } 4q} \right).$$

C. Q. F. T.

PROBLEME IV.

(5.) *Sommer la suite* $S = \text{cos. } q^2 + \text{cos. } 2q^2 + \text{cos. } 3q^2 + \text{cos. } 4q^2 + \ldots + \text{cos. } nq^2$!

SOLUTION.

On a *(théor. VII)*, $\text{cos. } q^2 = \frac{1 + \text{cos. } 2q}{2}$,

$$\text{cos. } 2q^2 = \frac{1 + \text{cos. } 4q}{2},$$

$$\text{cos. } 3q^2 = \frac{1 + \text{cos. } 6q}{2},$$

$$\text{cos. } 4q^2 = \frac{1 + \text{cos. } 8q}{2},$$

$$\text{cos. } nq^2 = \frac{1 + \text{cos. } 2nq}{2};$$

Ainsi, en achevant le calcul comme dans l'*article précédent*, on trouvera $S = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \text{cos. } 2q \left(\frac{\text{sin. } 2nq + \text{sin. } (n+1)2q - \text{sin. } 2q}{\text{sin. } 4q} \right)$.

C. Q. F. T.

PROBLEME V.

(6.) *Sommer la suite* $S = \text{sin. } q^3 + \text{sin. } 2q^3 + \text{sin. } 3q^3 + \text{sin. } 4q^3 + \ldots \ldots + \text{sin. } nq^3$!

SOLUTION.

On trouve, par la combinaison des *théorèmes V & VI*, $\text{sin. } q^3 = \text{sin. } q \text{ sin. } q^2 = \frac{\text{sin. } q}{2} - \frac{\text{sin. } q \text{ cos. } 2q}{2} = \frac{\text{sin. } q}{2} - \left(\frac{\text{sin. } 3q - \text{sin. } q}{4} \right) = \frac{3 \text{ sin. } q}{4} - \frac{\text{sin. } 3q}{4}$,

$$\text{fin. } 2q^3 = \frac{3 \text{ fin. } 2q}{4} - \frac{\text{fin. } 6q}{4};$$

$$\text{fin. } 3q^3 = \frac{3 \text{ fin. } 3q}{4} - \frac{\text{fin. } 9q}{4};$$

$$\text{fin. } 4q^3 = \frac{3 \text{ fin. } 4q}{4} - \frac{\text{fin. } 12q}{4};$$

. . . .

$$\text{fin. } nq^3 = \frac{3 \text{ fin. } nq}{4} - \frac{\text{fin. } 3nq}{4};$$

Or 1.° $\text{fin. } q + \text{fin. } 2q + \text{fin. } 3q + \text{fin. } 4q + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{fin. } nq =$ (*Problème I*), $\frac{\text{fin. } q\,[1 + \text{cof. } q - \text{cof. } nq - \text{cof. } (n+1)q]}{1 - \text{cof. } 2q}$.

2.° En faifant $3q = x$, on aura $\text{fin. } 3q + \text{fin. } 6q + \text{fin. } 9q + \text{fin. } 12q + \ldots\ldots\ldots + \text{fin. } 3nq = \text{fin. } x + \text{fin. } 2x + \text{fin. } 3x + \text{fin. } 4x + \ldots\ldots + \text{fin. } nx = \frac{\text{fin. } x\,[1 + \text{cof. } x - \text{cof. } nx - \text{cof. } (n+1)x]}{1 - \text{cof. } 2x}$
$= \frac{\text{fin. } 3q\,[1 + \text{cof. } 3q - \text{cof. } 3nq - \text{cof. } 3(n+1)q]}{1 - \text{cof. } 6q}$.

Ainfi $S = \frac{3}{4} \text{ fin. } q \left(\frac{1 + \text{cof. } q - \text{cof. } nq - \text{cof. } (n+1)q}{1 - \text{cof. } 2q}\right) - \frac{1}{4} \text{ fin. } 3q \left(\frac{1 + \text{cof. } 3q - \text{cof. } 3nq - \text{cof. } 3(n+1)q}{1 - \text{cof. } 6q}\right)$.
C. Q. F. T.

PROBLEME VI.

(7.) *Sommer la fuite* $S = \text{cof. } q^3 + \text{cof. } 2q^3 + \text{cof. } 3q^3 + \text{cof. } 4q^3 + \ldots\ldots + \text{cof. } nq^3$?

SOLUTION.

On a (*théor. VII*) $\text{cof. } q^3 = \frac{3 \text{ cof. } q}{4} + \frac{\text{cof. } 3q}{4}$,

$$\text{cos}.\ 2q^3 = \frac{3\ \text{cos}.\ 2q}{4} + \frac{\text{cos}.\ 6q}{4};$$

$$\text{cos}.\ 3q^3 = \frac{3\ \text{cos}.\ 3q}{4} + \frac{\text{cos}.\ 9q}{4};$$

$$\text{cos}.\ 4q^3 = \frac{3\ \text{cos}.\ 4q}{4} + \frac{\text{cos}.\ 12q}{4},$$

. . . .

$$\text{cos}.\ nq^3 = \frac{3\ \text{cos}.\ nq}{4} + \frac{\text{cos}.\ 3nq}{4};$$

Donc, en opérant comme dans les articles précédens, on trouvera par le *Problème II,*

$$S = \frac{3}{4}\ \text{cos}.\ q \left(\frac{\text{fin}.\ nq + \text{fin}.\ (n+1)q - \text{fin}.\ q}{\text{fin}.\ 2q}\right)$$

$$+ \frac{1}{4}\ \text{cof}.\ 3q \left(\frac{\text{fin}.\ 3nq + \text{fin}.\ 3(n+1)q - \text{fin}.\ 3q}{\text{fin}.\ 6q}\right).\ C.\ Q.\ F.\ T.$$

PROBLEME VII.

(8.) *Sommer la suite* $S = \text{fin}.\ q^4 + \text{fin}.\ 2q^4 + \text{fin}.\ 3q^4 + \text{fin}.\ 4q^4 + \ldots + \text{fin}.\ nq^4!$

SOLUTION.

On a (*théorèmes V & VII*),

$$\text{fin}.\ q^4 = \frac{3}{8} - \frac{\text{cof}.\ 2q}{2} + \frac{\text{cof}.\ 4q}{8},$$

$$\text{fin}.\ 2q^4 = \frac{3}{8} - \frac{\text{cof}.\ 4q}{2} + \frac{\text{cof}.\ 8q}{8};$$

$$\text{fin}.\ 3q^4 = \frac{3}{8} - \frac{\text{cof}.\ 6q}{2} + \frac{\text{cof}.\ 12q}{8};$$

$$\text{fin}.\ 4q^4 = \frac{3}{8} - \frac{\text{cof}.\ 8q}{2} + \frac{\text{cof}.\ 16q}{8},$$

. . . .

$$\text{fin}.\ nq^4 = \frac{3}{8} - \frac{\text{cof}.\ 2nq}{2} + \frac{\text{cof}.\ 4nq}{8}.$$

On aura donc

$$S = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{3}{8}$$
$$- \frac{1}{2}(\text{cof. } 2q + \text{cof. } 4q + \text{cof. } 6q + \ldots + \text{cof. } 2nq)$$
$$+ \frac{1}{8}(\text{cof. } 4q + \text{cof. } 8q + \text{cof. } 12q + \ldots + \text{cof. } 4nq)$$

équation qui devient, en fommant chaque fuite particulière,

$$S = \frac{3n}{8} - \frac{1}{2}\,\frac{\text{cof. } 2q\,[\text{fin. } 2nq + \text{fin. } 2(n+1)q - \text{fin. } 2q]}{\text{fin. } 4q}$$
$$+ \frac{1}{8}\,\text{cof. } 4q\,\frac{[\text{fin. } 4nq + \text{fin. } 4(n+1)q - \text{fin. } 4q]}{\text{fin. } 8q};$$

C. Q. F. T.

PROBLEME VIII.

(9.) *Sommer la fuite* $S = \text{cof. } q^4 + \text{cof. } 2q^4 + \text{cof. } 3q^4 + \text{cof. } 4q^4 + \ldots + \text{cof. } nq^4$!

SOLUTION.

On a (*théorème VII*),

$$\text{cof. } q^4 = \frac{3}{8} + \frac{\text{cof. } 2q}{2} + \frac{\text{cof. } 4q}{8};$$
$$\text{cof. } 2q^4 = \frac{3}{8} + \frac{\text{cof. } 4q}{2} + \frac{\text{cof. } 8q}{8};$$
$$\text{cof. } 3q^4 = \frac{3}{8} + \frac{\text{cof. } 6q}{2} + \frac{\text{cof. } 12q}{8};$$
$$\text{cof. } 4q^4 = \frac{3}{8} + \frac{\text{cof. } 8q}{2} + \frac{\text{cof. } 16q}{8},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{cof. } nq^4 = \frac{3}{8} + \frac{\text{cof. } 2nq}{2} + \frac{\text{cof. } 4nq}{8}.$$

Ainfi on aura

$$S = \frac{3n}{8} + \frac{1}{2}\,\text{cof. } 2q\,\frac{[\text{fin. } 2nq + \text{fin. } 2(n+1)q - \text{fin. } 2q]}{\text{fin. } 4q}$$

$$+ \frac{1}{8} \cos. 4q \; \frac{[\sin. 4nq + \sin. 4(n+1)q - \sin. 4q]}{\sin. 8q}.$$

C. Q. F. T.

(10.) *Scholie.* Il eſt clair que les puiſſances ſupérieures des ſinus & des coſinus ſe ſomment de la même manière. Le lecteur pouſſera plus loin le calcul, & découvrira, avec de l'attention, la loi générale qui règne dans ces ſuites.

PROBLEME IX.

(11.) *Sommer la ſuite* $S = \sin. q \cos. q + \sin. 2q \cos. 2q + \sin. 3q \cos. 3q + \sin. 4q \cos. 4q + \ldots \sin. nq \cos. nq$!

SOLUTION.

On a (*théorème VI*),

$$\sin. q \cos. q = \frac{\sin. 2q}{2},$$

$$\sin. 2q \cos. 2q = \frac{\sin. 4q}{2};$$

$$\sin. 3q \cos. 3q = \frac{\sin. 6q}{2}, \text{ \&c.}$$

On aura donc $S = \frac{1}{2}(\sin. 2q + \sin. 4q + \sin. 6q + \ldots\ldots\ldots + \sin. nq)$, équation qui devient (*Probl. I*),

$$S = \frac{1}{2} \; \frac{\sin. 2q\,[1 + \cos. 2q - \cos. 2nq - \cos. 2(n+1)q]}{1 - \cos. 4q}.$$

C. Q. F. T.

PROBLEME X.

(12.) *Sommer la ſuite* $S = (\sin. q \cos. q)^2 + (\sin. 2q \cos. 2q)^2 + (\sin. 3q \cos. 3q)^2 + (\sin. 4q \cos. 4q)^2 + \ldots + (\sin. nq \cos. nq)^2$!

SOLUTION.

On a (*théorèmes V & VI*),

$$\text{fin. } q^2 \text{ cof. } q^2 = \frac{1}{8} - \frac{\text{cof. } 4q}{8};$$

$$(\text{fin. } 2q \text{ cof. } 2q)^2 = \frac{1}{8} - \frac{\text{cof. } 8q}{8};$$

$$(\text{fin. } 3q \text{ cof. } 3q)^2 = \frac{1}{8} - \frac{\text{cof. } 12q}{8};$$

$$(\text{fin. } 4q \text{ cof. } 4q)^2 = \frac{1}{8} - \frac{\text{cof. } 16q}{8};$$

$$(\text{fin. } nq \text{ cof. } nq)^2 = \frac{1}{8} - \frac{\text{cof. } 4nq}{8}.$$

Donc

$$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots + \frac{1}{8}$$

$$- \frac{1}{8} (\text{cof. } 4q + \text{cof. } 8q + \text{cof. } 12q + \text{cof. } 16q$$

$+ \ldots\ldots + \text{cof. } 4nq)$; d'où l'on tire,

$$S = \frac{n}{8} - \frac{1}{8} \text{ cof. } 4q \left(\frac{\text{fin. } 4nq + \text{fin. } 4(n+1)q - \text{fin. } 4q}{\text{fin. } 8q}\right).$$

C. Q. F. T.

(13.) *Scholie.* On fommera de la même manière les puiffances fupérieures des produits fin. q cof. q, fin. $2q$ cof. $2q$, fin. $3q$ cof. $3q$, &c. J'en dis autant des fuites de cette efpèce;

$$S = \text{fin. } q^2 \text{ cof. } q + \text{fin. } 2q^2 \text{ cof. } 2q + \text{fin. } 3q^2 \text{ cof. } 3q + \ldots\ldots\ldots + \text{fin. } nq^2 \text{ cof. } nq;$$

$$S = \text{fin. } q \text{ cof. } q^2 + \text{fin. } 2q \text{ cof. } 2q^2 + \text{fin. } 3q \text{ cof. } 3q^2 + \ldots\ldots\ldots + \text{fin. } nq \text{ cof. } nq^2;$$

$$S = \text{fin. } q^3 \text{ cof. } q + \text{fin. } 2q^3 \text{ cof. } 2q + \text{fin. } 3q^3 \text{ cof. } 3q + \ldots\ldots\ldots + \text{fin. } nq^3 \text{ cof. } nq;$$

$$S = \text{fin. } q \text{ cof. } q^3 + \text{fin. } 2q \text{ cof. } 2q^3 + \text{fin. } 3q \text{ cof. } 3q^3 + \ldots\ldots\ldots + \text{fin. } nq \text{ cof. } nq^3;$$

&c.

PROBLEME XI.

(14.) *Sommer la suite* $S = \text{sin.}\,(m \pm q) + \text{sin.}\,(m \pm 2q) + \text{sin.}\,(m \pm 3q) + \text{sin.}\,(m \pm 4q) + \text{sin.}\,(m \pm 5q) + \ldots\ldots\ldots + \text{sin.}\,(m \pm nq)$!

SOLUTION.

On a (*théorèmes I & II*),

$\text{sin.}\,(m \pm q) = \text{sin.}\,m\,\text{cos.}\,q \pm \text{cos.}\,m\,\text{sin.}\,q$;

$\text{sin.}\,(m \pm 2q) = \text{sin.}\,m\,\text{cos.}\,2q \pm \text{cos.}\,m\,\text{sin.}\,2q$;

$\text{sin.}\,(m \pm 3q) = \text{sin.}\,m\,\text{cos.}\,3q \pm \text{cos.}\,m\,\text{sin.}\,3q$;

&c. Ainsi

$$S = \text{sin.}\,m\,(\text{cos.}\,q + \text{cos.}\,2q + \text{cos.}\,3q + \text{cos.}\,4q + \ldots\ldots + \text{cos.}\,nq) \pm \text{cos.}\,m\,(\text{sin.}\,q + \text{sin.}\,2q + \text{sin.}\,3q + \text{sin.}\,4q + \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{sin.}\,nq);$$

c'est-à-dire (*problèmes I & II*),

$$S = \frac{\text{sin.}\,m\,\text{cos.}\,q\,[\text{sin.}\,nq + \text{sin.}\,(n+1)\,q - \text{sin.}\,q]}{\text{sin.}\,2q} \pm \frac{\text{cos.}\,m\,\text{sin.}\,q\,[1 + \text{cos.}\,q - \text{cos.}\,nq - \text{cos.}\,(n+1)\,q]}{1 - \text{cos.}\,2q}.$$

C. Q. F. T.

PROBLEME XII.

(15.) *Sommer la suite* $S = \text{cos.}\,(m \pm q) + \text{cos.}\,(m \pm 2q) + \text{cos.}\,(m \pm 3q) + \text{cos.}\,(m \pm 4q) + \ldots\ldots\ldots + \text{cos.}\,(m \pm nq)$!

SOLUTION.

On a (*théorèmes III & IV*),

$\text{cos.}\,(m \pm q) = \text{cos.}\,m\,\text{cos.}\,q \mp \text{sin.}\,m\,\text{sin.}\,q$;

$\text{cof.}\,(m \pm 2q) = \text{cof.}\,m\,\text{cof.}\,2q \mp \text{fin.}\,m\,\text{fin.}\,2q;$

$\text{cof.}\,(m \pm 3q) = \text{cof.}\,m\,\text{cof.}\,3q \mp \text{fin.}\,m\,\text{fin.}\,3q$, &c.

Ainfi

$$S = \text{cof.}\,m\,(\text{cof.}\,q + \text{cof.}\,2q + \text{cof.}\,3q + \ldots\ldots + \text{cof.}\,nq) \mp \text{fin.}\,m\,(\text{fin.}\,q + \text{fin.}\,2q + \text{fin.}\,3q + \ldots\ldots + \text{fin.}\,nq);$$

c'eft-à-dire,

$$S = \frac{\text{cof.}\,m\,\text{cof.}\,q\,[\text{fin.}\,nq + \text{fin.}\,(n+1)\,q - \text{fin.}\,q]}{\text{fin.}\,2q}$$

$$\mp \frac{\text{fin.}\,m\,\text{fin.}\,q\,[1 + \text{cof.}\,q - \text{cof.}\,nq - \text{cof.}\,(n+1)\,q]}{1 - \text{cof.}\,2q};$$

C. Q. F. T.

PROBLEME XIII.

(16.) *Sommer la fuite* $S = \text{fin.}\,(m \pm q)^2 + \text{fin.}\,(m \pm 2q)^2 + \text{fin.}\,(m + 3q)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{fin.}\,(m \pm nq)^2$!

SOLUTION.

On a (*théorèmes V, III & IV*), $\text{fin.}\,(m \pm q)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\text{cof.}\,(2m \pm 2q)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\text{cof.}\,2m\,\text{cof.}\,2q}{2} \pm \frac{\text{fin.}\,2m\,\text{fin.}\,2q}{2};$

$$\text{fin.}\,(m \pm 2q)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\text{cof.}\,2m\,\text{cof.}\,4q}{2} \pm \frac{\text{fin.}\,2m\,\text{fin.}\,4q}{2};$$

$$\text{fin.}\,(m \pm 3q)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\text{cof.}\,2m\,\text{cof.}\,6q}{2} \pm \frac{\text{fin.}\,2m\,\text{fin.}\,6q}{2};$$

. . . .

$$\text{fin.}\,(m \pm nq)^2 = \frac{1}{2} - \frac{\text{cof.}\,2m\,\text{cof.}\,2nq}{2} \pm \frac{\text{fin.}\,2m\,\text{fin.}\,2nq}{2};$$

On aura donc,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2}$$

— cof.

$$- \frac{\text{cos. } 2m}{2} (\text{cos. } 2q + \text{cos. } 4q + \text{cos. } 6q + \ldots + \text{cos. } 2nq)$$

$$\pm \frac{\text{sin. } 2m}{2} (\text{sin. } 2q + \text{sin. } 4q + \text{sin. } 6q + \ldots + \text{sin. } 2nq),$$

ou bien *(Probl. I & II)*;

$$S = \frac{n}{2} - \frac{\text{cos. } 2m \text{ cos. } 2q \, [\text{sin. } 2nq + \text{sin. } 2(n+1)q - \text{sin. } 2q]}{2 \text{ sin. } 4q}$$

$$\pm \frac{\text{sin. } 2m \text{ sin. } 2q \, [1 + \text{cos. } 2q - \text{cos. } 2nq - \text{cos. } 2(n+1)q]}{2(1 + \text{cos. } 4q)};$$

C. Q. F. T.

PROBLEME XIV.

(17.) *Sommer la suite* $S = \text{cos. } (m \pm q)^2 + \text{cos. } (m \pm 2q)^2 + \text{cos. } (m \pm 3q)^2 + \ldots\ldots \text{cos. } (m \pm nq)^2$?

SOLUTION.

On a *(théorèmes VII, III & IV)*,

$$\text{cos. } (m \pm q)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\text{cos. } 2m \text{ cos. } 2q}{2} \mp \frac{\text{sin. } 2m \text{ sin. } 2q}{2};$$

$$\text{cos. } (m \pm 2q)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\text{cos. } 2m \text{ cos. } 4q}{2} \mp \frac{\text{sin. } 2m \text{ sin. } 4q}{2};$$

$$\text{cos. } (m \pm 3q)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\text{cos. } 2m \text{ cos. } 6q}{2} \mp \frac{\text{sin. } 2m \text{ sin. } 6q}{2};$$

[...]

$$\text{cos. } (m \pm nq)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\text{cos. } 2m \text{ cos. } 2nq}{2} \mp \frac{\text{sin. } 2m \text{ sin. } 2nq}{2};$$

Ainsi

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{\text{cos. } 2m}{2} (\text{cos. } 2q + \text{cos. } 4q + \text{cos. } 6q + \ldots + \text{cos. } 2nq)$$

$$\mp \frac{\text{sin. } 2m}{2} (\text{sin. } 2q + \text{sin. } 4q + \text{sin. } 6q + \ldots + \text{sin. } 2nq);$$

& par conséquent

$$S = \frac{n}{2} + \frac{\text{cos. } 2m \text{ cos. } 2q\,[\text{sin. } 2nq + \text{sin. } 2(n+1)q - \text{sin. } 2q]}{2\,\text{sin. } 4q}$$

$$\mp \frac{\text{sin. } 2m \text{ sin. } 2q\,[1 + \text{cos. } 2q - \text{cos. } 2nq - \text{cos. } 2(n+1)q]}{2(1 - \text{cos. } 4q)}.$$

C. Q. F. T.

Mêmes procédés pour les puissances supérieures.

Il est aisé de multiplier ces sortes de Problèmes, & d'en résoudre plusieurs autres qui leur sont analogues; mais je me borne aux essais qui précèdent.



MÉMOIRE SUR DES INSECTES SUR LESQUELS ON TROUVE DES PLANTES.

Par M. FOUGEROUX DE BONDAROY.

Les Caraïbes de l'île de la Dominique, connoissent sous le nom de *mouche végétante*, un Insecte sur lequel on trouve attachée une plante qui y végète; on a remarqué cette même singularité à la Chine, on l'y a appelée *plante-ver*: de pareils faits d'Histoire naturelle constatés, étoient dignes, sans doute, de l'attention des Physiciens qui s'en sont occupés. 11 Février 1769.

M. de Reaumur (*Mémoires de l'Académie, année 1726, page 302*) nous a fait connoître la plante-ver des Chinois; M.rs Watson & Hill, dans les *Transactions philosophiques* (*Volume LIII, page 271*), ont parlé des mouches végétantes des Caraïbes; enfin M. Needham, dans des notes qu'il vient d'ajouter à la traduction de l'Ouvrage de M. l'abbé Spalanzani sur les découvertes microscopiques *(a)* voit dans ces *plantes-animales (b)*, une preuve du passage & du changement du genre animal au végétal, & réciproquement du végétal à l'animal. Mon dessein n'est point d'examiner si cette mutation est prouvée de façon à ne laisser aucun doute, & si la décomposition d'un corps peut produire, en se développant, des êtres vivans; je me borne ici à ajouter des observations à celles qui ont déjà été données concernant les plantes qui végètent sur des insectes: peut-être qu'en

(a) Nouvelles Recherches sur les découvertes microscopiques & la génération des corps organisés, ouvrage traduit de l'Italien de M. l'abbé Spalanzani, Professeur de Philosophie à Modène, avec des Notes. Par M. Needham, *à Londres; & à Paris, chez Lacombe, 1769.*

(b) Par *plantes animales*, j'entends seulement des plantes qui végètent sur des animaux.

multipliant les remarques qui ſe rapporteront à ces faits ſinguliers, nous ſerons conduits à leur trouver une juſte explication; au moins eſt-il certain qu'elles pourront engager les voyageurs inſtruits à étudier ces plantes-animales, ſur les lieux où elles ſont communes, & dans des circonſtances qui doivent rendre complètement raiſon de la façon dont elles ſont produites.

Je me propoſe, dans ce Mémoire, de faire connoître différentes eſpèces d'inſectes ſur leſquels on trouve des plantes; je décrirai un ver où l'on voit la plante qui eſt plus ordinairement ſur la nymphe des cigales; & après avoir fait connoître ces plantes dans les états & grandeurs où j'ai pu me les procurer, j'indiquerai une plante d'une eſpèce différente de celle que je viens d'annoncer, mais toujours comme celle-ci, dans le genre des *fungus* que j'ai été à portée d'examiner ſur une cigale de Cayenne: enfin je terminerai ce Mémoire par peſer les ſentimens les plus probables pour expliquer cette réunion de l'animal & de la plante.

Pluſieurs de ces plantes-animales que j'ai vues dans des collections d'Hiſtoire naturelle, offrent une plante qui végète ſur la chryſalide d'une eſpèce de cigale, ſur la tettigomètre *(c)*, ainſi que l'a décrit M. Hill; on ne peut pas douter que ces inſectes ne ſoient des chryſalides de cigales, puiſque l'on peut ſur pluſieurs reconnoître deux caractères qui les diſtinguent principalement; la trompe ou ſuçoir *(pl. I, fig. 1)* & dans la *figure 3, a, b,* les deux groſſes pattes ou pinces que j'ai repréſentées ici vues ſéparées de l'animal auquel elles ont appartenu.

La plante porte ſur la tête de l'inſecte, ſur ſon corcelet ou ſur le corps de l'animal; la partie de l'inſecte où cette plante eſt poſée n'eſt donc pas toujours la même, puiſque ſur ceux que je décris, les tiges varient de poſition, & qu'il ſe trouve ſur ces inſectes *(pl. II, fig. 4, 5 & 6)*, une, deux, ou trois tiges placées ſur différentes parties de leur corps: les uns portent une ou deux tiges ſur leur tête *(pl. I, fig. 4 & 5)*, d'autres *(fig. 7)* les ont ſur leur corcelet ou ſur le corps de l'inſecte; d'autres enfin

(c) Ariſtote a nommé la cigale *tettigonie* & leur nymphe *tettigomètre*. Pline le dit *cap. XXVI, lib. II.*

en ont jusqu'à trois séparées *(pl. II, fig. 6)* dont les positions varient.

Il me paroît que la plante végète presque toujours sur la partie supérieure du corps de l'animal & non en dessous; je dis cependant *presque toujours*, parce que j'ai cru apercevoir une naissance de ces plantes sous le corps d'une crysalide de cigale qui en portoit une autre sur sa tête *(pl. I, fig. 4)*.

Il y a aussi des différences remarquables dans les plantes qui se trouvent sur ces insectes; elles varient beaucoup en longueur; la plus haute que j'aie vu avoit deux pouces, & étoit surmontée d'une tête ou masse. Il y en a cependant qui n'ont qu'un simple filet à peu près également gros sur toute la longueur de sa tige. Dans les plantes qui n'ont qu'une tige, elle est terminée par une tête plus ou moins renflée, ou elle porte à son extrémité une masse *(pl. I, fig. 7 & 8)*, ou la tête se ramifie, & les branches sont terminées par de petits tubercules *(pl. I, fig. 4 & 10)*.

La tettigomètre *(fig. 6)* porte sur sa tête une plante qui se termine par deux tubercules assez gros; celle de la *figure 10* est encore plus singulière, en ce qu'elle est branchue & très-garnie de tubercules, dont un *a* est creux.

L'examen de ces plantes ne laisse aucun doute sur la classe à laquelle elles appartiennent: elles doivent être mises dans celle des *clavaria*, décrits par M. Von-Linné, parce qu'il y a compris le genre que Micheli a appelé *lichen agaricus*, auquel notre plante a plus de rapport encore qu'aux *clavaria* décrits par Vaillant.

La racine de la plante couvre seulement le corps de l'insecte sur lequel elle végète. Lorsque l'insecte & la plante sont conservés dans l'esprit-de-vin, & qu'ils n'ont point été desséchés, comme dans la *pl. II, fig. 3 & 5;* on peut lever la plante & la séparer de l'animal, sans endommager celui-ci aucunement. On aperçoit pour lors sous le pédicule de la plante des cannelures *(*a*, fig. 8 & 9)* qu'ont dû produire les anneaux du corps de l'insecte; ainsi les racines de la plante ne pénètrent point le corps de l'animal.

La plante qui n'a point encore poussé de tête, & qui n'est point à son dernier terme d'accroissement *(pl. II, fig. 2, 3, 4 & 5)* est pleine, elle est comme dans les champignons, com-

posée de fibres longitudinales; quand elles sont sèches, au contraire, elles sont creuses, & il arrive souvent *(pl. I, fig. 10)* que les sommités sont percées d'une ouverture qui paroît avoir servi d'issue à un insecte; mais on sait combien il est commun de voir les *fungus* mangés par des vers qui se métamorphosent en sortant de ces plantes.

La plante que je vais décrire au lieu d'être comme celles dont j'ai parlé, adhérentes à des tettigomètres ou nymphes de cigales, se trouve attachée à une vraie cigale; celle-ci est originaire de Cayenne *(pl. II, fig. 12 & 13)*; la plante est une espèce de *fungus*, mais différente de celles que nous avons décrites; il est formé de longs filets blancs & soyeux qui recouvrent tout le corps de l'insecte & le débordent d'environ sept à huit lignes dessus & dessous le ventre de l'animal. J'ai dessiné cet insecte avec la plante vue en dessous *(fig. 12)*, & le même en dessus *(fig. 13)*. J'ai encore observé cette même plante attachée à un autre insecte genre des procigales.

Nous avons vu des *fungus* attachés à des nymphes de cigale ou à la cigale elle-même; examinons la *clavaria* sur des vers. J'ai plusieurs insectes dans cet état, conservés dans l'esprit-de-vin, qui prouvent que la *clavaria* s'attache aussi aux insectes qui sont sous cette forme. Je ne crois pas que l'on ait fait part de cette observation sur d'autres que la plante-ver des Chinois.

Ce ver ressemble à ceux qui donnent des scarabées; il est de la grosseur des vers qui produisent, après leur métamorphose, la petite espèce d'hannetons: son corps est composé *(pl. II, fig. 1, 2, 3, 4 & 5)* de plusieurs anneaux très-serrés; sa tête grosse & écailleuse est de peu de longueur; on y voit deux mâchoires ou scies assez avancées, & deux petites antennes composées de trois articulations. Le ver a quelques poils répandus sur les anneaux de son corps; il a six pattes, dont deux près de la tête sont un peu plus petites & plus en dedans du corps de l'animal.

On ne peut pas penser que les vers dont nous parlons, soient ceux qui donnent, par une seconde métamorphose, les nymphes des cigales, parce que suivant l'histoire que M. de Reaumur *(Histoire des Insectes, Tome V)*, a donnée de ces vers, ils n'au-

soient aucune ressemblance avec ceux que nous décrivons, puisque les cigales, au sortir de l'œuf, passent à l'état des vers hexapodes, dont deux pinces très-grosses les rapprochent beaucoup des formes qu'ils prendront étant nymphes; ces pinces les font différer essentiellement du ver que nous décrivons maintenant. Voici donc un second insecte sur lequel on trouve la *clavaria*, & c'est un fait intéressant pour l'histoire de cette singulière végétation.

Par l'état de conservation où j'ai ces insectes, il paroît que la plante a crû quelque temps sur l'animal en vie, car la *clavaria*, sur certains de ces insectes, a deux pouces de longueur *(pl. 11, fig. 6)*. Les vers sont entiers, fort sains & non desséchés. A la vérité, l'on sait aussi qu'il faut peu de temps pour la production parfaite d'un champignon.

On me permettra de rapporter ce que M. Watson a dit sur les mouches végétantes des Caraïbes, & l'explication du fait qu'en donne M. Hill; j'y réunirai aussi les observations qu'avoit faites auparavant M. de Reaumur sur la plante-ver de la Chine.

M. Watson dit dans les *Transactions philosophiques :* « La mouche végétante se trouve dans l'île Dominique, & ressemble « (si vous exceptez les ailes dont elle est privée) au bourdon, en « grandeur & en couleur : dans le mois de Mai elle s'enterre & « elle commence à végéter vers la fin du mois de Juin; l'arbrisseau « qui en provient arrive à sa perfection & ressemble à une branche « de corail; elle croît jusqu'à la hauteur de trois pouces, & porte « plusieurs petites gousses d'où naissent certains vers qui se méta- « morphosent ensuite en mouches comme certains vers en An- « gleterre ».

M. Hill, en répondant à M. Watson, explique ainsi le fait que nous venons d'exposer :

« Il y a à la Martinique un *fungus* du genre des *clavaria*, qui diffère en espèce de tout ce que nous avons connu jusqu'à pré- « sent, il produit sur les côtés des gousses; je l'appelle en conséquence, « la *clavaria sobolifera :* il croît sur les corps putrides des animaux « comme notre *fungus ex pede equino*, qui vient sur la corne des « chevaux morts : la cigale est fort commune à la Martinique, & « pendant son état de nymphe, connue alors par nos Auteurs «

» anciens ſous le nom de *tettigomètre*, elle s'enterre ſous des feuilles
» mortes pour attendre ſa métamorphoſe; alors ſi la ſaiſon n'eſt pas
» favorable, il périt un grand nombre de ces inſectes; en atten-
» dant, les ſemences de la *clavaria* s'attachent au cadavre & ſe dé-
» veloppent. Voilà exactement le fait, & ce qu'on peut penſer de
» vrai ſur ces productions, quoique les habitans ignorans croient
» réellement qu'une mouche végète, & que même l'on trouve ici
» un deſſin de cette plante de la main d'un Eſpagnol, ſous la
» forme d'un arbriſſeau à trois feuilles, en même temps qu'il repré-
» ſente l'animal qui emporte en volant ce même arbriſſeau ſur
ſon dos. »

Il ne peut plus y avoir aucun doute ſur les faits principaux que quantité de morceaux renfermés dans les cabinets ſervent à confirmer; c'eſt une plante dans la claſſe des *fungus* & de l'eſpèce des *clavaria*, dont la racine ou le pédicule eſt implanté ſur le corps d'un inſecte. Voilà les faits principaux. Que des ſupercheries faites dans le pays, changent cette ſingularité, en mettant des graines dans la tige de la *clavaria* ou autrement; il n'en ſera nullement beſoin pour exciter l'attention du Phyſicien; il ſubſiſtera ſans cela aſſez de difficultés pour expliquer comment ont lieu les faits conſtatés & reconnus pour vrais, après avoir écarté du récit des Voyageurs les circonſtances mal vues, & qui engageroient à chercher des explications d'autant plus inutiles qu'elles porteroient ſur des détails faux & mal obſervés.

La plante-ver dont a parlé M. de Reaumur *(pl. 11, fig. 10 & 11)* ſe trouve ſur un ver & non ſur une chryſalide; mais la plante dans les morceaux qu'a examiné M. de Reaumur, étoit ſituée ſur le dernier anneau du ver, près de l'anus. Il ſemble que la racine de la plante pince & ſaiſit l'extrémité du corps de l'inſecte: cette poſition de la plante, eu égard à l'inſecte, très-différente de celle qu'offrent ceux des Caraïbes, a fait penſer à M. de Reaumur, que l'inſecte étoit ainſi attaché à la racine de la plante, parce qu'il l'avoit choiſie pour s'y coller, y ſubir la ſeconde métamorphoſe & y devenir chryſalide; cette poſition étant commune à beaucoup d'autres eſpèces d'inſectes quand ils ſe changent en nymphes.

En effet, on ne doit pas être ſurpris (dans le ſentiment de M. de

M. de Reaumur) de trouver l'inſecte toujours attaché à la même plante, puiſqu'il la choiſiroit, comme le font beaucoup d'autres eſpèces d'inſectes, qui, nés ſur une plante, y ſubiſſent toute leur métamorphoſe.

La plante-ver des Chinois préféreroit l'extrémité de la racine pour y reſter adhérente, comme il eſt d'autres inſectes qui demeurent toujours attachés aux fibres d'une feuille, & conſtamment à la même partie de la plante.

Enfin une plante dont les proportions ſont aſſez conformes à celles de l'inſecte, l'animal qui dans le pays étoit peut-être vivant, & remuoit encore lorſque la plante s'y trouvoit attachée, ont engagé les Chinois à ſoutenir le changement de l'inſecte en plante, tandis qu'ils n'auroient pas annoncé la même merveille dans d'autres circonſtances où l'inſecte ſe ſeroit attaché à quelques autres parties d'une plante pour s'y métamorphoſer; & il ne leur eſt pas venu dans l'idée, dans ce dernier cas, qui ne s'y prêtoit pas comme le premier, d'avancer que les branches de ces végétaux où il y a des inſectes attachés, ſe changent en animaux, ou portent des inſectes, comme elles produiſent des fruits & des ſemences.

Quoiqu'il y eût pluſieurs faits analogues qui conduiſiſſent M. de Reaumur à établir ſa façon de penſer ſur la plante-ver des Chinois; cependant nous convenons qu'ici c'eſt la plante qui ſemble s'attacher à l'inſecte, & non l'inſecte à la plante, & que les inſectes végétans des Caraïbes dérangent beaucoup l'explication de M. de Reaumur. Nous avouons même avec M. Needham, que le ſentiment de M. de Reaumur ne peut plus expliquer comment ont été formés aucuns des morceaux que nous venons de décrire. Nous ajouterons que le peu de circonſtances bien examinées dans le pays, ne mettent pas encore à portée de prononcer avec ſûreté ſur ces faits myſtérieux, & par conſéquent je me garderai d'haſarder des conjectures; je prie ſeulement de comparer le ſentiment de M. Hill avec les faits principaux qui ſont certains, & l'on jugera ſi ce n'eſt pas le plus ſimple & le plus probable de ceux qu'on a donnés.

On ſait qu'il y a des *fungus* qui ne vivent que ſur une eſpèce de plante, ou qui ne tirent leur nourriture que d'une ſeule ſubſtance:

ainſi une eſpèce ne ſe trouvera que ſur la ſole des chevaux morts; certains fungites ne viendront que ſur telle ou telle autre racine de plante; enfin les plantes ou bulbes paraſites ne tireront leur nourriture que d'une même eſpèce de plante; on ne doit pas être plus étonné en voyant la *clavaria* s'attacher toujours à des vers ou aux nymphes des cigales, & à des inſectes qui s'enterrent, que l'on ne l'eſt en trouvant le même *fungus* ſur la ſole des chevaux morts, un autre *fungus* ſur le crotin, une éponge & une eſpèce d'*alcionium* ſur des crabes, des champignons ſur la racine du charme, la bulbe ou mort du ſafran ſur le ſafran, l'hypociſte ſur le ciſte, &c.

Nous avons vu les *fungus* placés ſur chaque partie du corps de l'inſecte ; ces différentes poſitions de la plante peuvent dépendre, dans le ſentiment de M. Hill, de celle qui eſt plus ordinaire au corps de l'inſecte quand il eſt prêt à ſe métamorphoſer, & lorſque la plante commence à végéter ſur l'animal.

Enfin, le grand nombre de ces aurélies, qui conſtamment au pays des Caraïbes, dans certaines ſaiſons, portent ces plantes, n'ajoute rien au merveilleux qu'offriroit un ſeul de ces faits iſolé. Lorſqu'il y aura beaucoup de ces vers ou de ces nymphes, les circonſtances qui procurent une de ces plantes ſe répèteront auſſi ſur beaucoup d'autres, & ſi la plante croît dans un pays, celui où on ne la trouvera pas, quand même l'inſecte y ſeroit vivant, ne verra cependant point arriver le phénomène dont nous parlons.

Je ne crois pas que l'on puiſſe compter encore au nombre des obſervations conſtantes celle de l'inſecte des Portugais, appelé *louva deos* ou *prégue-dieu*, que cite M. Needham ; voyez Guillaume Piſon, Médecin Hollandois, & pluſieurs Voyageurs, qui croient que la branche d'une plante devenant animal, l'inſecte *louva deos* lui doit ſa naiſſance.

Le *louva deos* eſt un inſecte du Breſil, de la longueur d'environ un demi-pied, avec ſix pattes; Piſon aſſure qu'il l'a vu naître d'une petite branche. Quoique la grandeur decet animal eût pu faciliter le moyen de le bien obſerver, juſqu'à ce que l'hiſtoire *du louva deos* ſoit mieux circonſtanciée, je croirai avoir lieu

de ſoupçonner qu'il faut attribuer ce qu'on en a dit à un inſecte très-connu du genre des mantes ; cet inſecte porte en Provence un nom qui revient beaucoup à celui de *louva deos* des Portugais, on l'y nomme *prega-diou, prie-dieu !* parce qu'il met ſes pattes de devant dans une poſition où il ſemble à genoux, joignant les mains. On connoît des eſpèces de mantes depuis un pouce & demi de long, juſqu'à un demi-pied & plus : la plupart ſont d'une couleur verte qui approche de celle des végétaux ; elles naiſſent dans des branches d'arbres. Il n'en a peut-être pas fallu davantage pour que des Voyageurs aient établi le changement de la plante en inſecte, comme Piſon a dit l'avoir vu s'opérer.

EXPLICATION DES FIGURES.

PLANCHE I.

FIGURE 1, une nymphe de cigale des Caraïbes : on voit très-bien le ſuçoir *a* qui caractériſe cette eſpèce d'inſecte ; ſes pattes ſont caſſées.

Fig. 2, une nymphe de cigale, auſſi de la Martinique ; les deux groſſes pattes ou pinces qui accompagnent toujours la cigale ſous la forme de chryſalide ſe voient très-diſtinctement ici.

Fig. 3, *a*, *b*, les deux groſſes pattes ou pinces de cet inſecte vues ſéparément & groſſies.

Fig. 4, une nymphe de cigale avec une plante ſur la tête de l'animal, l'extrémité ſupérieure de la plante eſt terminée par pluſieurs petits boutons.

Figure 5, une nymphe de cigale avec deux tiges de plantes poſées ſur la tête de l'inſecte ; une des deux plantes eſt ſurmontée d'un gros tubercule, l'autre plus petite n'offre qu'un filet.

Fig. 6, une chryſalide de cigale, dont la tête porte une plante avec des tubercules d'inégales groſſeurs ; on voit aiſément ſur ce morceau le ſuçoir *a* qui caractériſe la cigale.

Fig. 7, une chryſalide de cigale qui porte une plante ſur ſon corcelet, dont l'extrémité ſupérieure eſt formée en maſſe, repréſentée plus en grand dans la *fig. 8*.

Fig. 8, la tête de la plante deſſinée plus en grand.

Fig. 9, une plante deſſinée ſans l'inſecte qui la portoit ; elle eſt terminée

par deux gros tubercules, & eſt ſingulière en ce qu'à la moitié de ſa longueur elle porte d'autres pétits tubercules.

Fig. 10, une plante branchue, dont les branches ſe terminent par de petits tubercules, dont un *a* eſt creux & percé.

PLANCHE II.

Fig. 1, ver ſur lequel végète une plante; elle eſt naiſſante; le ver a été conſervé dans l'eau-de-vie.

Fig. 2, autre ver avec une plante plus grande; il eſt vu en deſſous de grandeur naturelle.

Fig. 3, le même ver, mais du double de grandeur; on aperçoit aiſément ſes ſix pattes, ſes mâchoires en ſcies & ſes deux antennes *aa*, enfin la racine de la plante qui s'étend ſur tout le corps de l'inſecte.

Fig. 4, un ver avec une plante plus grande & vue en deſſus.

Fig. 5, le même ver, au moins du double plus gros, afin qu'on puiſſe mieux voir ſes ſix pattes & ſes antennes.

Fig. 6, un ver avec trois plantes ſur différens anneaux du corps de l'inſecte.

Fig. 7, deux plantes ſéparées de l'inſecte auquel elles étoient adhérentes.

Fig. 8, le pédicule d'une plante pour montrer les cannelures produites par les anneaux du corps de l'inſecte ſur lequel elle étoit implantée.

Fig. 9, une plante avec ſon pédicule & les cannelures de ſon pied.

Fig. 10, la plante-ver des Chinois, telle que M. de Reaumur l'a décrite, *Mémoires de l'Académie, année 1726*.

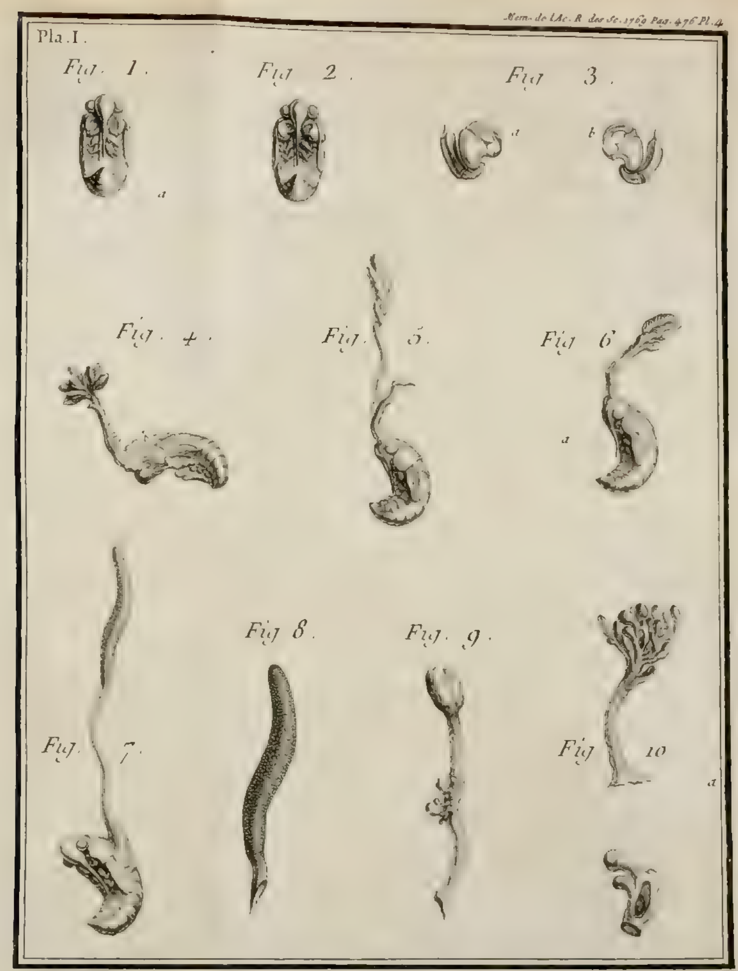
Fig. 11, la même vue en deſſous.

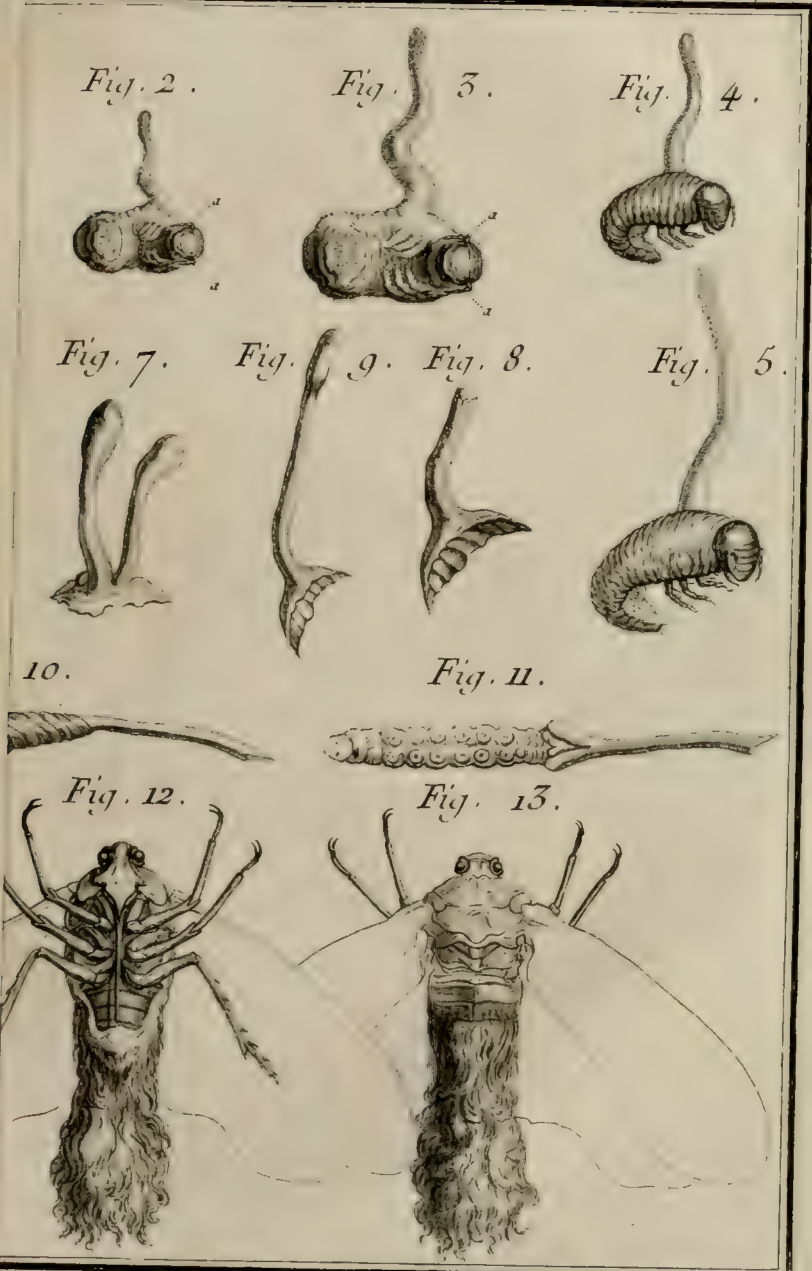
Fig. 12, la partie inférieure du corps d'une cigale de Cayenne, qui porte un *fungus* d'un autre genre que les précédens; la plante eſt compoſée d'eſpèces de palmes ou longs filets blancs, légers & ſoyeux: on ne voit ici que le corps de l'inſecte, ſeulement pour donner une idée de la plante qui y eſt attachée & faire ſentir les différences avec les *fungus* des figures précédentes.

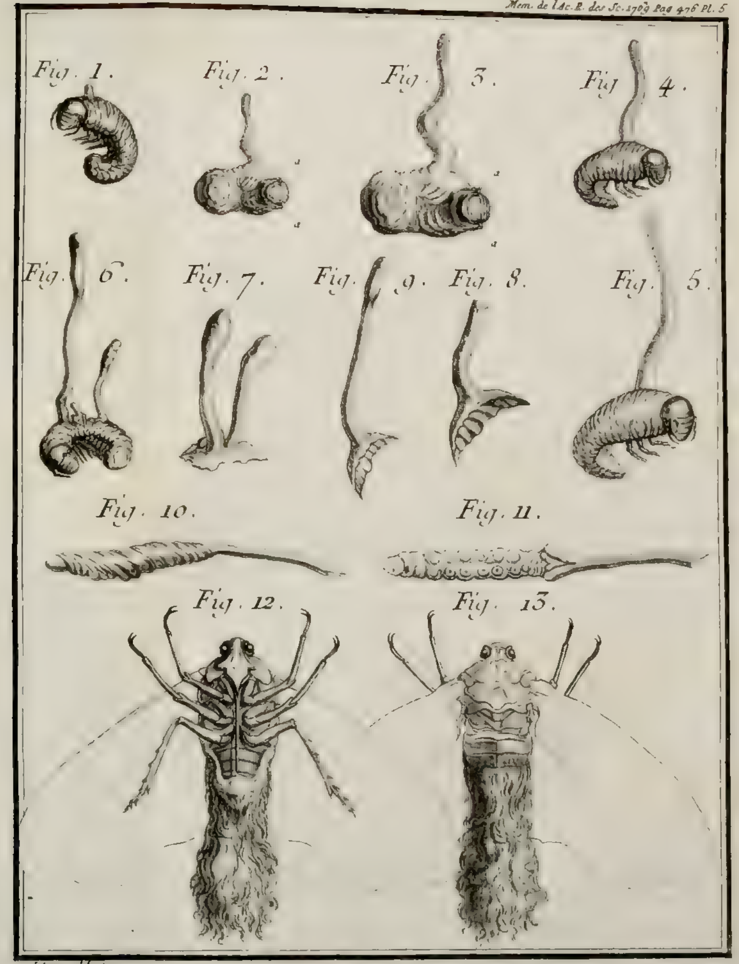
Fig. 13, la même partie de la cigale de Cayenne en deſſus où l'on voit la plante qui enveloppe principalement la partie inferieure du corps de l'inſecte.




Fig. 2.
Fig. 3.
a
b
Fig. 5.
Fig. 6.
a
Fig 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
d


Mem. de l'Ac. R. des Sc. 1769 Pag. 476 Pl. 4
Pla. I.
Fig. 1.
a
Fig. 2.
Fig. 3.
a
b
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
a
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
a
J. Ingram del. et sc.


Fig. 2.
a
a
Fig. 3.
a
a
Fig. 4.
Fig. 7.
Fig. 9.
Fig. 8.
Fig. 5.
10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.



J. Ingram del. et sc.

DÉTERMINATION GÉNÉRALE DE L'EFFET DES ROUES MUES PAR LE CHOC DE L'EAU.

Par M. l'Abbé BOSSUT.

I.

LES machines qui ont pour force mouvante l'action d'un fluide, font ordinairement conduites par des roues garnies d'*ailes* ou de *pots*, qui tournent en vertu du choc de l'eau contre les ailes, ou du poids de l'eau reçue continuellement dans les pots, quelquefois en vertu de ces deux causes réunies. Les roues de la première espèce ont l'avantage de pouvoir prendre l'eau par-dessous, & n'exigent pas, comme les autres, que le courant ait beaucoup de chute; elles font d'un fréquent usage dans la pratique.

M. Parent a trouvé, dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1704, qu'en substituant à toutes les aîles qui reçoivent le choc d'un fluide, une surface plane de même étendue, frappée perpendiculairement par le fluide, le centre d'impression de cette surface doit prendre le tiers de la vîtesse du courant, pour que l'effet de la machine soit un *maximum*. Cette théorie a été adoptée par tous les Mécaniciens, ou du moins on ne s'est pas mis en peine d'en examiner les principes. Elle est cependant défectueuse; la substitution proposée est précaire & inexacte. Pour résoudre le Problème avec toute la précision qu'il admet, il faut considérer séparément l'impulsion du fluide contre chaque aile, & prendre ensuite la somme de toutes ces impulsions. Je me propose ici de donner cette solution générale.

II.

On ſait que ſuivant la théorie ordinaire de la percuſſion des fluides, le choc d'un fluide contre une ſurface plane eſt comme le produit de cette ſurface par le quarré de la vîteſſe du fluide, & par le quarré du ſinus de l'angle d'incidence de ce fluide ſur le plan : cette règle eſt aſſez exacte quant aux deux premiers élémens; elle l'eſt moins pour le troiſième, & ceſſe même d'être admiſſible lorſque l'obliquité du choc eſt très-grande. Mais cette grande obliquité n'a preſque jamais lieu pour les roues mues par le choc de l'eau, que j'ai ici en vue; c'eſt pourquoi je m'en tiendrai à la règle en queſtion, qui eſt fort ſimple, & qu'on ne doit abandonner que quand on pourra lui en ſubſtituer une autre, exempte de toute difficulté, & d'un uſage commode dans la pratique.

III.

Fig. 1. Soit $AKDB$ *(fig. 1)* la circonférence extérieure d'une roue plongée dans un courant horizontal $XYTZ$, dont tous les points ſe meuvent ſuivant des directions parallèles entr'elles, & avec une même viteſſe uniforme. Que cette roue porte un nombre quelconque d'aîles Ee, Ff, Gg, Hh, &c. dirigées au centre C. Ayant abaiſſé la droite CI, verticale ou perpendiculaire à la ſurface XY du fluide, ſoient menées parallèlement à la même ſurface, les droites $E1$, $F2$, $G3$, $H4$, &c. Il eſt clair qu'en allant de A vers K, les dernières ailes ſont couvertes & garanties en partie du choc de l'eau, par les précédentes. J'aurai ſimplement égard à l'impulſion du fluide contre les parties EV, FV', GV'', HV''', &c. des ailes; & je ſuppoſerai que les parties $V'f'$, $V''g'$, $V'''h'$, &c. n'éprouvent aucun choc, ou du moins je négligerai un tel choc, en cas qu'il exiſte réellement. Cette manière d'enviſager l'action du fluide me paroît exacte ou du moins très-admiſſible dans un Problème phyſico-mathématique, tel que celui-ci qui n'eſt pas ſuſceptible d'une ſolution rigoureuſe. Car

1.° Dans les roues placées ſur des rivières, il eſt évident que le fluide, après avoir frappé les parties EV, FV', GV'', &c.

ſe réfléchit, gliſſe par les côtés, & ſe mêle avec le fluide environnant. Il ne lui reſte donc, dans le ſens du courant, qu'une vîteſſe fort petite, laquelle ne peut par conſéquent produire qu'un effet inſenſible ſur la roue. Je conviens que ſi les intervalles des ailes étoient très-conſidérables, le fluide pourroit acquérir de nouveau dans l'intervalle de deux ailes une vîteſſe capable de donner une impulſion ſenſible à l'aile antécédente; mais ce cas-là n'eſt qu'une pure hypothèſe, & n'a pas lieu dans la pratique.

2.° Quant aux roues plongées dans des courſiers, le fluide après avoir choqué les parties EV, FV', GV'', &c. n'a pas tout-à-fait la même liberté de ſe dégager des ailes que dans le premier cas; mais il trouve néanmoins à s'échapper; il gliſſe en partie ſur les ailes, l'autre partie ſort par les vides qui ſe trouvent entre l'aile & le courſier, & par le vide que deux ailes contiguës laiſſent au fond, lorſque la droite qui diviſe en deux parties égales l'angle formé par ces deux ailes, eſt placée dans la verticale. L'impulſion contre les parties EV, FV', GV'', &c. eſt donc toujours incomparablement plus ſenſible que le choc (ſuppoſé qu'il exiſte en effet) contre les parties $V'f'$, $V''g'$, &c. D'ailleurs ce dernier choc prétendu eſt d'une irrégularité qui ne donne aucune priſe au calcul; & dans le cas où l'on voudroit abſolument s'embarraſſer du mouvement du fluide dans les eſpaces $VEV'f'$, $f'FV''g'$, &c. il faudroit renoncer à toute ſolution théorique du Problème. Si on l'a réſolu, en employant d'autres hypothèſes, je crois que ces hypothèſes ſont moins naturelles & ſujettes à plus de difficultés que la précédente.

I V.

Cela poſé, ſoit Mm un élément quelconque de l'aile Ee. Du point A où la ſurface du fluide rencontre la circonférence $AKDB$, ſoit mené au centre C le rayon CA. Que les droites infiniment petites Mx, My repréſentent reſpectivement les eſpaces parcourus dans un inſtant par le fluide & par le point M de l'aile. Je décompoſe la vîteſſe Mx en deux autres My, Mz; il eſt évident que le fluide n'agit ſur l'élément Mm qu'en

vertu de la ſeconde vîteſſe Mz. Soit prolongée juſqu'en n la droite xz qui ſera évidemment perpendiculaire à EV. Suppoſons enſuite,

Le rayon CA de la roue	$= a$.
La largeur, c'eſt-à-dire la dimenſion horizontale des ailes.	$= b$.
Le ſinus total	$= 1$.
L'angle ACI	$= m$.
L'angle ECI, que fait la première aile choquée avec la verticale	$= p$.
L'angle ECF ou FCG, &c. compris entre deux ailes voiſines	$= q$.
La vîteſſe du fluide	$= V$.
La vîteſſe uniforme de la circonférence $AKDB$	$= u$.
EM	$= x$.
Mm	$= dx$.
L'impulſion perpendiculaire du fluide contre un plan β en repos	$= F$.

On aura évidemment My ou $zx = u \times \frac{CM}{CA} = \frac{u(a-x)}{a}$, $nx = V \text{coſ.}\, p$, $nz = nx - zx = V \text{coſ.}\, p - \frac{u(a-x)}{a}$, ſin. $zMn = \frac{nz}{Mz} = \frac{aV\text{coſ.}\,p - u(a-x)}{a \times Mz}$. Donc l'impulſion perpendiculaire du fluide contre Mm, qui eſt repréſentée (*art. II*) par $\frac{F}{\beta \times V^2} \times b\,dx \times (Mz)^2 \times (\text{ſin. } zMn)^2$ deviendra, comme on voit, $\frac{Fb\,dx\,[aV\text{coſ.}\,p - u(a-x)]^2}{\beta a^2 V^2}$; & ſi l'on nomme dM le moment de cette impulſion élémentaire, on aura

$$dM = \frac{Fb\,dx\,[aV\text{coſ.}\,p - u(a-x)]^2 \times (a-x)}{\beta a^2 V^2},$$

ou bien en faiſant, pour abréger, $\frac{Fb}{\beta V^2} = n$, & changeant un peu

un peu la forme de l'équation,

$$(A)\ dM = n\,dx \left(V - \frac{u(a-x)}{a\,\text{cof.}\,p}\right)^2 \times \text{cof.}\,p^2 \times (a-x).$$

V.

On voit que cette équation s'intègre sans aucune difficulté; mais avant que de faire cette opération, j'observe que si la quantité $V - \frac{u(a-x)}{a\,\text{cof.}\,p}$ au lieu d'être positive étoit négative, ce seroit l'aile qui poufferoit le fluide au lieu d'en être poussée. Cependant comme le quarré de l'une & l'autre expression est toujours le même, on ne pourroit pas discerner lequel des deux cas a lieu, si l'on intégroit à l'ordinaire. Voici donc ce qu'il faut faire en général. On examinera ce que devient la quantité $V - \frac{u(a-x)}{a\,\text{cof.}\,p}$ lorsque $x = EV = CE - CV = a - \frac{Ck}{\text{cof.}\,p} = a - \frac{a\,\text{cof.}\,m}{\text{cof.}\,p}$, & lorsque $x = 0$. Cela posé, 1.° si la quantité en question est positive dans les deux cas, le fluide pousse l'aile dans toute l'étendue VE, & le calcul se fait comme nous le verrons tout-à-l'heure. 2.° Si cette quantité est négative dans les deux cas, l'aile pousse le fluide dans toute l'étendue VE, & le calcul se fait encore de la même manière. 3.° Si la même quantité est positive dans le premier cas, & négative dans le second, une partie VR de l'aile est poussée par le fluide, tandis qu'au contraire l'autre partie RE de l'aile pousse le fluide. Alors on déterminera le moment M, de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque $V - \frac{u(a-x)}{a\,\text{cof.}\,p} = 0$, ou lorsque $x = \frac{au - aV\,\text{cof.}\,p}{u}$, & qu'elle reçoive sa valeur complette, lorsque $x = EV = a - \frac{a\,\text{cof.}\,m}{\text{cof.}\,p}$. Soit nommée G cette intégrale qui exprime le moment de l'impulsion de l'eau contre VR. On déterminera encore M de manière que l'intégrale

s'évanouiſſe lorſque $x = 0$, & reçoive ſa valeur complette lorſque $x = ER = \frac{au - aV\,\text{coſ.}\,p}{u}$. Soit nommée H cette intégrale qui exprime le moment de l'impulſion de la partie RE de l'aile contre le fluide. Il eſt clair que $G - H$ ou $H - G$ repréſentera le moment de la force réſultante qui pouſſe l'aile ou le fluide.

Je n'ai pas beſoin d'ajouter que ſi la quantité $V - \frac{u(a - x)}{a\,\text{coſ.}\,p}$ eſt poſitive en E, elle le ſera, à plus forte raiſon en V, & dans toute l'étendue EV.

V I.

Il eſt évident que le procédé du calcul eſt le même dans les trois ſuppoſitions, & qu'il s'agit toujours de prendre une ſomme ou une différence de momens d'impulſion. Je n'examinerai ici que la première, parce que dans la pratique il convient que le fluide pouſſe l'aile dans toute l'étendue de la partie qu'elle trempe dans l'eau. Or cela arrivera ſi l'on a ſeulement $V\,\text{coſ.}\,p = u$, ou $\text{coſ.}\,p = \frac{u}{V}$. Soit, par exemple, $u = \frac{V}{3}$; on aura $\text{coſ.}\,p = \frac{1}{3}$, & par conſéquent l'angle $p = 70\frac{1}{2}$ degrés. Il faut donc alors que la quantité dont l'aile trempe dans l'eau ſuivant la verticale, ſoit moindre que les deux tiers du rayon. L'enfoncement des roues qui trempent dans des courſiers eſt toujours très-petit par rapport au rayon. Dans les roues même placées ſur des rivières, l'enfoncement n'atteint pas, à beaucoup près, la limite qu'on vient d'indiquer. Ainſi mon calcul aura toute la généralité dont nous avons beſoin. Il eſt clair que la quantité $V - \frac{u(a - x)}{a\,\text{coſ.}\,p}$ étant ſuppoſée poſitive, les quantités $V - \frac{u(a - x)}{a\,\text{coſ.}\,(p - q)}$, $V - \frac{u(a - x)}{a\,\text{coſ.}\,(p - 2q)}$, $V - \frac{u(a - x)}{a\,\text{coſ.}\,(p - 3q)}$, &c. ſeront poſitives à plus forte raiſon.

VII.

En intégrant l'équation *(A)* de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque $x = 0$, & qu'elle reçoive sa valeur complette lorsque $x = EV = a - \frac{a \text{ cof. } m}{\text{cof. } p}$, on trouvera

$$M = \frac{n a^2 V^2 (\text{cof. } p^2 - \text{cof. } m^2)}{2} - 2 n a^2 V u \times$$

$$(\text{cof. } p - \frac{\text{cof. } m^3}{\text{cof. } p^2}) + n a^2 u^2 (1 - \frac{\text{cof. } m^4}{\text{cof. } p^4}).$$

Nous ferons, pour abréger, $n a^2 V^2 = N$, $u = K.V$; K étant un coëfficient donné; en sorte que $M = N [\frac{\text{cof. } p^2 - \text{cof. } m^2}{2}$

$$- \frac{2 K}{3} (\text{cof. } p - \frac{\text{cof. } m^3}{\text{cof. } p^2}) + \frac{K^2}{4} (1 - \frac{\text{cof. } m^4}{\text{cof. } p^4})].$$

VIII.

Par le point E soit menée $E\,1$ parallèle à la surface XY de l'eau. Il n'y a, comme nous l'avons observé *(art. III)*, que la partie FV' de l'aile Ff, qui soit frappée par le fluide. En nommant M' le moment de l'impulsion de l'eau contre cette partie, on trouvera toujours par la même méthode,

$$M' = N [\frac{\text{cof. } (p - q)^2 - \text{cof. } p^2}{2} - \frac{2 K}{3} [\text{cof. } (p - q) - \frac{\text{cof. } p^3}{\text{cof. } (p - q)^2}] + \frac{K^2}{4} (1 - \frac{\text{cof. } p^4}{\text{cof. } (p - q)^4})].$$

De même, en menant $F\,2$, $G\,3$, &c. parallèles à la surface du fluide, & nommant M'', M''', &c. M^{II} respectivement les momens des impulsions contre les parties FV', GV'', &c. & contre une partie indéterminée; on aura les équations

$$M'' = N [\frac{\text{cof. } (p - 2q)^2 - \text{cof. } (p - q)^2}{2} - \frac{2 K}{3} (\text{cof. } (p - 2q) - \frac{\text{cof. } (p - q)^3}{\text{cof. } (p - 2q)^2}) + \frac{K^2}{4} (1 - \frac{\text{cof. } (p - q)^4}{\text{cof. } (p - 2q)^4})],$$

$$M''' = N\left[\frac{\text{cof.}(p-3q)^2 - \text{cof.}(p-2q)^2}{2} - \frac{K^2}{3}\left(\text{cof.}(p-3q) - \frac{\text{cof.}(p-2q)^3}{\text{cof.}(p-3q)^2}\right) + \frac{K^2}{4}\left(1 - \frac{\text{cof.}(p-2q)^4}{\text{cof.}(p-3q)^4}\right)\right];$$

. . . .

$$M^{\text{II}} = N\left[\frac{\text{cof.}(p-\theta q)^2 - \text{cof.}[p-(\theta-1)q]^2}{2} - \frac{2K}{3}\left(\text{cof.}(p-\theta q) - \frac{\text{cof.}[p-(\theta-1)q]^3}{\text{cof.}(p-\theta q)^2}\right) + \frac{K^2}{4}\left(1 - \frac{\text{cof.}[p-(\theta-1)q]^4}{\text{cof.}(p-\theta q)^4}\right)\right];$$

le nombre entier $\theta + 1$ exprimant le nombre des ailes choquées.

IX.

Donc si l'on prend $S = \frac{M + M' + M'' \ldots\ldots\ldots + M^{\text{II}}}{N}$ pour abréger l'expression, & qu'on efface les termes qui se détruisent, on aura

$$S = \frac{\text{cof.}(p-\theta q)^2 - \text{cof.}\, m^2}{2}$$

$$-\frac{K}{3} \times \left\{\begin{array}{l} \text{cof.}\, p - \frac{\text{cof.}\, m^3}{\text{cof.}\, p^2} \\ + \text{cof.}(p-q) - \frac{\text{cof.}\, p^3}{\text{cof.}(p-q)^2} \\ + \text{cof.}(p-2q) - \frac{\text{cof.}(p-q)^3}{\text{cof.}(p-2q)^2} \\ + \text{cof.}(p-3q) - \frac{\text{cof.}(p-2q)^3}{\text{cof.}(p-3q)^2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \text{cof.}(p-\theta q) - \frac{\text{cof.}[p-(\theta-1)q]^3}{\text{cof.}(p-\theta q)^2} \end{array}\right\}$$

$$+\frac{K^2}{4}\times\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{\text{cof. } m^4}{\text{cof. } p^4} \\ +1-\frac{\text{cof. } p^4}{\text{cof. } (p-q)^4} \\ +1-\frac{\text{cof. } (p-q)^4}{\text{cof. } (p-2q)^4} \\ +1-\frac{\text{cof. } (p-2q)^4}{\text{cof. } (p-3q)^4} \\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +1-\frac{\text{cof. } [p-(\theta-1)q]^4}{\text{cof. } (p-\theta q)^4} \end{array}\right\}$$

Formule qui donne, pour un inſtant, le moment total de l'impulſion de l'eau, quel que ſoit le nombre des ailes. Il eſt clair que S varie à meſure que (tout reſtant d'ailleurs le même) l'angle p varie, ou que la roue, en tournant, prend différentes poſitions.

X.

Qu'outre les dénominations précédentes, on appelle encore Q le poids variable auquel le choc de l'eau peut faire équilibre à chaque inſtant, c ſon bras de lévier, dt l'élément du temps, dy le petit arc décrit pendant l'inſtant dt par un point de la circonférence $AKDB$; on aura $Q\times c = N.S$, & $Q\times c\times dt = NSdt$. Mais $dt = \frac{dy}{u} = -\frac{a\,dp}{u}$ (j'écris $-dp$, parce que t augmentant, p diminue); on aura donc $Q\times c\times dt = -\frac{aN.Sdp}{u}$, & $c\int Q\,dt = \frac{aN}{u}\int -Sdp$.

X I.

Ayant ſubſtitué pour S ſa valeur trouvée (*art. IX*), on aura dans le ſecond membre de l'équation, différentes ſortes de termes. Je mets à part dans les calculs ſuivans les coëfficiens conſtans. D'abord le terme $dp\,[\text{cof. } (p-\theta q)^2 - \text{cof. } m^2]$ s'intègre facilement: car il devient $\frac{dp}{2}+\frac{dp\,\text{cof. } (2p-2\theta q)}{2}$

$- dp$ cos. m^2, dont l'intégrale est

$$\frac{p}{2} + \frac{\text{sin.}\,(2p - 2\theta q)}{4} - p \text{ cos. } m^2.$$

L'intégrale de dp cos. p est sin. p; celle de dp cos. $(p - q)$ est sin. $(p - q)$; celle de dp cos. $(p - 2q)$ est sin. $(p - 2q)$, ainsi de suite pour les termes de cette espèce.

La seule difficulté est d'intégrer les termes

$$\frac{dp \text{ cos. } m^3}{\text{cos. } p^2}, \quad \frac{dp \text{ cos. } p^3}{\text{cos. } (p - q)^2}, \quad \frac{dp \text{ cos. } (p - q)^3}{\text{cos. } (p - 2q)^2}, \text{ \&c.}$$

ainsi que les termes

$$\frac{dp \text{ cos. } m^4}{\text{cos. } p^4}, \quad \frac{dp \text{ cos. } p^4}{\text{cos. } (p - q)^4}, \quad \frac{dp \text{ cos. } (p - q)^4}{\text{cos. } (p - 2q)^4}, \text{ \&c.}$$

Voici la manière de faire ces intégrations.

XII.

1.° Il est aisé d'intégrer $\frac{dp}{\text{cos. } p^2}$; car en faisant cos. $p = \frac{1}{z}$; on a $\frac{dp}{\text{cos. } p^2} = \frac{z\,dz}{\sqrt{(zz - 1)}}$, dont l'intégrale est $\sqrt{(zz - 1)}$ $= \frac{\text{sin. } p}{\text{cos. } p}$.

2.° Pour intégrer $\frac{dp \text{ cos. } p^3}{\text{cos. } (p - q)^2}$, on observera que cos. $p =$ cos. $[(p - q) + q] =$ cos. $(p - q)$ cos. $q -$ sin. $(p - q)$ sin. q, & par conséquent $\frac{dp \text{ cos. } p^3}{\text{cos. } (p - q)^2} = dp \times$ cos. $(p - q)$ cos. $q^3 - 3\,dp$ sin. $(p - q)$ sin. q cos. q^2 $+ \frac{3\,dp \text{ sin. } (p - q)^2 \text{ sin. } q^2 \text{ cos. } q}{\text{cos. } (p - q)} - \frac{dp \text{ sin. } (p - q)^3 \text{ sin. } q^3}{\text{cos. } (p - q)^2}$ $=$ cos. $q^3\,dp$ cos. $(p - q) - 3$ sin. q cos. $q^2\,dp$ sin. $(p - q)$ $+ 3$ sin. q^2 cos. $q \frac{dp}{\text{cos. } (p - q)} - 3$ sin. q^2 cos. $q\,dp$. cos. $(p - q) -$ sin. $q^3 \frac{dp \text{ sin. } (p - q)}{\text{cos. } (p - q)^2} +$ sin. $q^3\,dp$ sin. $(p - q)$.

Or, $\int dp$ cof. $(p - q) =$ fin. $(p - q)$; $\int dp$ fin. $(p - q) = -$ cof. $(p - q)$. Le terme $\frac{dp}{\text{cof.}\,(p-q)}$ s'intègre en faifant cof. $(p - q) = \frac{1}{s}$; ce qui donne

$$dp = \frac{-d\,(\frac{1}{s})}{\sqrt{[1 - (\frac{1}{s})^2]}} = \frac{ds}{s\sqrt{(ss-1)}}, \quad \frac{dp}{\text{cof.}\,(p-q)}$$

$= \frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}}$, dont l'intégrale eft $L.\,[s + \sqrt{(ss-1)}]$ $= L\,.\,\frac{1 + \text{fin.}\,(p-q)}{\text{cof.}\,(p-q)}$. Le terme $\frac{dp\,\text{fin.}\,(p-q)}{\text{cof.}\,(p-q)^2}$ eft la même chofe que $-\frac{d\,.\,\text{cof.}\,(p-q)}{\text{cof.}\,(p-q^2)}$; & il a par conféquent pour intégrale $\frac{1}{\text{cof.}\,(p-q)}$. Ainfi l'intégrale entière de $\frac{dp\,\text{cof.}\,p^3}{\text{cof.}\,(p-q)^2}$ eft cof. q^3 fin. $(p - q) + 3$ fin. q cof. q^2 cof. $(p - q) + 3$ fin. q^2 cof. $q\,.\,L\,.\,\frac{1 + \text{fin}\,(p-q)}{\text{cof.}\,(p-q)}$ $- 3$ fin. q^2 cof. q fin. $(p - q) - \frac{\text{fin.}\,q^3}{\text{cof.}\,(p-q)} -$ fin. q^3 cof. $(p - q)$.

De même, en obfervant que cof. $(p - q) =$ cof. $[(p - 2q) + q] =$ cof. $(p - 2q)$ cof. $q -$ fin. $(p - 2q)$ fin. q, on trouvera que l'intégrale de $\frac{pq\,\text{cof.}\,(p-q)^3}{\text{cof.}\,(p-2q)^2}$ eft cof. q^3 fin. $(p - 2q) + 3$ fin. q cof. q^2 cof. $(p - 2q)$ $+ 3$ fin. q^2 cof. q $L\,.\,\frac{1 + \text{fin.}\,(p-2q}{\text{cof.}\,(p-2q)} - 3$ fin. q^2 cof. q fin. $(p - 2q) - \frac{\text{fin.}\,q^3}{\text{cof.}\,(p-2q)} -$ fin. q^3 cof. $(p - 2q)$.

On intégrera par la même méthode les quantités analogues $\frac{dp\,\text{cof.}\,(p-2q)^3}{\text{cof.}\,(p-3q)^2}$, $\frac{dp\,\text{cof.}\,(p-3q)^3}{\text{cof.}\,(p-4q)^2}$, &c.

3.° Pour intégrer $\frac{dp}{\text{cos.}\, q^4}$, on fera $\text{cos.}\, p = \frac{1}{\sqrt{(1 + zz)}}$; & on aura $\frac{dp}{\text{cos.}\, p^4} = dz + z^2 dz$, dont l'intégrale est $z + \frac{z^3}{3} = \frac{\text{sin.}\, p}{\text{cos.}\, p} + \frac{\text{sin.}\, p^3}{3\, \text{cos.}\, p^3}$.

4.° Pour intégrer $\frac{dp\, \text{cos.}\, p^4}{\text{cos.}\, (p - q)^4}$, on observera, comme tout-à-l'heure, que $\text{cos.}\, p = \text{cos.}\, [(p - q) + q] = \text{cos.}\, (p - q)\, \text{cos.}\, q - \text{sin.}\, (p - q)\, \text{sin.}\, q$; & que par conséquent $\frac{dp\, \text{cos.}\, p^4}{\text{cos.}\, (p - q)^4} = dp\, \text{cos.}\, q^4 - 4\, \text{cos.}\, q^3\, \text{sin.}\, q\, \frac{dp\, \text{sin.}\, (p - q)}{\text{cos.}\, (p - q)} + 6\, \text{cos.}\, q^2\, \text{sin.}\, q^2 \times \frac{dp\, \text{sin.}\, (p - q)^2}{\text{cos.}\, (p - q)^2} - 4\, \text{cos.}\, q\, \text{sin.}\, q^3\, \frac{dp\, \text{sin.}\, (p - q)^3}{\text{cos.}\, (p - q)^3} + \text{sin.}\, q^4 \times \frac{dp\, \text{sin.}\, (p - q)^4}{\text{cos.}\, (p - q)^4} = dp\, (\text{cos.}\, q^4 - 6\, \text{cos.}\, q^2\, \text{sin.}\, q^2 + \text{sin.}\, q^4) - (4\, \text{cos.}\, q^3\, \text{sin.}\, q - 4\, \text{cos.}\, q\, \text{sin.}\, q^3) \times \frac{dp\, \text{sin.}\, (p - q)}{\text{cos.}\, (p - q)} + (6\, \text{cos.}\, q^2\, \text{sin.}\, q^2 - 2\, \text{sin.}\, q^4) \times \frac{dp}{\text{cos.}\, (p - q)^2} - 4\, \text{cos.}\, q\, \text{sin.}\, q^3 \times \frac{dp\, \text{sin.}\, (p - q)}{\text{cos.}\, (p - q)^3} + \text{sin.}\, q^4 \times \frac{dp}{\text{cos.}\, (p - q)^4}$. Les différens termes de cette quantité s'intègrent par des méthodes & des transformations analogues aux précédentes; & on trouve que l'intégrale entière de $\frac{dp\, \text{cos.}\, p^4}{\text{cos.}\, (p - q)^4}$ est $p\, (\text{cos.}\, q^4 - 6\, \text{cos.}\, q^2\, \text{sin.}\, q^2 + \text{sin.}\, q^4) + (4\, \text{cos.}\, q^3\, \text{sin.}\, q - 4\, \text{cos.}\, q\, \text{sin.}\, q^3)\, L.\, \text{cos.}\, (p - q) + (6\, \text{cos.}\, q^2\, \text{sin.}\, q^2 - \text{sin.}\, q^4)\, \frac{\text{sin.}\, (p - q)}{\text{cos.}\, (p - q)} - \frac{2\, \text{cos.}\, q\, \text{sin.}\, q^3}{\text{cos.}\, (p - q)^2} + \frac{\text{sin.}\, q^4\, \text{sin.}\, (p - q)^3}{\text{cos.}\, (p - q)^3}$.

Les quantités $\frac{dp\, \text{cos.}\, (p - q)^4}{\text{cos.}\, (p - 2q)^4}$, $\frac{dp\, \text{cos.}\, (p - 2q)^4}{\text{cos.}\, (p - 3q)^4}$, &c. s'intégreront de la même manière.

XIII.

XIII.

Tous ces calculs étant achevés, & prenant l'intégrale $\int - S\,dp$ de manière qu'elle s'évanouiſſe lorſque $p = m$, & reçoive ſa valeur complette lorſque $p = m - q$, on trouvera différentes ſuites de termes, telles que d'une ſuite à l'autre les termes ſe détruiſent en partie. Après avoir donc effacé tous ces termes, l'équation $c \int Q\,dt = \frac{a N}{u} \int - S\,dp$ devient

$$(B)\ c\int Q\,dt = \frac{a N}{u} \Big[\left(\frac{1}{4} - \frac{\text{coſ.}\, m^2}{2}\right) q + \frac{1}{8} [\text{ſin.}\,(2m - 2\theta q) - \text{ſin.}\,[2m - 2(\theta + 1) q]] + \frac{2K\,\text{coſ.}\, m^3}{3} \left(\frac{\text{ſin.}\, m}{\text{coſ.}\, m} - \frac{\text{ſin.}\,(m - q)}{\text{coſ.}\,(m - q)}\right) - \frac{2K}{3} [\text{ſin.}\, m - \text{ſin.}\,[m - (\theta + 1) q]] + \frac{2K}{3} (\text{coſ.}\, q^3 - 3\,\text{ſin.}\, q^2\, \text{coſ.}\, q) [\text{ſin.}\,(m - q) - \text{ſin.}\,[m - (\theta + 1) q]] + \frac{2K}{3} (3\,\text{ſin.}\, q\, \text{coſ.}\, q^2 - \text{ſin.}\, q^3) [\text{coſ.}\,(m - q) - \text{coſ.}\,[m - (\theta + 1) q]] - \frac{2K\,\text{ſin.}\, q^3}{3} \left(\frac{1}{\text{coſ.}\,(m - q)} - \frac{1}{\text{coſ.}\,[m - (\theta + 1) q]}\right) + 2K\text{ſin.}\, q^2\, \text{coſ.}\, q\,.\,L.\, \frac{[1 + \text{ſin.}\,(m - q)]\,[\text{coſ.}\,[m - (\theta + 1) q]]}{\text{coſ.}\,(m - q)\,[1 + \text{ſin.}\,[m - (\theta + 1) q]]} + \frac{K^2 q}{4} (\theta + 1 - \text{ſin.}\, q^4 - \text{coſ.}\, q^4 + 6\,\text{coſ.}\, q^2\, \text{ſin.}\, q^2) - \frac{K^2\, \text{coſ.}\, m^4}{4} \left(\frac{\text{ſin.}\, m}{\text{coſ.}\, m} + \frac{\text{ſin.}\, m^3}{3\,\text{coſ.}\, m^3} - \frac{\text{ſin.}\,(m - q)}{\text{coſ.}\,(m - q)} - \frac{\text{ſin.}\,(m - q)^3}{3\,\text{coſ.}\,(m - q)^3}\right) - K^2 (\text{coſ.}\, q^3\, \text{ſin.}\, q - \text{coſ.}\, q\, \text{ſin.}\, q^3) \times L.\, \frac{\text{coſ.}\,(m - q)}{\text{coſ.}\,[m - (\theta + 1) q]} - \frac{K^2}{4} (6\,\text{coſ.}\, q^2\, \text{ſin.}\, q^2 - \text{ſin.}\, q^4)$$

$$\left(\frac{\text{fin.}\,(m-q)}{\text{cof.}\,(m-q)} - \frac{\text{fin.}\,[m-(\theta+1)\,q]}{\text{cof.}\,[m-(\theta+1)\,q]}\right) + \frac{K^2\,\text{cof.}\,q\;\text{fin.}\,q^3}{2} \times$$

$$\left(\frac{1}{\text{cof.}\,(m-q)^2} - \frac{1}{\text{cof.}\,[m-(\theta+1)\,q]^2}\right) - \frac{K^2\;\text{fin.}\,q^4}{12}$$

$$\left(\frac{\text{fin.}\,(m-q)^3}{\text{cof.}\,(m-q)^3} - \frac{\text{fin.}\,[m-(\theta+1)\,q]^3}{\text{cof.}\,[m-(\theta+1)\,q]^3}\right)\Big].$$

XIV.

Dans cette formule, $\int Q\,dt$ repréſente le poids auquel de l'eau peut faire équilibre pendant le temps t que la roue emploie à parcourir l'angle q; ſuppoſons $\frac{\int Q\,dt}{t} = Q'$, Q' étant ſimplement un poids; & conſidérons que $t = \frac{aq}{u}$. De plus, imaginons qu'au moment où la première aile Ee entre dans l'eau, l'aile Kk ſoit placée dans la verticale; ce qui donne $m = (\theta + 1)\,q$. En diviſant le premier membre de l'équation (B) par t, le ſecond par $\frac{aq}{u}$, & faiſant $m = (\theta + 1)\,q$; on trouvera l'équation,

$$(C)\; Q' \times c = \frac{N}{q}\Big[\left(\frac{1}{4} - \frac{\text{cof.}\,m^2}{2}\right)q + \frac{\text{fin.}\,2\,q}{8}$$

$$+ \frac{2\,K\,\text{cof.}\,m^3}{3}\left(\frac{\text{fin.}\,m}{\text{cof.}\,m} - \frac{\text{fin.}\,(m-q)}{\text{cof.}\,(m-q)}\right) - \frac{2\,K\,\text{fin.}\,m}{3} +$$

$$\frac{2\,K}{3}\,(\text{cof.}\,q^3 - 3\;\text{fin.}\,q^2\,\text{cof.}\,q)\;\text{fin.}\,(m-q) + \frac{2\,K}{3}\,(\text{fin.}\,q\,\text{cof.}\,q^2$$

$$-\;\text{fin.}\,q^3)\;[\text{cof.}\,(m-q) - 1] - \frac{2\,K\,\text{fin.}\,q^3\,[1-\text{cof.}\,(m-q)]}{3\;\text{cof.}\,(m-q)}$$

$$+\;2\,K\,\text{fin.}\,q^2\;\text{cof.}\,q\,.\,L\,.\,\frac{1+\text{fin.}\,(m-q)}{\text{cof.}\,(m-q)} + \frac{K^2 q}{4}\,(\theta + 1)$$

$$-\;\text{fin.}\,q^4 - \text{cof.}\,q^4 + 6\;\text{cof.}\,q^2\;\text{fin.}\,q^2) - \frac{K^2\,\text{cof.}\,m^4}{4}$$

$$\left(\frac{\text{fin.}\,m}{\text{cof.}\,m} + \frac{\text{fin.}\,m^3}{3\,\text{cof.}\,m^3} - \frac{\text{fin.}\,(m-q)}{\text{cof.}\,(m-q)} - \frac{\text{fin.}\,(m-q)^3}{3\,\text{cof.}\,(m-q)^3}\right)$$

$$-\;K^2\,(\text{cof.}\,q^3\;\text{fin.}\,q - \text{cof.}\,q\;\text{fin.}\,q^3)\,.\,L\,.\;\text{cof.}\,(m-q)$$

$$-\;\frac{K^2}{4}\,(6\;\text{cof.}\,q^2\;\text{fin.}\,q^2 - \text{fin.}\,q^4)\;\frac{\text{fin.}\,(m-q)}{\text{cof.}\,(m-q)} +$$

$$\frac{K^2 \operatorname{cof.} q \operatorname{fin.} q^3 \operatorname{fin.} (m - q)^2}{2 \operatorname{cof.} (m - q)^2} - \frac{K^2 \operatorname{fin.} q^4 \operatorname{fin.} (m - q)^3}{12 \operatorname{cof.} (m - q)^3} \Big],$$ formule dans laquelle Q' repréſente le poids auquel le choc de l'eau peut être cenſé faire équilibre à chaque inſtant.

X V.

On voit qu'étant données les dimenſions de la roue & des ailes, la vîteſſe du fluide, celle de la roue; on voit, dis-je, que le moment de l'impulſion de l'eau, varie à meſure que le nombre des ailes varie. L'équation qui donne le *maximum* de ce moment en général, eſt extrêmement compoſée & preſque intraitable; c'eſt pourquoi je me bornerai ici à l'examen d'un cas particulier qui répandra de la lumière ſur ce ſujet. Suppoſons que la vîteſſe de la roue ſoit nulle, ou du moins puiſſe être regardée comme incomparablement plus petite que celle du courant; en ce cas, négligeant tous les termes qui contiennent u, l'équation (C) devient

$$Q' \times c = N\left(\frac{1}{4} - \frac{\operatorname{cof.} m^2}{2}\right) + \frac{N \operatorname{fin.} 2q}{8q};$$ d'où l'on tire, en égalant $Q' \times c$ à un *maximum*, $2\,q\,dq \operatorname{cof.} 2\,q - dq \operatorname{fin.} 2\,q = 0$, & par conſéquent $q = 0$. Donc alors le nombre des ailes doit être infini.

Ce réſultat n'a rien qui répugne dans la rigueur géométrique; & on doit conſidérer que conſéquemment à la ſuppoſition qui ſert de baſe au calcul, les ailes, à quelque point qu'on les multiplie, doivent toujours être regardées comme une ſuite de plans qui ſe préſentent au choc du fluide ſous différentes obliquités, & que par conſéquent elles ne forment jamais par leurs extrémités une circonférence continue. Mais dans l'état phyſique des choſes, les molécules du fluide ayant une certaine groſſeur, & ſe gênant les unes les autres dans leurs mouvemens; les extrémités des ailes doivent toujours laiſſer entre elles un certain intervalle qui permette au fluide d'exercer ſon action autant qu'il eſt poſſible. Le nombre des ailes qu'il convient de donner à une roue en repos, & à plus forte raiſon à une roue en mouvement,

pour ſe procurer la plus grande force qu'il eſt poſſible de la part du fluide, eſt donc toujours fini & limité.

XVI.

Il eſt à propos de faire encore ſur ce même ſujet une obſervation importante. Les ailes *Kk, Oo, Pp, Qq,* &c. qui ſont placées au-delà de la verticale *CI* tendent à pouſſer le fluide qui a perdu par le choc une partie conſidérable de la vîteſſe qu'il avoit au-devant de la roue. Par conſéquent, s'il ne lui reſte plus aſſez de vîteſſe pour ſe ſouſtraire au choc des ailes dont on vient de parler, il en réſultera une perte de mouvement dans la machine. Le moment d'impulſion des mêmes ailes contre le fluide eſt exprimé par une quantité analogue à celle des articles XIII & XIV. Ainſi dans ce cas les mêmes moyens qui augmentent le moment d'impulſion du fluide antérieur à la roue, augmentent la réſiſtance du fluide poſtérieur. Alors il ne faut pas trop multiplier le nombre des ailes. C'eſt ce qu'on pratique avec raiſon dans les roues placées ſur des rivières ; on pouſſe même ordinairement la précaution trop loin à cet égard. Quant aux roues qui ſe meuvent dans des courſiers, elles demandent un aſſez grand nombre d'ailes, ſur-tout lorſqu'on a l'attention, comme cela ſe pratique d'ordinaire, de donner un peu en-delà de la verticale *CI* une chute à l'eau pour lui faciliter le moyen de s'échapper & de ne point gêner le mouvement de la roue.

XVII.

Suppoſons maintenant que le nombre des ailes ſoit donné, & cherchons la vîteſſe que la roue doit prendre pour que l'effet de la machine ſoit un *maximum*. Ayant multiplié le premier membre de l'équation *(C)* par v vîteſſe du fardeau enlevé Q', & le ſecond par $\frac{cu}{a}$ quantité égale à v, & de plus ayant chaſſé K par le moyen de ſa valeur $\frac{u}{V}$; on aura une équation de cette forme

$$Q'v = Au + Bu^2 + Cu^3,$$

A, B, C étant des coëfficiens conſtans & donnés ; mais qui ſont différens, ſelon que le nombre des ailes eſt plus ou moins grand. Donc pour que l'effet de la machine devienne un *maximum*, il faut que l'on ait

$$A du + 2 B u du + 3 C u^2 du = 0,$$

& par conſéquent

$$u = \frac{-B + \sqrt{(B^2 - 3 . A . C)}}{3 C}.$$

XVIII.

Toute cette théorie a également lieu, ſoit que la roue ſoit verticale ou qu'elle ait toute autre poſition, pourvu que dans tous les cas le fluide puiſſe être cenſé agir dans le plan de la roue. Il nous reſte maintenant à examiner le cas où la direction du fluide fait un angle avec le plan de la roue. On ſent que cet angle doit influer dans le réſultat du calcul de la machine. Je traiterai ce nouveau Problème avec moins de généralité que le précédent, pour parvenir à des réſultats plus ſimples & plus ſatisfaiſans dans la pratique. Mais il ſera facile au lecteur d'y appliquer la méthode précédente, & de réſoudre ainſi la queſtion avec toute l'étendue dont elle eſt ſuſceptible.

XIX.

Soit donc $BHKL$ *(fig. 2)* une roue (que je ſuppoſe horizontale pour fixer les idées, & parce que ce cas eſt le plus ordinaire), laquelle eſt portée par l'arbre vertical CD ; les ailes $MNOP$ ſont inclinées au plan de cette roue, elle eſt mue par un courant VQ qui tombe d'une certaine hauteur, & qui frappe chaque aile à meſure que ſa ligne de milieu AB ſe trouve dans l'horizontale CB perpendiculaire au plan vertical qui paſſeroit par la direction VQ du canal. Les deux angles VQe, VQf ſont les angles de ſuite formés par le plan de l'aile $MNOP$ avec la direction du courant. Je conſidère le fluide comme un ſimple filet d'eau qui exerce toute ſon action ſur le point Q, Fig. 2.

ou du moins ſur un eſpace aſſez peu étendu pour que tous les points de cet eſpace puiſſent être cenſés tourner avec la même vîteſſe autour de l'axe *C D*.

XX.

Fig. 3. Sur la direction *V Q* (*fig. 3*) du fluide, je prends la partie *Q H* pour repréſenter ſa vîteſſe, & je décompoſe cette vîteſſe en deux autres *Q F*, *Q G*, dont la première eſt horizontale & la même que celle du point *Q* de l'aile. Le fluide n'agira ſur le plan *e f*, qu'en vertu de la vîteſſe *Q G*. Repréſentons par *Q R*, perpendiculaire à *e f*, l'impulſion que le fluide exerce ainſi perpendiculairement à *e f*; & décompoſons cette force en deux autres, l'une horizontale *Q S*, l'autre verticale *Q T* ou perpendiculaire au plan de la roue; la dernière eſt anéantie, & la première *Q S* eſt la ſeule qui tende à faire tourner la roue. Soient prolongées les droites *T Q*, *G Q*, *F Q*, vers *L*, *X*, *K*. Suppoſons

Le Rayon *C Q* de la roue	$= R.$
L'angle *V Q e*	$= m.$
L'angle *V Q L*	$= n.$
L'angle *L Q e* = ...	$m - n = p.$
Le ſinus total	$= 1.$
La vîteſſe *Q H* du fluide	$= V.$
Celle *Q F* de la roue	$= u.$
L'aire du plan *e f*	$= A.$
L'impuſion perpendiculaire que le fluide exerceroit, avec la vîteſſe *V*, contre un plan β en repos	$= F.$
Le fardeau auquel le choc de l'eau peut faire équilibre à chaque inſtant	$= Q'.$
Sa vîteſſe	$= v.$
Son bras de levier	$= r.$

Il eſt clair qu'on aura, en vertu de l'*article II*, l'équation

$$\text{force } QR = \frac{F \times A \times (QG)^2 \times (\text{ſin}. XQe)^2}{\beta \times V^2}.$$

Les côtés *QR*, *QS* de l'angle *RQS* étant perpendiculaires, chacun à chacun, aux côtés *eQ*, *QL* de l'angle *eQL*, ces deux angles ſont égaux, & on a par conſéquent, force *QS*

$= \text{force } QR \times \text{cof. } LQe = \frac{F \times A \times (QG)^2 \times (\text{fin. } XQe)^2 \times \text{cof. } LQe}{\beta \times V^2}$.

Donc, en vertu de l'équilibre de la force QS avec le fardeau Q', on aura

$$\frac{F \times A \times (QG)^2 \times (\text{fin. } XQe)^2 \times \text{cof. } LQe}{\beta \times V^2} \times R = Q' \times r.$$

Multipliant le fecond membre par v, le premier par $\frac{ur}{R}$ quantité égale à v, on aura

$$(A) \quad \frac{F \times A \times (QG)^2 \times (\text{fin. } XQe)^2 \times \text{cof. } LQe \times u}{\beta \times V^2} = Q'v,$$

expreffion générale de l'effet de la machine. Or en élevant par le point H la verticale HZ, on a $HZ = V \text{ cof. } n$, $QZ = V \text{ fin. } n$, $FZ = V \text{ fin. } n - u$, $\text{fin. } FHZ = \frac{FZ}{FH} = \frac{V \text{fin. } n - u}{FH}$, $\text{cof. } FHZ = \frac{HZ}{FH} = \frac{V \text{cof. } n}{FH}$. Donc, à caufe des angles égaux FHZ, XQL, & de l'angle XQe égal à la fomme des deux angles LQe, XQL; on aura $\text{fir. } XQe = \frac{V \text{cof. } n \text{ fin.} p + \text{cof.} p\, (V \text{ fin } n - u)}{FH}$. Donc $(QG)^2 \times (\text{fin. } \times Qe)^2$ ou $(FH)^2 \times (\text{fin. } XQe)^2 = [V \text{cof.} n \text{ fin.} p + \text{cof.} p\, (V \text{fin. } n - u)]^2$. L'équation (A) deviendra donc

$$(B) \quad \frac{F \times A \times [V \text{cof.} n \text{fin.} p + \text{cof.} p\, (V \text{fin. } n - u)]^2 . \text{cof.} p \times u}{\beta \times V^2} = Q'v.$$

XXI.

Pour que l'effet de la machine foit un *maximum*, il faut que $Q'v$ en foit un; ainfi différentiant l'équation précédente en faifant varier la vîteffe u de la roue, & l'angle LQe que fait l'aile avec la verticale, on aura

(C) $2\, (V \text{cof.} n\, dp \text{ cof.} p - V \text{fin. } n\, dp \text{ fin.} p + u\, dp$ $\text{fin.} p - du \text{ cof.} p)\, u \text{ cof.} p + (V \text{cof.} n \text{ fin.} p + V \text{ fin. } n$

$\text{cof.}\,p - u\,\text{cof.}\,p) \times (du\,\text{cof.}\,p - u\,dp\,\text{fin.}\,p) = 0.$

Or les deux différentielles du, dp étant indépendantes l'une de l'autre, on aura féparément les deux équations *(D)* & *(E)*,

$$(D)\ (-2u\,\text{cof.}\,p^2 + V\,\text{cof.}\,n\,\text{fin.}\,p\,\text{cof.}\,p + V\,\text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,p^2 - u\,\text{cof.}\,p^2)\,du = 0,$$

$$(E)\ 2\,(Vu\,\text{cof.}\,n\,\text{cof.}\,p^2 - 2\,Vu\,\text{fin.}\,n\,\text{fin.}\,p\,\text{cof.}\,p + 2\,u^2\,\text{fin.}\,p\,\text{cof.}\,p - Vu\,\text{cof.}\,n\,\text{fin.}\,p^2 - Vu\,\text{fin.}\,n\,\text{fin.}\,p\,\text{cof.}\,p + u^2\,\text{fin.}\,p\,\text{cof.}\,p)\,dp = 0.$$

La première donne $u = \frac{V(\text{cof.}\,n\,\text{fin.}\,p + \text{fin.}\,n\,\text{cof.}\,p)}{3\,\text{cof.}\,p}$, ou bien $u = \frac{V\,\text{fin.}\,(n+p)}{3\,\text{cof.}\,p}$, ou bien enfin $u = \frac{V\,\text{fin.}\,m}{3\,\text{cof.}\,p}$.

Mettons cette valeur de u dans l'équation *(E)*, & nous trouverons, toutes réductions faites,

$$2\,\text{cof.}\,m\,.\,\text{cof.}\,p = 0;$$

d'où l'on tire, ou $\text{cof.}\,p = 0$, ou $\text{cof.}\,m = 0$. Dans le premier cas, l'angle LQe feroit droit, ou l'aile ef feroit pofée horizontalement, & l'impulfion du fluide feroit un *minimum*. Dans le fecond, l'angle VQe eft droit, ou le fluide doit frapper perpendiculairement l'aile ef, & le choc répond à un *maximum*.

Il fuit de-là que l'effet de la machine fera un *maximum, lorfque 1.° le fluide frappera perpendiculairement l'aile* ef, *& que 2.° la vîteffe de la roue fera égale à celle du fluide, divifée par le triple du cofinus de l'angle que fait l'aile* ef *avec la verticale.*

XXII.

En fubftituant dans l'équation *(B)*, à la place de $\text{cof.}\,n$ fa valeur $\text{fin.}\,p$ dans le cas du plus grand effet, & à la place de u fa valeur $\frac{V}{3\,\text{cof.}\,p}$ dans le même cas, on trouvera l'équation

$$(F)\quad Q'v = \frac{4\,F \times A \times V}{27\,\beta},$$

qui

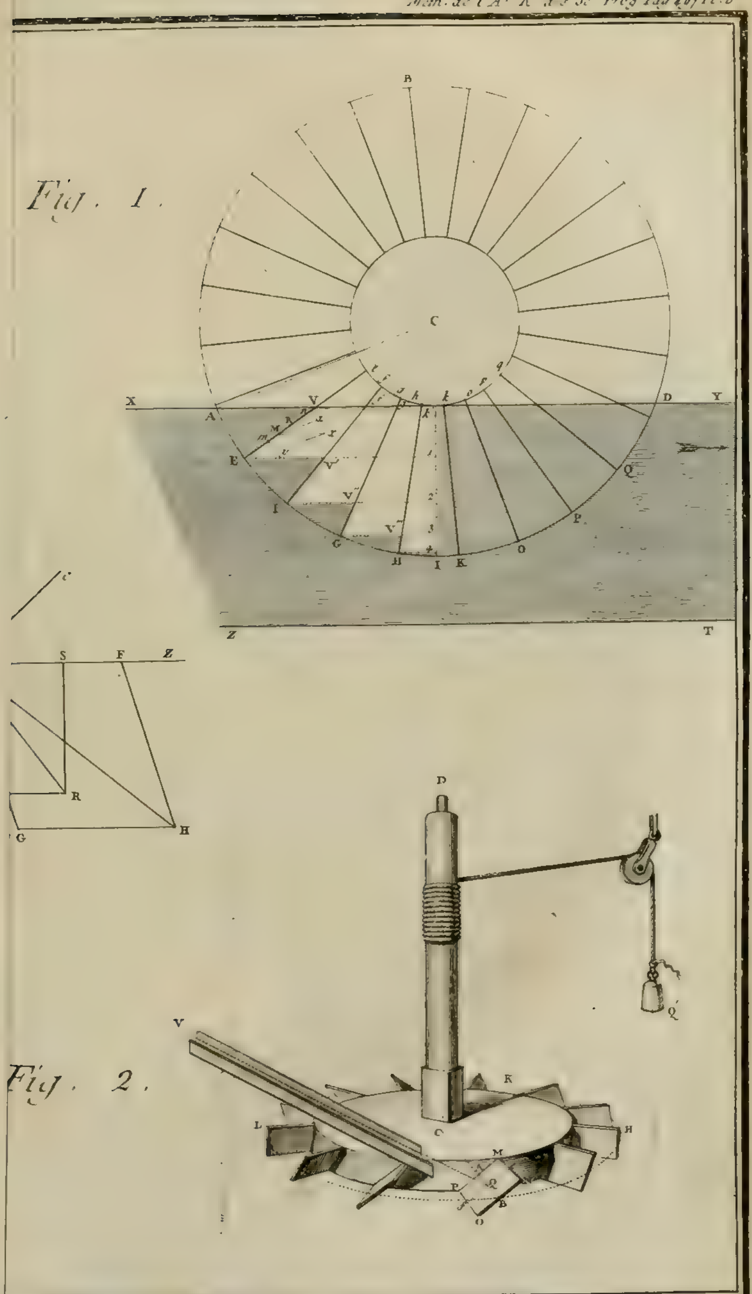

Fig. 1.
B
C
X
V
A
D
Y
E
I
G
H
I
K
O
P
Q
Z
T
S
F
Z
R
G
H
Fig. 2.
D
Q
V
K
L
C
M
H
P
Q
B
O

Fig. 1

Fig. 3

Fig. 2.

J. L. sc.

qui eſt l'expreſſion du plus grand effet que la machine peut produire.

Si l'on fait la ſurface donnée $\beta = A$, & qu'on nomme H la hauteur dûe à la vîteſſe V du fluide, on aura ſenſiblement, comme on ſait, $F = 2\,A.H.$ Ainſi $Q'v = \frac{8\,A.H}{27} \times V.$ D'où il ſuit que quand la machine produit ſon plus grand effet, elle peut imprimer à un poids d'eau, repréſenté par $\frac{8\,A.H}{27}$; la vîteſſe V du fluide, ou, ce qui revient au même, elle peut donner à un poids exprimé par $A.H$, les $\frac{8}{27}$ de la vîteſſe du courant.

Le même effet peut s'exprimer encore d'une autre manière qui en donnera une idée plus nette. Soit nommée M la quantité d'eau qui frappe l'aile en un temps *donné*, lequel ſert d'unité dans l'eſtimation de la vîteſſe V. Il eſt clair qu'on aura $A \times V = M.$ Ainſi, au lieu de l'équation $Q'v = \frac{8\,A.H}{27} \times V$, on aura $Q'v = M \times \frac{8}{27}\,H.$ D'où l'on voit que le plus grand effet de la machine ſe réduit à élever la quantité d'eau qui la fait mouvoir, aux $\frac{8}{27}$ de la hauteur dûe à la vîteſſe du courant.

XXIII.

Dans la pratique, les ailes des roues horizontales dont nous venons de parler, ne ſont pas exactement planes, comme nous l'avons ſuppoſé; mais on leur donne une petite courbure concave vers le fluide, en forme de cuillier, pour que l'eau agiſſe non-ſeulement par ſon choc, mais encore par une partie de ſon poids. Les réſultats des calculs précédens doivent donc être un peu modifiés relativement à cette circonſtance. Du reſte il ſera toujours facile de réſoudre directement le Problème, lorſqu'on connoîtra la courbure des ailes.

COMPARAISON DES OBSERVATIONS DU PASSAGE DE VÉNUS, FAITES EN AMÉRIQUE,

Avec celles qui ont été faites dans le nord de l'Europe.

Par M. LE MONNIER.

Assemblée publique du 15 Nov. 1769.

LE dernier passage de Vénus sur le Soleil, observé le 3 Juin au soir, a été regardé à juste titre par les Philosophes de ce siècle, comme aussi utile au moins que celui de 1761, pour vérifier la distance du Soleil à la Terre. On peut joindre aux raisons vulgaires qu'on en a alléguées celles qui regardent les causes physiques : en effet, les deux hypothèses qu'on a proposées sur la distance du Soleil à la Terre, lesquelles ont pour fondement les observations du passage de Vénus sur le Soleil, faites en 1761, m'ont toujours paru fondées sur quelques principes peu certains; car on n'a nullement songé à corriger les instans des contacts des deux disques de Vénus & du Soleil, lorsque ces astres ont paru en quelques contrées aux environs de l'horizon. Cependant l'Optique nous apprend que les rayons des bords supérieur & inférieur du Soleil s'y décomposent, ce que diverses expériences sur les foyers des grands verres objectifs ont pleinement confirmé. On peut dire aussi que chaque hypothèse sur la parallaxe horizontale du Soleil a été bâtie sur des positions géographiques arbitraires, parce que les Observateurs, dans leurs voyages, ont négligé pour la plupart d'observer des occultations d'Etoiles sous la Lune, ou bien le lieu de la Lune au méridien, ce que l'on pouvoit réitérer plusieurs jours de suite, à l'aide de l'instrument des passages.

Il faut convenir néanmoins que l'année 1761 nous a présenté un phénomène des plus rares & très-capable de rapprocher les

limites aſſignées à la diſtance du Soleil; que d'ailleurs les travaux immenſes faits par les Aſtronomes depuis ce temps-là, ſuffiroient pour décider la queſtion, ſi l'on s'attachoit ſur-tout à perfectionner la géographie des Villes & des ſtations où ont ſéjourné les Obſervateurs envoyés dans les différentes parties du monde.

Nous nous trouvons aujourd'hui plus à portée de connoître cette diſtance par une voie naturellement plus prompte; ſavoir par le calcul du paſſage réitéré de Vénus ſur le Soleil, qui a été vu le 3 Juin de cette année, & qui ne ſera plus viſible en Juin d'ici à une longue ſuite de générations: ce nouveau calcul nous donne le moyen de lever bien des incertitudes dans une recherche auſſi ſubtile & auſſi délicate qu'eſt la diſtance du Soleil à la Terre.

Avant que d'entrer en matière, je dois faire cette remarque importante, qu'on a ſu diſtinguer cette année, ce qui n'avoit pas été remarqué en 1761, le Soleil étant ici pour lors trop élevé ſur l'horizon; ſavoir deux ſortes de contacts internes un peu avant le coucher du Soleil. Les réfractions variables s'y ſont mêlées & ont dû nuire, il eſt vrai, à l'intervalle de temps qu'on vouloit meſurer entre ces deux contacts internes, parce que dans les temps orageux la circonférence du Soleil eſt plus défigurée que par un temps fort ſerein aux environs de l'horizon, & qu'ainſi les Obſervateurs ſe ſont trouvés par-là dans le cas de partager leur attention. Il y a d'ailleurs une ancienne règle preſcrite par Halley pour les contacts que pluſieurs ont adoptée, & qui n'a même été par quelques-uns que trop ſoigneuſement obſervée; ſavoir de ne juger la planète abſolument entrée ſur le diſque du Soleil que lorſque le filet de lumière du Soleil leur a paru à l'extrémité commune du rayon des deux diſques ou du cercle oſculateur. Cela eſt ſenſiblement vrai lorſque le Soleil paroît à de très-grandes hauteurs, comme il a été vu à la Martinique & à Saint-Domingue. Mais un jet de rayon de lumière eſt bien incertain dans la circonférence irrégulière du Soleil, telle qu'on l'a aperçue aux environs de l'horizon le 3 Juin 1769 dans les parties occidentales de l'Europe: auſſi les dernières obſervations en ont-elles fait juger autrement, & ſur-tout en France, à Londres & à Stockolm, où les contacts de Vénus au Soleil ont paru ſe

faire au moment de son entrée, proche le bord supérieur du disque, lequel est terminé par divers rayons que l'atmosphère a rendu par leur obliquité inégalement réfrangibles.

La première entrée de Vénus sur le Soleil étant pénible pour un seul Observateur, parce que l'heure en est vague & incertaine, & que son œil s'affoiblit & se fatigue, elle n'a été regardée souvent que comme une phase préparatoire aux observations suivantes. La Planète qui a environ une minute de diamètre, emploie 18 à 19 minutes d'heure à entrer tout-à-fait sur le disque du Soleil: si donc les observations déposent qu'entre les instans du double contact intérieur dont je vais parler, il y a près de 2 minutes de temps écoulé, ce seroit 5 à 6 secondes pour l'effet de la décomposition des rayons à la hauteur où a paru le Soleil; mais si ceux qui ont aperçu la circonférence du Soleil moins irrégulière n'ont guère trouvé que la moitié ou les deux tiers de cette durée entre les deux contacts internes; il en faut conclure que l'effet de la décomposition des rayons ne s'est pas étendu au-delà de 3 à 4 secondes.

Ainsi lorsque nous avons vu Vénus entrer sur le Soleil le 3 Juin 1769 par la partie supérieure de son disque, la circonférence du Soleil a paru complette & sans échancrure lors du premier contact intérieur, mais elle étoit terminée par d'autres rayons que celle qui a été jugée peu de temps après appartenir au point de coïncidence des deux disques ou du cercle osculateur; c'est-à-dire, lorsque l'on a cru distinguer le premier filet de lumière qui séparoit les deux disques.

Les observations de Nanci, de Rouen & de l'Orient, celles de Saint-Hubert & de Caen, déposent toutes en faveur de ce premier contact interne, & comme le Soleil y étoit plus bas qu'à l'Observatoire d'Angleterre, la durée entre ces premiers contacts internes, & ce qui a été vu par le filet de lumière, devient plus longue qu'en Angleterre, où la différence ne s'étend qu'à près d'une minute ou 1′ $\frac{1}{3}$ de temps écoulé aux horloges à pendule. A la vérité le Soleil étoit à Stockolm beaucoup plus bas, mais la sphère y étant plus oblique & le temps moins orageux, les réfractions horizontales pourroient y avoir été moins variables,

& par cette raison ont dû moins affecter la vision : aussi le temps écoulé entre les deux contacts internes n'a guère été désigné que par un seul Observateur, savoir de 84″ écoulées à la pendule vers 8h 43′ du soir.

Ces phénomènes doivent donc jeter quelque défiance sur l'emploi qu'on a fait en 1761 des contacts vus au lever du Soleil, & j'avois déjà assez averti qu'ils avoient besoin de corrections provenantes des causes physiques que les loix d'Optique & les micromètres objectifs avoient déjà indiquées il y a plus de vingt ans, sans néanmoins que l'on ait pu produire rien d'aussi avantageux que les passages de Vénus pour en assigner les limites.

Revenons à notre sujet qui s'étend à la recherche de la parallaxe ou distance du Soleil par les observations faites dans nos Colonies d'Amérique, & par celles de Péterßbourg & d'une autre ville située plus au nord. On a aperçu dans celle-ci, outre la sortie du disque, l'entrée ou le premier contact interne, & par conséquent la durée entière du passage de Vénus sur le disque du Soleil. Cette ville, nommée Cajanebourg est déjà connue par l'observation de Vénus de l'année 1761. Le ciel y a été encore favorable cette année-ci : elle est située sous 64d 13′ 30″ de latitude septentrionale, & un peu moins avancée vers l'Orient que n'est Péterßbourg, n'étant qu'à 1h 41′ 30″ du méridien de Paris.

La séparation des deux disques ou sortie totale a été vue à Péterßbourg le 4 Juin 17′ 52″ ½ après le contact interne, celui-ci s'étant fait à 3h 25′ 45″ du matin, & à Cajanebourg à 3h 14′ 27″ : ce sont-là les deux seules villes du nord connues jusqu'ici, où la sortie ait été vue par un temps fort serein. D'autres observations faites encore plus au nord, pourront parvenir à notre connoissance, & nous y aurons égard ; mais à Cajanebourg on a vu l'entrée où le contact intérieur, comme je l'ai dit, & il étoit alors 9h 20′ 45″ ½ du soir.

La sortie observée dans le nord est très-avantageuse pour reconnoître l'effet des parallaxes, en comparant les durées avec l'entrée observée par M. Pingré à Saint-Domingue, qui est la plus occidentale de nos deux îles de l'Amérique, où les seules observations de l'entrée, ainsi qu'en France, ont été faites. Nos

obſervations d'Europe donnent toutes l'entrée affectée de l'effet de la parallaxe qui a dû y être beaucoup plus grande qu'à Saint-Domingue, où le Soleil étoit élevé de $51^{d}\frac{1}{2}$ ou environ. Dans l'un & l'autre cas, l'effet de la parallaxe a dû accélérer l'entrée, mais comme cet effet a dû être d'une plus courte durée à Saint-Domingue qu'en Europe; il eſt aiſé de diſcerner quel eſt le choix d'une hypothèſe de parallaxe, ou quelle eſt la parallaxe du Soleil la plus approchante de la vraie qu'il faut adopter.

Je ſuppoſe que l'œil placé dans le Soleil apercevroit le demi-diamètre de la Terre ſous un angle de $7''\frac{1}{2}$, ce que l'on nomme autrement la parallaxe horizontale du Soleil, on trouve en ce cas, réduiſant toutes les obſervations au méridien de Paris, les entrées vues, ſoit à Saint-Domingue, ſoit en Europe, déduites des obſervations immédiates, comme il ſuit:

$7^{h}\ 34'\ 09''\frac{1}{2}$	à Saint-Domingue, & le contact intérieur obſervé		$2^{h}\ 44'\ 44''$ }
7. 35. 16.	à Breſt.		7. 11. 35. }
7. 34. 57.	à Greenwich	1.er contact extérieur {	7. 20. 10.
$7.\ 35.\ 48\frac{1}{2}$	à Stockolm	{	8. 23. 55.
7. 35. 50.	à Cajanebourg	contact intérieur obſervé	$9.\ 20.\ 45\frac{1}{2}$

Si l'on eût adopté la parallaxe horizontale de 10", on eût trouvé une différence un peu plus grande entre les réſultats de ces entrées du centre de Vénus, vues du centre de la Terre, ſuppoſée tranſparente. Le calcul m'a donné ce qui ſuit:

$7^{h}\ 35'\ 01''\frac{1}{2}$	. . . . à Saint-Domingue . . .	$74^{d}\ 10'$ à l'oueſt.
7. 37. 35.	. . . . . Breſt.	
7. 37. 03.	. . . . . Greenwich.	
7. 37. 41.	. . . . . Stockolm.	
$7.\ 37.\ 46\frac{1}{2}$	. . . . . Cajanebourg.	

J'ai choiſi à Greenwich & à Stockolm les premiers contacts extérieurs, parce que le Soleil y étoit plus élevé ſur l'horizon, & que le ciel y ayant été plus ſerein, trois à quatre Obſervateurs s'y ſont réunis pour mieux ſaiſir l'inſtant de ces premiers contacts: à Cajanebourg le ſecond contact ou intérieur y a été vu au défaut du premier, & le Soleil étoit pour lors élevé de deux degrés ſur l'horizon &, comme nous en avons déjà averti, la grande

obliquité de la ſphère a pu y occaſionner des réfractions moins variables *. En effet, cette obſervation paroît s'accorder à 1″ $\frac{1}{2}$ & 5″ $\frac{1}{2}$ près avec le premier contact vu à Stockolm ; mais outre qu'il nous reſte à en éclaircir la longitude géographique, nous ne voyons pas aſſez lequel des deux eſpèces de contacts intérieurs, dont j'ai déjà averti, y aura été obſervé. La ſortie eſt bien autrement déciſive, le Soleil étant élevé le 4 Juin au matin de 6 degrés ſur l'horizon à l'inſtant de la ſéparation des deux diſques.

Dans la ſuppoſition des moyennes parallaxes horizontales du Soleil de 7″ $\frac{1}{2}$ & de 10″, il n'y avoit que 2′ 16″ dans le premier cas, & il y auroit 3′ 4″ $\frac{3}{4}$ dans le ſecond cas, dont l'entrée auroit été accélérée à Saint-Domingue: en Europe & ſur-tout à Cajanebourg, on trouve 5′ 50″ & 7′ 51″ dans l'un & l'autre cas; ainſi il y a quelqu'avantage à comparer ces différences, puiſqu'au moins une minute de temps, dont l'une excède l'autre, eſt très-ſenſible aux Obſervateurs, & que d'ailleurs ceux d'Europe que j'ai choiſis, ont vu le Soleil plus élevé ſur l'horizon que ſi les ſeconds contacts euſſent été employés uniquement: ils n'ont pu errer que de quelques ſecondes, comme la Table ci-jointe de leurs obſervations en fait foi.

Mais ſi l'on conſidère les ſorties obſervées dans les deux villes du Nord dont j'ai parlé, l'avantage de comparer les durées devient plus intéreſſant, en ſuppoſant la longitude géographique du Cap-François à Saint-Domingue donnée; car nous n'avons plus guère beſoin en ce cas de celle de Cajanebourg, où les parallaxes, déjà très-grandes, ont dû accélérer l'entrée & retarder la ſortie. Ces durées ſont à Cajanebourg dans les deux hypothèſes de parallaxes de 6^h 01′ 3″, & de 5^h 57′ 29″ $\frac{1}{2}$: ainſi 2″ $\frac{1}{2}$ de diminution dans la parallaxe horizontale du Soleil a dû alonger la durée d'environ 3′ $\frac{1}{2}$ de temps.

Comparant l'entrée obſervée à Saint-Domingue avec la ſortie vue à Cajanebourg, on trouve d'autres durées plus longues & qui ſemblent mieux s'accorder avec la parallaxe du Soleil de 7″ $\frac{1}{2}$.

Or la preuve que nous n'avons pas excédé les limites géo-

* La chaleur y diminue par des degrés moins ſenſibles que lorſque le Soleil s'approche plus rapidement de l'horizon.

graphiques dans les obſervations & réſultats rapportés ci-deſſus; & qu'ainſi la parallaxe de 7″ ½ n'eſt pas abſolument trop foible; c'eſt que la durée vraie ſe trouve encore plus grande par l'obſervation de la ſortie de Vénus vûe à Péterſbourg, où le Soleil étoit élevé à l'inſtant de la ſéparation des deux diſques de 4ᵈ 5′.

Il nous reſte à comparer dans la ſuite les obſervations qu'on a dû faire aux Indes orientales & dans la mer du ſud; mais il paroît déjà qu'il faut s'écarter de la parallaxe moyenne & uſitée de 10 ſecondes pour le Soleil, laquelle nous rapproche trop de cet aſtre.

On a ſuppoſé la longitude du lieu de l'obſervation à Saint-Domingue 74ᵈ 10′ à l'oueſt du Méridien de Paris; mais il paroît que le Cap-François doit être environ 0ᵈ 15′ plus à l'oueſt; ce qu'il ſera néceſſaire de vérifier dans la ſuite.



MANIÈRE DE DÉTERMINER L'ERREUR DES TABLES DE VÉNUS,

Indépendamment des effets des parallaxes du Soleil & de Vénus, dans l'obſervation du mois de Juin 1769.

Par M. LE MONNIER.

COMME M. Pingré m'a communiqué dès le mois d'Août dernier, par une Lettre écrite de Saint-Domingue, l'inſtant des deux contacts extérieur & intérieur de Vénus ſur le diſque du Soleil, j'ai cherché le point de la circonférence du diſque où a dû ſe faire cette entrée: ayant reconnu en même temps que l'angle parallactique ſurpaſſoit en ce moment l'angle droit, & qu'il étoit obtus de quelques degrés, j'en ai conclu que les parallaxes de latitudes, négatives d'ailleurs, étoient peu conſidérables, & que la différence de celle du Soleil à celle de Vénus, ſe pouvoit connoître très-exactement; car elle étoit de — 0",63 dans le cas d'une parallaxe moyenne du Soleil de $7'' \frac{1}{2}$, & preſque la même ou — 0",84, ſi au lieu de $7'' \frac{1}{2}$ on prend 10". J'aurois bien deſiré pour un premier eſſai que M. Pingré nous eût indiqué le degré de la circonférence du limbe du Soleil où s'eſt fait l'un ou l'autre contact: j'y ai ſuppléé d'abord par une autre obſervation faite à la Martinique par le P. Chriſtophle, qui muni d'excellens inſtrumens, tels que M. Pingré en convient lui-même dans ſa Lettre du 12 Juin 1769, a déterminé le point de contact apparent lors de la première entrée, à 35^d 30' au-deſſus de la ligne horizontale du côté de l'eſt. Ici ce premier contact s'eſt fait preſqu'au zénit du diſque, & il eût été dangereux de l'obſerver imparfaitement, parce que l'erreur d'un degré dans la circonférence du limbe entraînoit avec ſoi une trop grande variation dans les

28 Nov. 1769.

différences en longitudes & latitudes apparentes de Vénus au Soleil. Ces données suffisent, comme l'on voit, pour connoître, à l'aide de la durée vue en Europe, quelles sont les erreurs des Tables de Vénus, tant en longitude qu'en latitude, & je m'en étois tenu jusqu'ici à ces résultats, dont j'ai fait usage.

Ayant rendu compte le 22 de ce mois de Novembre à l'assemblée de l'Académie, des observations faites au nord dans la Lapponie Moscovite, telles que je les ai extraites de deux ouvrages ou feuilles imprimées à Péterſbourg, & dont j'avois eu communication l'assemblée précédente, j'ai dit que la durée avoit été observée à Kola, ce qui sert de confirmation à celle qui a été vue à Cajanebourg: j'ai rendu compte aussi à l'Académie qui m'en avoit chargé, de l'autre observation faite à Ponoi sous une latitude moins septentrionale, laquelle, quant à la durée, est imparfaite, l'entrée de Vénus sur le Soleil y ayant été d'abord observée, & la fin de l'éclipse du Soleil après les pluies qui y ont fait manquer la sortie de Vénus du disque. Or l'Auteur de cette observation (M. Mallet) a cherché d'abord à mesurer la plus courte distance des bords du Soleil & de Vénus, y ayant employé un micromètre objectif appliqué à un télescope Grégorien de 24 pouces, de la construction de M. Short. Les dernières phases mesurées à minuit & trois quarts, s'accordent toutes à une partie près de la division de son instrument, mais nous ignorons la loi de la réfraction qui a dû accourcir cette distance apparente de $4' \frac{3}{4}$. Je trouve par les Tables des réfractions dont je me sers, 37 à 38 secondes d'accourcissement; d'où il est visible qu'on ne peut guère employer cette observation & la réduire à l'instant de la plus courte distance, qui s'est fait 18 minutes d'heure plus tard. Je ne la rejette pas assurément, & j'invite même ceux qui ont traité la théorie des réfractions, à assigner précisément s'ils le peuvent, la différence des réfractions qui a dû accourcir cette distance, mais j'ai renoncé jusqu'à présent à tirer quelqu'utilité de ces résultats pour vérifier la parallaxe.

On voit en effet que la parallaxe de latitude étant presque nulle à la Martinique & à S.t-Domingue, elle a dû être toute absorbée à Ponoi, par l'effet qu'elle a occasionné dans la plus courte

distance, & qu'un Observateur placé plus avant vers le pôle, où il auroit vu Vénus plus élevée & dégagée des réfractions horizontales, eût été bien mieux situé pour cette recherche qu'on ne l'étoit à Ponoi. Je vais rendre compte à présent de quelques autres observations plus importantes qui feront mieux distinguer les effets des parallaxes.

La méthode que je propose consiste à rendre nuls ces effets, sinon en latitude, puisque nous le savons déjà par ce qui a été vu à S.t-Domingue, au moins ces parallaxes nulles en longitude, ce qui achèvera de nous donner l'erreur des Tables de Vénus, & nous mettra par conséquent en état de distinguer laquelle des deux hypothèses de $10''$ ou de $7''\frac{1}{2}$ doit être rejetée, & ce qui convient enfin à la vraie parallaxe moyenne du Soleil. Il faut pour cet effet éviter les réfractions, sur-tout s'il s'agit d'observations faites aux environs de l'horizon. En 1753, Mercure a été observé à Meudon par des distances prises au bord vertical du Soleil, & l'on auroit pu observer de la même manière Vénus à Ponoi & même très-exactement à l'aide du micromètre objectif, si les fabricateurs ordinaires avoient soin d'y adapter un niveau à bulle d'air, ainsi qu'il s'en trouve un parallèle au fil, & qui est extérieur à la lunette de mon micromètre. J'aurois bien desiré qu'on eût employé en Lapponie un pareil instrument, où malgré les nuées on eût mesuré différentes phases dans des plans verticaux. Quoi qu'il en soit, j'ai recherché la vraie longitude de Vénus, indépendamment de la parallaxe, par des observations faites au quart-de-cercle à l'aide de la pendule, méthode assez vulgaire, mais dont le résultat fait l'éloge de l'Observateur; car il a observé le passage des deux bords du Soleil au fil vertical, de manière que l'un des bords sert de confirmation à ce qui a été observé pour lors, lorsqu'on les compare séparément avec le passage de Vénus.

A Ponoi, le cercle de longitude se confondoit avec le cercle vertical au temps de cette observation, parce que je trouve que le pôle de l'Écliptique étoit à peine $0^d\ 31'$ à l'occident & $33'$ au-delà du zénit; ainsi le vertical se confondoit alors presqu'absolument avec le cercle de longitude, & les parallaxes de longitude s'évanouissent en pareil cas.

M. Mallet a trouvé que le Soleil paſſoit en 2′ 20″ au fil vertical de ſon quart-de-cercle, & que ſon centre a ſuivi de $7''\frac{1}{4}$ de temps celui de Vénus au même fil. L'angle au pôle auroit donc été de 109″ de degré; ce qui donne préciſément 100″ pour la différence vraie en longitude entre Vénus & le Soleil à $13^h\ 08'\ 17''$, de temps vrai à Ponoi: c'eſt à Paris à $10^h\ 37'\ 00''$; & ſi l'on ſuppoſe la vraie longitude du Soleil corrigée ſur mes obſervations pour le même inſtant, de $73^d\ 47'\ 32''$, la longitude géocentrique de Vénus ſera $73^d\ 45'\ 52''$, ou bien $8^f\ 13^d\ 46'\ 52''\frac{1}{4}$ héliocentrique; c'eſt $58''\frac{1}{2}$ plus avancé que ſelon les Tables de Halley. Cette erreur des Tables, que l'on ne regarde pas encore ici comme abſolue, donne, à ce qu'il ſemble, une diſtance des centres trop petite: peut-être faudra-t-il conclure autrement le paſſage du centre de Vénus au fil vertical, & diminuer les $7''\frac{1}{4}$, à cauſe qu'on n'a vu à ce fil que le premier bord de Vénus.

Par un premier eſſai, je trouve la vraie durée du paſſage de Vénus ſur le Soleil avec la parallaxe horizontale de $7''\frac{1}{2}$, de $6^h\ 6'$; au lieu qu'entre Saint-Domingue & Cajanebourg, ou bien par Cajanebourg même, la durée eſt $6^h\ 2'\ 36''\frac{1}{2}$ ou $6^h\ 1'\ 03''$. Cela s'éloigne bien moins que ſi l'on employoit la parallaxe moyenne du Soleil de 10 ſecondes, laquelle donneroit $6^h\ 00'\frac{1}{4}$ & $5^h\ 57'\frac{1}{2}$.



COMPARAISON DU PASSAGE DE VÉNUS, OBSERVÉ À BORDEAUX, AVEC LES OBSERVATIONS FAITES A PARIS.

Par M. DE LA LANDE.

J'AVOIS engagé M. l'Abbé Faugere, qui demeure à Bordeaux, à faire l'obſervation de ce paſſage, & il s'y prépara de la manière la plus exacte. Je lui avois choiſi un téleſcope de 32 pouces, fait à Paris par M. Gonichon, & une pendule de M. Lepaute; de ſon côté il avoit fait exécuter lui-même un quart-de-cercle de trois pieds & demi de rayon, qu'il avoit diviſé avec ſoin, & auquel il avoit appliqué une bonne lunette. 14 Juin 1769.

La ville de Bordeaux ne lui fourniſſant pas de lieu commode vers le couchant, il ſe tranſporta chez M. de Secondat, fils du célèbre Préſident de Monteſquieux, qui deſiroit que cette obſervation fut faite avec ſoin dans ſa terre de la Brede. M. Faugere ſe plaça dans une ferme ſituée à 8800 toiſes au ſud de Bordeaux, & 400 toiſes à l'orient du Château-Trompette. Il en a déterminé la ſituation exacte par des obſervations faites aux environs dans des lieux d'où l'on découvre les Tours de Bordeaux, & d'où il a obſervé les angles avec la méridienne; la carte nouvellement levée par les Ingénieurs-Géographes lui a fait connoître auſſi la poſition de ſon Obſervatoire, dont la latitude ſe trouve de $44^d\ 40'\ 43''$, & la diſtance en temps au méridien de Paris $11'\ 36''\frac{1}{2}$ à l'occident, en ſuppoſant que la longitude & la latitude de Bordeaux, déterminées par les triangles de la France, répondent au Château-Trompette, comme l'endroit de la ville le plus apparent & le plus commode pour les obſervations des triangles.

Contact intérieur.

Par des hauteurs correſpondantes le 2 & le 4, M. Faugere a trouvé qu'au moment du contact intérieur il etoit 7^h 27′ 16″ de temps vrai, ce qui fait 7^h 38′ 52″ ½ au méridien de Paris.

Mais pour comparer cette obſervation avec celle de Paris, d'une manière rigoureuſe, il étoit néceſſaire de calculer l'effet de la parallaxe pour Bordeaux, ainſi que je l'avois calculé pour Paris, en rendant compte à l'Académie de mes obſervations. Je trouve à l'heure de l'obſervation, la hauteur vraie du centre de Vénus dans l'endroit où M. Faugere obſervoit, de 1^d 37′ 55″, & l'angle parallactique 41^d 23′ 51″, & par la méthode expliquée ci-deſſus à l'occaſion de mes propres obſervations, j'ai trouvé l'effet de la parallaxe en temps, plus petit de 2″ qu'à Paris, ou de 0^h 7′ 9″ de temps, en ſuppoſant la parallaxe moyenne du Soleil de 8″,8; d'où il ſuit qu'il faut ôter 2″ du temps trouvé ci-deſſus, pour avoir celui qu'on auroit dû obſerver à Paris, & l'on a 7^h 38′ 50″ ½; c'eſt la même ſeconde qu'a trouvé M. Maraldi; 2″ ½ de moins que M. Caſſini, 7″ ½ de plus que M. Meſſier, 5″ ½ de plus que M.rs de Fouchy, de Bory & Bailly, à la Meute; en ſorte que cette obſervation de M. Faugere tient le milieu entre toutes celles de Paris, & me fait croire de plus en plus que le contact intérieur ne s'éloigne pas de 7^h 38′ 45″, ce qui donne le temps vrai de la conjonction à 10^h 14′ 35″ dans 2^f 13^d 27′ 22″, avec 10′ 13″,7 de latitude boréale. C'eſt une choſe aſſez ſingulière que les Tables de M. Caſſini donnent à 2″ près cette longitude obſervée de Vénus, ou 8^f 13^d 27′ 24″: cet accord des Tables avec l'obſervation eſt auſſi rare dans l'Aſtronomie que ſatisfaiſant pour l'Aſtronome.

Je ſuppoſe ici le lieu du Soleil tel qu'il eſt dans les Tables de M. de la Caille, mais les Tables du Soleil de M. Caſſini, donnent 2^f 13^d 26′ 46″; c'eſt-à-dire 38″ de moins, quoique la ſomme de toutes les petites équations employées par M. de la Caille n'ajoute que 13″ au lieu du Soleil dans ſes nouvelles Tables.

Le mouvement diurne héliocentrique, relatif de Vénus au Soleil, étant de 37′, les 38″ de différence entre les Tables

du Soleil, produiroient plus de 24′ d'erreur sur le temps de la conjonction; c'est pour cela qu'en prédisant le passage de 1761 dans la *Connoissance des Temps*, pour avoir corrigé le lieu du Soleil, je m'écartai de l'observation beaucoup plus que ceux qui l'avoient annoncé sur les anciennes Tables, & sans aucune correction *(Mémoires de l'Académie, année 1761, page 107)*.

L'observation du contact m'a servi à rectifier sur la Carte du passage de Vénus que j'ai publiée en 1764, la situation du pôle d'entrée ou du centre des cercles qui joignent tous les pays où l'entrée doit paroître au même instant. En effet, puisqu'au moment du contact l'angle horaire à Paris étoit de $114^d\ 51'$, & l'angle de l'orbite avec le rayon qui joignoit les centres de Vénus & du Soleil $49^d\ 48'$, il est facile de trouver que le point de la projection terrestre, qui étoit placé sur le même rayon, avoit $49^d\ 48'$ de latitude, & qu'il étoit à $4^d\ 23'$ à l'orient de Paris, ce qui tombe à très-peu près sur la ville de Trèves. Ainsi l'on peut tracer sur une Carte de France des cercles qui servent à reconnoître dans tout le Royaume l'effet des parallaxes, avec la précision des dixièmes de secondes. J'ai d'abord reconnu qu'en une seconde de temps Vénus faisant $\frac{1}{15}$ de seconde sur son orbite, se rapprochoit du centre du Soleil d'une quantité qui étoit sur la projection, le sinus verse de $3^d\ 51'$; ainsi décrivant un cercle dont le centre soit à Trèves, & qui ait quatre-vingt-seize lieues ou $3^d\ 51'$ de rayon, l'on marquera tous les pays où l'effet de la parallaxe a été plus petit d'une seconde que le plus grand effet possible au pôle d'entrée.

Mais les sinus verses étant comme les carrés des arcs, les largeurs de ces cercles d'entrée diminuent très-rapidement, en sorte que le cercle de 2″ n'a que $5^d\ 36'$ de rayon. A l'égard de Bordeaux qui est à $6^d\ 50'$ environ de Trèves, j'ai reconnu facilement sur la Carte de France, que l'effet de la parallaxe y étoit de 3″ plus petit qu'à Bordeaux, & par conséquent 2″ plus petit qu'à Paris, ce qui est conforme au calcul précédent.

Depuis la lecture de ce Mémoire, M. de la Roque, Inspecteur de la jauge des Bâtimens de mer à Bordeaux, m'a envoyé une

obſervation qu'il a faite avec un téleſcope grégorien de 27 pouces de longueur, il a trouvé le contact intérieur à 7^h 27′ 5″, le commencement de l'éclipſe de Soleil le 4 à 6^h 30′ 49″ du matin; la fin à 8^h 4′ 11″: il a réglé ſon horloge ſur des hauteurs correſpondantes, priſes avec un quart-de cercle de bois de 39 pouces de rayon, ainſi que j'y ai ſouvent invité dans mes écrits les Amateurs & les Curieux. Il me donne lieu de croire que l'Aſtronomie ſera bientôt cultivée avec ſoin à Bordeaux, en m'apprenant que la Ville fait bâtir une maiſon pour l'Académie, dans laquelle il y aura un Obſervatoire de 20 pieds dans œuvre & de 75 pieds de hauteur, & cela à Tourny, qui eſt le quartier le plus élevé & le plus beau de la ville.



OBSERVATION DU PASSAGE DE VÉNUS, SUR LE DISQUE DU SOLEIL, FAITE AU CAP FRANÇOIS, ISLE DE S.T-DOMINGUE, Le 3 Juin 1769.

Par M. PINGRÉ.

LE lieu que nous avons jugé le plus ſavorable pour y établir un obſervatoire, eſt ſitué hors de la ville du Cap françois au nord, par la latitude boréale de $19^d\ 57'\ 3''$; quant à la longitude, je n'en puis dire pour le préſent autre choſe, ſinon que ce lieu eſt de 4 heures 58 à 59 minutes plus occidental que le méridien de l'Obſervatoire royal de Paris. C'eſt un pavillon quarré-long, n'ayant qu'une ſimple ſalle au rez-de-chauſſée, ouverte à tous les vents par un très-grand nombre de croiſées; on l'appeloit la *Maiſon-rouge*; cette maiſon eſt ſituée ſur un petit morne, & une gorge entre deux montagnes fort élevées permet d'y ſuivre le Soleil en Juin & Juillet juſque vers ſix heures du ſoir. Par-tout ailleurs dans la ville & aux environs, on ceſſe de voir le Soleil cinq quarts d'heure au moins avant l'heure de ſon véritable coucher.

Preſque tous les jours que nous avons paſſés au Cap, depuis le 23 Mai juſqu'au 16 Juin, ſe ſont reſſemblés: le matin, le ciel étoit parfaitement ſerein; peu après midi les nuages commençoient à ſortir des montagnes qui ſont à l'oueſt de la ville, bientôt le ciel ſe couvroit, le tonnerre rouloit au loin, s'approchoit peu à peu ſur nos têtes, & l'orage duroit fort avant dans la nuit dont les commencemens n'étoient éclairés que par la continuité & la vivacité des éclairs. Tel eſt, nous diſoit-on, le temps qu'il fait ordinairement au Cap dans cette ſaiſon. Il y eut quelques jours privilégiés, le 3 de Juin fut heureuſement de ce nombre: les nuages, contre

la coutume, s'étoient formés dès le matin, mais ils ne commencèrent à couvrir le ciel que vers les cinq heures & demie du soir.

Pour régler la pendule, je prenois des hauteurs du Soleil avant & après midi, avec un quart-de-cercle de 2 pieds de rayon, appartenant à l'Académie. M. de Fleurieu, Officier des vaisseaux du Roi, commandant la Frégate l'*Isis*, employoit un quart-de-cercle anglois de Cisson, d'environ 15 à 16 pouces de rayon: cet instrument étoit très-bien travaillé, il paroissoit fort simple aux yeux de M. de Fleurieu, je n'en jugeois pas de même: j'ai soupçonné d'abord & je me suis ensuite affermi de plus en plus dans l'idée que les différences que nous trouvions quelquefois entre les résultats de nos hauteurs correspondantes respectives, étoient dûes, au moins en grande partie, à la délicatesse de cet instrument.

Le 30 Mai au matin, nous avions pris un assez grand nombre de hauteurs; je ne pus prendre le soir que trois correspondantes, équivalentes à six, parce que je prenois le passage du bord du disque par deux fils horizontaux distans l'un de l'autre de près de 2 minutes. Je trouvai

Midi vrai à........................ $11^h\ 57'\ 40''\ 40'''$.

M. de Fleurieu le trouva plus tard seulement de 9 tierces, par cinq hauteurs correspondantes à celles qu'il avoit prises le matin.

Nous supposons ce jour à midi l'équation du temps moyen, de $2'\ 52''\ 23'''$ soustractive du temps vrai.

Le 2 Juin, nous prîmes le matin des hauteurs; il ne fut pas possible de prendre les correspondantes le soir. Mais en comparant ces hauteurs avec celles du 3 au soir, j'ai trouvé

Minuit vrai à........................ $11^h\ 59'\ 36''\ 8'''$.
Et M. de Fleurieu à................ 11. 59. 37. 6.

Nous supposons l'un & l'autre l'équation du temps moyen de $2'\ 20''\ 43'''$ soustractive; ainsi la pendule auroit avancé en vingt-quatre heures sur le temps moyen de $23''\ 57'''$ selon moi, de $23''\ 41'''$ selon M. de Fleurieu.

Le 3 Juin, midi vrai, selon moi, à...... $11^h\ 59'\ 53''\ 50'''$.
Selon M. de Fleurieu.......... 11. 59. 54. 19.
Équation du temps moyen........ — 2. 15. 53.

La pendule depuis le 30 Mai, a avancé, ſelon moi, de 24″ 10‴, & ſelon M. de Fleurieu de 24″ 15‴ chaque vingt-quatre heures.

Le 7 Juin après midi, les nuages m'ont empêché de prendre des hauteurs correſpondantes à celles que j'avois priſes le matin: M. de Fleurieu a été plus heureux, il en a ſaiſi quatre, qui lui ont donné

Midi vrai à	0h 2′ 17″ 13‴.
Équation du temps moyen	— 1. 37. 59.

D'où il ſuivroit que la pendule depuis le 3 du mois, auroit avancé par jour de 26″ 22‴ ſur le temps moyen.

Enfin le 10 Juin, jour unique entre ceux que nous avons paſſés au Cap, le beau temps ſe ſoutint pendant tout le jour & toute la nuit ſuivante. Nous primes beaucoup de hauteurs le matin, & nous eumes le ſoir toutes leurs correſpondantes. Je trouvai

Midi vrai à	0h 4′ 8″ 1‴.
Et M. de Fleurieu à	0. 4. 8. 28.
L'équation du temps moyen étoit	— 0. 58. 38.

J'en conclus que depuis le 3 Juin juſqu'au 10, la pendule avoit retardé par jour ſur le temps moyen, de 25″ 16‴. Selon les hauteurs de M. de Fleurieu, le retard journalier du 3 au 10, auroit été abſolument le même.

En réduiſant dans le détail des obſervations ſuivantes, le temps de la pendule au temps vrai, je ſuppoſerai que la pendule retardoit à midi du 3 Juin, de 0′ 6″ 10‴ ſur le temps vrai, ainſi qu'il ſuit de mes obſervations; que la pendule avançoit de 25 ſecondes en vingt-quatre heures ſur le temps moyen; que le temps moyen avançoit de 10″ par jour ſur le temps vrai; & par conſéquent que la pendule avançoit ſur le temps vrai d'environ 35″ en vingt-quatre heures.

Nous étions quatre Obſervateurs; aux inſtans des contacts des bords du Soleil & de Vénus, il n'a été fait aucun mouvement, il n'a été prononcé aucune parole qui ait pu faire ſoupçonner aux Obſervateurs que le contact avoit déjà été obſervé par un des coobſervateurs.

M. Saqui Destourès, commandant le détachement des Gardes de la Marine à bord de l'*Isis,* employoit la lunette de mon quart-de-cercle, qui n'a que 2 pieds de longueur, à deux verres seulement, & qui n'est pas achromatique.

M. le Chevalier de la Fillière, Officier des vaisseaux du Roi, avoit une lunette achromatique de 3 pieds de longueur, de la façon de M. de l'Étang, avec deux oculaires plans-convexes; elle faisoit moins d'effet que les deux suivantes.

M. de Fleurieu se servoit d'une lunette achromatique à deux verres objectifs seulement, de la longueur d'environ 2 pieds & demi, avec deux oculaires plans-convexes, de la façon de M. Dollond, montée bien solidement sur un pied de télescope, & faisant un excellent effet.

J'avois une lunette achromatique à deux verres objectifs seulement, de la longueur de 5 pieds, avec deux oculaires plans-convexes, forçant extrêmement & peut-être un peu trop, de la façon de M. de l'Étang; elle étoit suspendue à quatre montans, réunis à leur sommet par une pièce de cuivre à charnières; elle y étoit attachée par des bitors qui lui laissoient assez de jeu pour la remuer facilement, mais qui lui en laissoient un peu trop pour la stabilité que j'aurois desirée.

Premier contact des bords du Soleil & de Vénus.

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*	
$2^h\ 26'\ 12''$	$2^h\ 26'\ 14''\frac{1}{2}$	Selon M. de Fleurieu.
2. 26. 14	2. 26. $16\frac{1}{2}$	Selon M. le Chevalier de la Filière.
2. 26. 18	2. 26. $20\frac{1}{2}$	Selon M. Destourès.
2. 26. 10	2. 26. $12\frac{1}{2}$	Selon moi.

Nos yeux étoient fatigués, nous les laissâmes reposer quelques minutes; étant retournés aux lunettes, nous vîmes Vénus entrée d'environ le tiers de son diamètre. M. de Fleurieu distingua très-clairement autour de la partie du disque de Vénus, qui étoit encore hors de celui du Soleil, un filet ou anneau lumineux, lequel forma constamment une circonférence de cercle sensiblement parfaite avec l'arc qui terminoit la partie de Vénus déjà entrée sur le disque

ſolaire. M. de Fleurieu ne m'avertit point de ce phénomène, & je penſois alors à toute autre choſe qu'à la partie phyſique de l'obſervation; je vis cependant cet anneau deux minutes environ avant l'immerſion totale de Vénus.

Contact intérieur des bords du Soleil & de Vénus.

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*	
2h 44′ 43″	2h 44′ 45″	Selon M. de Fleurieu.
2. 44. 39	2. 44. 41	Selon M. le Chevalier de la Filière.
2. 44. 48	2. 44. 50	Selon M. Deſtourès.
2. 44. 42	2. 44. 44	Selon moi.

Aux obſervations ſuivantes, M. de Foucaux, Officier des vaiſſeaux du Roi, & M.rs les Chevaliers d'Iſle & de l'Éguille, Gardes de la Marine, ont bien voulu ſe ſuccéder pour compter perpétuellement à la pendule. L'affluence du monde étoit plus nuiſible qu'utile aux obſervations: je commence par les miennes, je les ai faites au quart-de-cercle de 2 pieds de rayon; deux fils du micromètre ſe coupant à angles droits, me ſervoient de réticule.

I.re OBSERVATION, *aſſez douteuſe.*

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*	
3h 26′ 7″	3h 26′ 8″ $\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil au fil vertical.
3. 27. 3 $\frac{1}{2}$	3. 27. 4 $\frac{1}{4}$	Centre de Vénus à l'horizontal.
3. 27. 41	3. 27. 42 $\frac{1}{4}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
3. 28. 52 $\frac{1}{2}$	3. 28. 53 $\frac{3}{4}$	Second bord de Vénus au vertical.

II.e OBSERVATION, *également douteuſe.*

3. 29. 50	3. 29. 51	Premier bord du Soleil au vertical.
3. 31. 15	3. 31. 16	Centre de Vénus à l'horizontal.
3. 31. 54 $\frac{1}{2}$	3. 31. 55 $\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.
3. 32. 0	3. 32. 1	Premier bord de Vénus au vertical.
3. 32. 32	3. 32. 33	Second bord de Vénus au vertical.

Hauteur de l'horizontal environ 41d.

III.e OBSERVATION.

Temps de la pendule.	Temps vrai.	
$3^h\ 34'\ 31''$	$3^h\ 34'\ 32''$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
3. 34. 38	3. 34. 39	Premier bord du Soleil au vertical.
3. 36. 10	3. 36. 11	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 36. 13 ½	3. 36. 14 ½	Second bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 36. 45	3. 36. 46	Second bord du Soleil à l'horizontal.
3. 36. 46	3. 36. 47	Premier bord } de Vénus au vertical.
3. 37. 16	3. 37. 17	Second bord } de Vénus au vertical.
		Hauteur de horizontal, $39^d\ 53'$

IV.e OBSERVATION.

3. 39. 20 ½	3. 39. 21 ½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
3. 40. 55	3. 40. 56	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 40. 59	3. 41. 0	Second bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 41. 0	3. 41. 1	Premier bord du Soleil au vertical.
3. 43. 6	3. 43. 7	Premier bord } de Vénus au vertical.
3. 43. 34 ½	3. 43. 35 ½	Second bord } de Vénus au vertical.
		Hauteur de l'horizontal $38^d\ 48'$.

V.e OBSERVATION.

3. 44. 24	3. 44. 24 ¾	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
3. 44. 37	3. 44. 37 ¾	Premier bord du Soleil au vertical.
3. 45. 57 ¼	3. 45. 58	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 46. 1 ¼	3. 46. 2	Second bord } de Vénus à l'horizontal.
3. 46. 33 ½	3. 46. 34 ¼	Premier bord de Vénus au vertical.
3. 46. 42	3. 46. 42 ¾	Second bord du Soleil à l'horizontal.
3. 47. 2	3. 47. 2 ¾	Second bord de Vénus au vertical.
		Hauteur de l'horizontal $37^d\ 24'\ ½$

VI.e OBSERVATION.

3. 54. 59	3. 54. 59 ½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
3. 55. 0	3. 55. 0 ½	Premier bord du Soleil au vertical.

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*		
3h 56′ 30″	3h 56′ $30\frac{1}{2}$	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
3. 56. 34	3. 56. $34\frac{1}{2}$	Second bord	
3. 56. 57	3. 56. $57\frac{1}{2}$	Premier bord de Vénus au vertical.	
3. 57. 17	3. 57. $17\frac{1}{2}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.	
3. 57. 24	3. 57. $24\frac{1}{2}$	Second bord de Vénus au vertical.	
		Hauteur de l'horizontal, 35d 14′.	

VII.e OBSERVATION.

3. 59. 40	3. 59. $40\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.	
3. 59. $46\frac{1}{2}$	3. 59. $46\frac{3}{4}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 1. $16\frac{1}{4}$	4. 1. $16\frac{1}{2}$	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
4. 1. 20	4. 1. $20\frac{1}{4}$	Second bord	
4. 1. 37	4. 1. $37\frac{1}{4}$	Premier bord	de Vénus au vertical.
4. 2. 2	4. 2. $2\frac{1}{4}$	Second bord	
4. 2. $3\frac{1}{2}$	4. 2. $3\frac{3}{4}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.	
		Hauteur de l'horizontal, 34d 8′.	

VIII.e OBSERVATION.

4. 4. 6	4. 4. $6\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 4. 24	4. 4. $24\frac{1}{4}$	Premier bord du Soleil au vertical.	
4. 5. $34\frac{3}{4}$	4. 5. 35	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
4. 5. $38\frac{3}{4}$	4. 5. 39	Second bord	
4. 6. 16	4. 6. $16\frac{1}{4}$	Premier bord de Vénus au vertical.	
4. 6. 24	4. 6. $24\frac{1}{4}$	Second bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 6. 41	4. 6. $41\frac{1}{4}$	Second bord de Vénus au vertical.	
		Hauteur de l'horizontal, 33d 9′.	

IX.e OBSERVATION.

4. 8. 26	4. 8. 26	Premier bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 8. $30\frac{1}{2}$	4. 8. $30\frac{1}{2}$	Premier bord du Soleil au vertical.	
4. 9. $53\frac{3}{4}$	4. 9. $53\frac{3}{4}$	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
4. 9. $57\frac{3}{4}$	4. 9. $57\frac{3}{4}$	Second bord	
4. 10. 29	4. 10. 29	Premier bord de Vénus au vertical.	

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*		
4h 10′ 44″½	4h 10′ 44″½	Second bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 10. 52	4. 10. 52	Second bord de Vénus au vertical.	
		Hauteur de l'horizontal, 32d 11′.	

X.e OBSERVATION.

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*		
4. 12. 39	4. 12. 39	Premier bord du Soleil au vertic. & à l'horiz.	
4. 14. 5¼	4. 14. 5¼	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
4. 14. 9¼	4. 14. 9¼	Second bord	
4. 14. 29	4. 14. 29	Premier bord	de Vénus au vertical.
4. 14. 52	4. 14. 52	Second bord	
4. 14. 57	4. 14. 57	Second bord du Soleil à l'horizontal.	
		Hauteur de l'horizontal, 31d 12′.	

XI.e OBSERVATION.

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*		
4. 17. 55	4. 17. 55	Premier bord du Soleil au vertical.	
4. 17. 56½	4. 17. 56½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 19. 22	4. 19. 22	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
4. 19. 26	4. 19. 26	Second bord	
4. 19. 46	4. 19. 46	Premier bord	de Vénus au vertical.
4. 20. 8	4. 20. 8	Second bord	
4. 20. 15½	4. 20. 15½	Second bord du Soleil à l'horizontal.	
		Hauteur de l'horizontal, 30d 0′.	

XII.e OBSERVATION.

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*		
4. 22. 16	4. 22. 15¾	Premier bord du Soleil au vertical.	
4. 22. 26	4. 22. 25¾	Premier bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 23. 51	4. 23. 50¾	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
4. 23. 55	4. 23. 54¾	Second bord	
4. 24. 3	4. 24. 2¾	Premier bord	de Vénus au vertical.
4. 24. 25	4. 24. 24¾	Second bord	
4. 24. 44½	4. 24. 44¼	Second bord du Soleil à l'horizontal.	
		Hauteur de l'horizontal, 28d 59′.	

XIII.e OBSERVATION.

XIII.e OBSERVATION.

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*		
4h 28′ 31″½	4h 28′ 31″¼	Premier bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 29. 20	4. 29. 19¾	Premier bord du Soleil au vertical.	
4. 29. 56¼	4. 29. 56	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
4. 30. 0¼	4. 30. 0	Second bord	
4. 30. 51	4. 30. 50¾	Second bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 31. 2	4. 31. 1¾	Premier bord	de Vénus au vertical.
4. 31. 23	4. 31. 22¾	Second bord	

Hauteur de l'horizontal, 27d 36′

XIV.e OBSERVATION.

4. 33. 8	4. 33. 7½	Premier bord du Soleil au vertical.	
4. 34. 48½	4. 34. 48	Premier bord	de Vénus au vertical.
4. 35. 9	4. 35. 8½	Second bord	

XV.e OBSERVATION.

4. 37. 20½	4. 37. 20	Premier bord du Soleil au vertical.	
4. 38. 10½	4. 38. 10	Premier bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 39. 1	4. 39. 0½	Premier bord	de Vénus au vertical.
4. 39. 21	4. 39. 20½	Second bord	
4. 39. 32½	4. 39. 32	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
4. 39. 36¼	4. 39. 35¾	Second bord	
4. 40. 28¾	4. 40. 28¼	Second bord du Soleil à l'horizontal.	

Hauteur de l'horizontal, 25d 26′

XVI.e OBSERVATION.

4. 42. 57	4. 42. 56¼	Premier bord du Soleil au vertical.	
4. 43. 41	4. 43. 40¼	Premier bord du Soleil à l'horizontal.	
4. 44. 34	4. 44. 33¼	Premier bord	de Vénus au vertical.
4. 44. 54	4. 44. 53¼	Second bord	
4. 45. 1	4. 45. 0¼	Premier bord	de Vénus à l'horizontal.
4. 45. 5	4. 45. 4¼	Second bord	
4. 45. 59¼	4. 45. 58½	Second bord du Soleil à l'horizontal.	

Hauteur de l'horizontal, 24d 11′

XVII.e OBSERVATION.

Temps de la pendule.	Temps vrai.	
4h 47' 29"½	4h 47' 28"½	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 48. 30½	4. 48. 29½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 49. 6	4. 49. 5	Premier bord } de Vénus au vertical.
4. 49. 25	4. 49. 24	Second bord }
4. 49. 49½	4. 49. 48½	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 49. 53½	4. 49. 52½	Second bord }
4. 50. 48½	4. 50. 47½	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 23d 6'

XVIII.e OBSERVATION *douteuse*.

Temps de la pendule.	Temps vrai.	
4. 52. 53	4. 52. 52	Premier bord du Soleil au vertical.
4. 53. 27	4. 53. 26	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
4. 54. 31½	4. 54. 30½	Premier bord de Vénus au vertical.
4. 54. 45	4. 54. 44	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
4. 54. 49	4. 54. 48	Second bord }
4. 54. 49½	4. 54. 48½	Second bord de Vénus au vertical.
4. 55. 47	4. 55. 46	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 22d 0'

XIX.e OBSERVATION.

Temps de la pendule.	Temps vrai.	
5. 0. 29½	5. 0. 28½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
5. 0. 53	5. 0. 52	Premier bord du Soleil au vertical.
5. 1. 46½	5. 1. 45½	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
5. 1. 50½	5. 1. 49½	Second bord }
5. 2. 23½	5. 2. 22½	Premier bord } de Vénus au vertical.
5. 2. 40½	5. 2. 39½	Second bord }
5. 2. 49½	5. 2. 48½	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 20d 15'

XX.e OBSERVATION, *assez douteuse*.

Temps de la pendule.	Temps vrai.	
5. 10. 43	5. 10. 41½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.

Temps de la pendule.	*Temps vrai.*	
5h 10′ 47″	5h 10′ 45″ ½	Premier bord du Soleil au vertical.
5. 11. 55½	5. 11. 54	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
5. 11. 59½	5. 11. 58	Second bord }
5. 12. 11	5. 12. 9½	Premier bord } de Vénus au vertical.
5. 12. 28	5. 12. 26½	Second bord }
5. 13. 5	5. 13. 3½	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 18d 7′

XXI.e OBSERVATION.

5. 18. 18	5. 18. 16½	Premier bord du Soleil au vertical.
5. 18. 41	5. 18. 39½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
5. 19. 43	5. 19. 41½	Premier bord de Vénus au vertical.
5. 19. 54	5. 19. 52½	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
5. 19. 58	5. 19. 56½	Second bord }
5. 19. 58	5. 19. 56½	Second bord de Vénus au vertical.
5. 21. 2½	5. 21 1	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 16d 20′

XXII.e OBSERVATION.

5. 24. 35	5. 24. 33¼	Premier bord du Soleil au vertical.
5. 24. 35¼	5. 24. 33½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
5. 25. 46½	5. 25. 44¾	Premier bord } de Vénus à l'horizontal.
5. 25. 50½	5. 25. 48¾	Second bord }
5. 25. 57	5. 25. 55¼	Premier bord } de Vénus au vertical.
5. 26. 12	5. 26. 10¼	Second bord }
5. 26. 57	5. 26. 55¼	Second bord du Soleil à l'horizontal.
		Hauteur de l'horizontal, 14d 50′

Les nuages ont commencé à couvrir le Soleil, il n'a plus été poſſible de faire aucune obſervation ſuivie.

Le quart-de-cercle donnoit les hauteurs trop foibles d'une minute ou environ ; d'ailleurs je n'ai pas prétendu prendre avec la plus grande préciſion la hauteur du fil horizontal, ou, ce qui eſt la même choſe, la hauteur des bords du Soleil & de Vénus, lorſqu'ils atteignoient le fil horizontal du réticule.

Je n'ai point obſervé le paſſage du ſecond bord ou du bord auſtral du Soleil par le fil vertical ; le mouvement du Soleil en ce ſens étoit ſi lent, relativement à ſon mouvement en hauteur, que je n'aurois pu attendre ce paſſage, ſans nuire à la multiplicité & même à la préciſion des obſervations totales.

Dans les obſervations ſuivantes, M. de Fleurieu employoit un inſtrument des paſſages, dirigé vers le Soleil, & bien garni de ſes niveaux. La lunette achromatique de 3 pieds de longueur avoit à ſon foyer un réticule formé par deux fils qui ſe coupoient à angles droits. M. de Fleurieu y avoit ajouté deux autres fils parallèles au fil vertical, pour ſervir dans le commencement de l'écliple, en cas que l'intervalle de temps entre le paſſage du premier bord du Soleil & celui de Vénus par un ſeul fil vertical, parut d'une longueur trop démeſurée : ces fils n'ont pas été employés à l'uſage auquel ils étoient deſtinés ; mais c'eſt à un de ces deux fils qu'on a pris les paſſages des bords du Soleil & de Vénus aux deuxième, quatrième & ſixième obſervations ; à la quatrième, on a pris un autre fil qu'à la deuxième & à la ſixième ; tous les autres paſſages ont été pris au fil du milieu, & donnent en conſéquence des obſervations plus certaines, le parallèliſme des deux autres fils pouvant être un peu équivoque.

Numéros des Obſerv.	TEMPS de la PENDULE.	TEMPS VRAI.	PASSAGES des DIFFÉRENS BORDS.
	H. M. S.	H. M. S.	
I.	3. 31. 19 ½	3. 31. 20 ½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	3. 32. 55	3. 32. 56	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	3. 33. 37 ½	3. 33. 38 ½	Second bord du Soleil à l'horizontal.
II.	3. 39. 36 ½	3. 39. 37 ¼	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	3. 40. 20	3. 40. 20 ¾	Second bord du Soleil à l'horizontal.
	3. 42. 57	3. 42. 57 ¾	Premier bord du Soleil au vertical.
	3. 45. 6 *	3. 45. 6 ¾	Premier bord } de Vénus au vertical.
	3. 45. 44 ½	3. 45. 45 ¼	Second bord } de Vénus au vertical.

* Il me paroît probable qu'il faut lire ici 45′ 16″; de la maniere dont on comptoit, il nous étoit facile de nous tromper de 10″.

Numéros des Obſerv.	TEMPS de la PENDULE. H. M. S.	TEMPS VRAI. H. M. S.	PASSAGES des DIFFÉRENS BORDS.
III.	3. 57. 21 ½	3. 57. 22	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	3. 58. 52	3. 58. 52 ½	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	3. 59. 40 ½	3. 59. 41	Second bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 0. 44	4. 0. 44 ½	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 2. 37 ½	4. 2. 38	Premier bord } de Vénus au vertical.
	4. 3. 3	4. 3. 3 ½	Second bord } de Vénus au vertical.
IV.	4. 8. 10	4. 8. 10 ¼	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 9. 3	4. 9. 3 ¼	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	4. 9. 54	4. 9. 54 ¼	Second bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 10. 13	4. 10. 13 ¼	Premier bord de Vénus au vertical.
V.	4. 15. 13	4. 15. 13	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 17. 13	4. 17. 13	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 20. 8	4. 20. 8	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 21. 33	4. 21. 33	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	4. 22. 28	4. 22. 28	Second bord du Soleil à l'horizontal.
VI.	4. 30. 21	4. 30. 20 ½	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 31. 18 ½	4. 31. 18	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 32. 14	4. 32. 13 ⅔	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 32. 41	4. 32. 40 ½	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	4. 33. 38 ½	4. 33. 38	Second bord du Soleil à l'horizontal.
VII.	4. 34. 48 ½	4. 34. 48	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 36. 15	4. 36. 14 ½	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
	4. 36. 29	4. 36. 28 ½	Premier bord de Vénus au vertical.
	3. 37. 14	4. 37. 13 ½	Second bord du Soleil à l'horizontal.
VIII.	4. 39. 9 ½	4. 39. 9	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 40. 2 ½	4. 40. 2	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 40. 51	4. 40. 50 ½	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 41. 23 ½	4. 41. 23	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
IX.	4. 43. 45 ½	4. 43. 44 ¾	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 44. 29 ½	4. 44. 28 ¾	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 45. 26 ½	4. 45. 25 ¾	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 45. 57 ½	4. 45. 56 ¾	Premier bord de Vénus à l'horizontal.

Numéros des Obſerv.	TEMPS de la PENDULE.	TEMPS VRAI.	PASSAGES des DIFFÉRENS BORDS.
	H. M. S.	H. M. S.	
X.	4. 48. 45	4. 48. 44 ¼	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 50. 24 ½	4. 50. 23 ¾	Premier bord de Vénus au vertical.
XI.	4. 51. 50	4. 51. 49	Premier bord du Soleil au vertical.
	4. 52. 29 ½	4. 52. 28 ½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	4. 53. 21	4. 53. 20	Premier bord de Vénus au vertical.
	4. 53. 48	4. 53. 47	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
XII.	5. 0. 9 ½	5. 0. 8 ½	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 1. 13 ½	5. 1. 12 ½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 1. 43 ½	5. 1. 42 ½	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 2. 29	5. 2. 28	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
XIII.	5. 4. 41	5. 4. 39 ¾	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 5. 25 ½	5. 5. 24 ¼	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 6. 11	5. 6. 9 ¾	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 6. 41 ½	5. 6. 40 ¼	Premier bord de Vénus à l'horizontal
XIV.	5. 12. 19 ½	5. 12. 18	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 13. 32	5. 13. 30 ½	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 13. 50 ½	5. 13. 49	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 14. 46	5. 14. 44 ½	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
XV.	5. 18. 36 ½	5. 18. 35	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 19. 16 ½	5. 19. 15	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 20. 0 ½	5. 19. 59	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 20. 29 ½	5. 20. 28	Premier bord de Vénus à l'horizontal.
XVI.	5. 24. 53 ½	5. 24. 51 ¾	Premier bord du Soleil au vertical.
	5. 25. 37 ½	5. 25. 35 ¾	Premier bord du Soleil à l'horizontal.
	5. 26. 15 ½	5. 26. 13 ¾	Premier bord de Vénus au vertical.
	5. 26. 48 ½	5. 26. 46 ¾	Premier bord de Vénus à l'horizontal.

Les obſervations ſuivantes ſont de M. Saqui Deſtourès. Dès le premier Juin il avoit obſervé le diamètre du Soleil avec le mégamètre de M. de Charnieres ; il réitéra la même obſervation le 2 Juin au matin ; de ces obſervations, nous conclumes 1.° que le

commencement des divisions du micromètre n'étoit pas exact, & que de toutes les distances marquées par cet instrument, il falloit retrancher quatre-vingt-huit parties; 2.° que trois révolutions huit cents soixante-dix-sept parties de la vis, répondoient dans le Ciel à un arc de 31′ 34″ ½. Les distances prises par M. Destourès sont toujours celles du bord du Soleil le plus près de Vénus, au bord de Vénus le plus voisin du centre du Soleil : ôtant cette distance de la somme des deux demi-diamètres, on aura pour reste la distance apparente des centres. Nous avons supposé le diamètre du Soleil tel qu'il est déterminé dans la *Connoissance des Temps;* s'il étoit un peu plus grand ou un peu plus petit, il faudroit augmenter ou diminuer à proportion la valeur des parties du micromètre.

TEMPS de la PENDULE.	TEMPS VRAI.	DISTANCE DES BORDS en parties du microm.	LA MÊME réduite.	LA MÊME en minutes & sec.
H. M. S.	*H. M. S.*	*Révol.*	*Révol.*	*M. S.*
2. 58. 10	2. 58. 12	1,01	0,13	1. 3,5
3. 5. 53	3. 5. 54¾	1,055	0,175	1. 25,5
3. 13. 15	3. 13. 16½	1,10	0,22	1. 47,5
3. 18. 19	3. 18. 20½	1,13	0,25	2. 2,25
3. 24. 48	3. 24. 49¼	1,155	0,275	2. 14,5
3. 29. 0	3. 29. 1	1,17	0,29	2. 21,75
3. 34. 6	3. 34. 7	1,195	0,315	2. 34
3. 39. 10	3. 39. 11	1,2175	0,3375	2. 45
3. 45. 15	3. 45. 15¾	1,25	0,37	3. 0,75
3. 55. 10	3. 55. 10½	1,295	0,415	3. 22,75
3. 59. 30	3. 59. 30½	1,3125	0,4325	3. 31,5
4. 4. 38	4. 4. 38¼	1,34	0,46	3. 44,75
4. 9. 10	4. 9. 10¼	1,37	0,49	3. 59,5
4. 13. 33	4. 13. 33	1,395	0,515	4. 11,5
4. 20. 22	4. 20. 22	1,435	0,555	4. 31,25
4. 24. 20	4. 24. 19¾	1,45	0,57	4. 38,5
4. 31. 10	4. 31. 9½	1,47	0,59	4. 48,25
4. 36. 4	4. 36. 3½	1,49	0,61	4. 58

TEMPS de la PENDULE.	TEMPS VRAI.	DISTANCE DES BORDS en parties du microm.	LA MÊME réduite.	LA MÊME en minutes & sec.
H. M. S.	H. M. S.	Révol.	Révol.	M. S.
4. 40. 20	4. 40. 19 1/2	1,50	0,62	5. 3
4. 42. 59	4. 42. 58 1/4	1,5125	0,6325	5. 9
4. 46. 20	4. 46. 19 1/4	1,5275	0,6475	5. 16,25
4. 52. 40	4. 52. 39	1,5325	0,6525	5. 19
5. 0. 12	5. 0. 11	1,59	0,71	5. 47
5. 12. 23	5. 12. 21 1/2	1,62	0,74	6. 1,5
5. 19. 40	5. 19. 38 1/2	1,63	0,75	6. 6,5
5. 25. 2	5. 25. 0 1/4	1,635	0,755	6. 9

Selon ma dernière obſervation, faite à très-peu près au milieu du paſſage, la diſtance apparente des centres auroit été au Cap-François de 10′ 2″: la derniere obſervation de M. de Fleurieu donne préciſément le même réſultat. Comme Vénus n'étoit pas encore abſolument parvenue au milieu de ſon paſſage, il faudra peut-être diminuer un peu cette quantité pour avoir la moindre diſtance des centres. Selon la dernière obſervation de M. Deſtourès, à $5^h 25'$ la diſtance des centres étoit de 10′ 7″.



OBSERVATION

OBSERVATION
DU PASSAGE DE VÉNUS SUR LE SOLEIL,
Du 3 Juin 1769.

Faite à l'Observatoire avec une lunette de Dollona de 3 pieds & demi.

Par M. le Duc DE CHAULNES.

UN gros nuage ayant empêché de voir le premier contact, le Soleil n'a commencé à être aperçu que lorsque Vénus étoit déja entrée aux trois quarts de son disque; les vapeurs rendoient les bords du Soleil & de Vénus si ondoyans, que l'on ne pouvoit pas juger avec beaucoup de précision des contacts.

Le second contact du bord extérieur de Vénus avec le bord intérieur du Soleil est arrivé à $7^h\ 38'\ 58''$.

Le coucher de Vénus s'est fait derrière une petite maison qui se trouvoit à cet endroit de l'horizon, Vénus s'est cachée environ deux ou trois secondes avant que son bord supérieur parvint à l'horizon. Cependant on a jugé assez exactement du moment où elle a disparu tout-à-fait.

Coucher de Vénus....	$7^h\ 56'\ 46''$.
Coucher du Soleil....	$7^h\ 57'\ 17''$.

J'ai pris une distance du bord supérieur de Vénus au bord inférieur du Soleil, comme dans la figure ci-jointe; à $7^h\ 49'\ 14''$ distance du bord supérieur de Vénus au bord inférieur du Soleil $1'\ 15''$; mais, comme je l'ai déjà dit plus haut, les bords des deux Astres étoient si ondoyans, qu'on ne peut être assuré d'une grande précision.

Pour faire cette observation, ma lunette étoit placée sur un pied destiné à être parallactique, mais dont j'avois laissé le cercle qui représente l'Équateur dans le plan de

l'horizon ; & mon micromètre étoit diſpoſé de telle façon, que le mouvement du curſeur ſe faiſoit dans le vertical. La table de ce micromètre ayant été faite avec ſoin de quatre en quatre ſecondes, l'obſervation auroit été ſuſceptible de beaucoup de préciſion, ſans les circonſtances phyſiques.

Je n'ai pu faire que cette obſervation à cauſe de l'affluence des Spectateurs qui troubloient beaucoup les obſervations par le bruit & le mouvement continuel.



OBSERVATION

Du PASSAGE DE VÉNUS ſur le Soleil, le 3 Juin 1769 ; & de l'ÉCLIPSE DU SOLEIL, du 4 Juin de la même année.

Faite au Cabinet de Phyſique du Roi, à Paſſy.

Par M.[rs] DE FOUCHY, DE BORY & BAILLY.

NOUS nous ſommes transportés, M. de Fouchy & moi, le 1.[er] Juin à l'hôtel de Paſſy, où Dom Noël, qui eſt Gardien du Cabinet de Phyſique, ſous les ordres de M. le Marquis de Marigny, nous a procuré toutes les commodités néceſſaires pour faire l'importante obſervation du paſſage de Vénus.

Nous nous ſommes établis dans le pavillon qui eſt à l'extrémité du jardin de la Muette; d'où l'on pouvoit très-bien ſuivre le Soleil pendant toute la durée du phénomène juſqu'à quelques minutes de ſon coucher.

La pluie & le mauvais temps nous ont empêchés de prendre des hauteurs du Soleil le 1.[er] au ſoir & le 2 au matin ; l'après-midi du 2 ayant été aſſez belle, nous en avons pris vingt-ſix, dont nous n'avons point fait d'uſage, parce qu'ayant obtenu l'heure à midi le 3 & le 4, cela ſuffiſoit pour avoir l'heure vraie, & pour connoître la marche de la pendule dans cet intervalle de temps.

Nous avons eu midi le 3 par cinq hauteurs, à $0^h\ 1'\ 3''$ de la pendule.

Il a ſoufflé toute la journée un vent d'oueſt violent, qui a amené de la pluie, du tonnerre à diverſes repriſes. Le ſoir, M. de Bory s'eſt rendu à Paſſy, & M. l'Abbé Bourriot s'eſt joint à nous pour faire l'obſervation du paſſage de Vénus.

M. de Fouchy & moi, nous nous ſervions chacun d'un téleſcope de 30 pouces de foyer, qui porte 4 pouces & demi d'ouverture,

Ces deux téleſcopes ont été faits par Dom Noël, & ſont excellens.

M. de Bory ſe ſervoit d'une lunette achromatique de M. de Létang, de 5 pieds, & dont l'ouverture a 24 lignes ; Dom Noël, d'un téleſcope de 4 pieds ; M. l'Abbé Bourriot, d'une lunette achromatique de 6 pieds, qui porte 27 lignes d'ouverture, dont il a travaillé lui-même l'objectif qui eſt très-bon.

Vers les ſix heures, un nuage long & épais s'eſt établi dans la partie du Ciel où le Soleil devoit deſcendre pour ſe coucher, mais de manière qu'il reſtoit au-deſſous de ce nuage un endroit clair qui pouvoit avoir 6 ou 7 degrés de hauteur, à compter de l'horizon juſqu'au nuage; le Soleil eſt entré dans le nuage vers 6 heures $\frac{3}{4}$, & nous ſommes reſtés dans la plus grande inquiétude que Vénus ne fût entrée avant que le Soleil ſe remontrât. A 7 heures, les nuages ont paru s'éclaircir ; & 10 minutes après, le Soleil a paru, mais un moment ſeulement, & comme pour nous faire voir que Vénus n'étoit pas encore entrée. A $7^h\ 22'\ 23''$ à la pendule ou à $7^h\ 21'\ 6''$ temps vrai, j'ai aperçu le bord ſupérieur du Soleil, & je me ſuis écrié que le bord étoit entamé ; ce bord ne s'étoit pas montré l'eſpace d'une ſeconde; mais je puis affirmer que le premier contact étoit fait, & qu'il n'y avoit pas long-temps, parce que le bord du Soleil étoit très-légèrement échancré. Je craignis d'abord de m'être trompé, parce que j'avois été ſeul à apercevoir le phénomène; mais à $7^h\ 21'\ 51''$ temps vrai, le Soleil ſe montra plus à découvert, & on fut aſſuré que le contact étoit arrivé ; l'échancrure étoit déjà plus que ſenſible. Le Soleil reſta pendant quelques minutes aſſez clair, & nous nous préparames à obſerver la phaſe la plus importante, c'eſt-à-dire le contact intérieur : alors un petit nuage ſe plaça ſur le Soleil dans la partie ſupérieure, de manière qu'il n'occupoit qu'un ſegment aſſez petit, mais il ſuffiſoit pour nous cacher Vénus & faire manquer notre obſervation. On eût dit qu'il s'étoit mis là exprès, car il paroiſſoit ſuivre conſtamment le Soleil. Il eſt aiſé de juger de notre inquiétude; enfin à $7^h\ 38'\ 33''$ le nuage s'étant éclairci, M. de Bory annonça que le bord de Vénus avoit quitté le bord du Soleil. M. de Fouchy, qui l'avoit obſervé comme lui, & qui n'avoit attendu à le dire que

pour juger, par le mouvement de Vénus, du vrai moment du contact intérieur, M. de Fouchy, dis-je, assura, comme M. de Bory, qu'à 7^h 38′ 33″ Vénus s'étoit détachée du bord du Soleil; & il assura en même-temps qu'il n'y avoit pas plus de deux secondes. Nous en avons tous ensuite porté le même jugement; ainsi nous croyons pouvoir dire, avec confiance, que le contact intérieur est arrivé à Passy à 7^h 38′ 31″, ou à 7^h 38′ 45″ $\frac{1}{2}$, temps vrai, réduit au temps de l'observatoire. Après cette observation il survint une pluie considérable, sans que le Soleil se couvrit; nous fumes obligés de recueillir, dans la pièce où nous observions, quantité de personnes qui étoient dans le jardin. J'essaiai cependant de faire une observation avec mon quart-de-cercle; je la rapporterai telle que je l'ai faite, mais je ne la garantis en aucune façon, parce que dans ce moment il y avoit du bruit & de la confusion; & que d'ailleurs le Soleil étant presque à l'horizon, ses bords étoient fort ondoyans; ceux de Vénus changeoient continuellement de forme.

Bord supérieur de Vénus au fil horizontal........	7^h 46′ 16″
Bord précédent du Soleil au vertical...........	7. 46. 18
Bord supérieur du Soleil à l'horizontal..........	7. 46. 25
Bord précédent de Vénus au vertical...........	7. 47. 38

Observation de l'Éclipse de SOLEIL.

Le Dimanche 4 Juin, le Ciel étoit très-beau, & le temps le plus favorable pour l'observation.

Nous nous étions proposés d'observer, 1.° le commencement, la fin & la grandeur de l'éclipse; 2.° l'occultation des différentes taches du Soleil qui étoient en assez grand nombre, & qui pouvoient se trouver sur la route de la Lune; 3.° les passages des cornes aux fils vertical & horizontal du quart-de-cercle; 4.° d'observer les instans où l'éclipse auroit un doigt, deux doigts, &c.

Pour cela M. de Fouchy établit sur une machine parallactique, une lunette de huit pieds, qui portoit un carton divisé en douze

doigts par ſix cercles concentriques, & ſur lequel carton on devoit faire tomber l'image du Soleil. M. de Fouchy ſe chargea de ſuivre cette obſervation.

Nous nous préparames à obſerver le commencement de l'éclipſe & l'occultation des taches, avec les mêmes inſtrumens qui nous avoient ſervi pour Vénus.

Commencement de l'Éclipſe.

M. DE FOUCHY	6^h	46′	42″	Temps vrai.
M. DE BORY	6.	46.	42	
Dom NOEL	6.	46.	42	
M. l'Abbé BOURRIOT	6.	46.	42	
M. BAILLY	6.	46.	37	

Après avoir obſervé la fin de l'éclipſe, & avoir comparé l'échancrure ſenſible, qui nous avoit fait connoître que l'éclipſe étoit commencée, à celle de la fin, j'ai eſtimé qu'il y avoit bien 5″ que l'éclipſe étoit commencée lorſque nous l'avons jugée telle; ainſi je crois que le véritable commencement eſt arrivé, ſelon ces Meſſieurs, à 6^h 46′ 37″; &, ſelon moi, à 6^h 46′ 32″.

Nous avons obſervé, autant que nous l'avons pu, l'attouchement des groſſes taches, & leur immerſion totale.

Tache a.

Nous avons obſervé

L'attouchement à	6^h	51′	0″
Immerſion totale	6.	51.	45

Tache b.

La tache *b*, comme on le voit par la figure, étoit environnée d'une atmoſphère; elle avoit deux parties pointues fort diſtinctes, que j'ai marquées 1 & 2; on a donc obſervé d'abord l'attouchement du bord de la Lune au bord de l'atmoſphère, enſuite au bord de la tache même; enfin l'immerſion totale des parties marquées 1 & 2.

Attouchement au bord de l'atmoſphère.

M. l'Abbé BOURRIOT	7h 11′ 42″
M. BORY	7. 11. 47
Dom NOEL	7. 11. 41
M. BAILLY	7. 11. 49
M. DE FOUCHY	7. 11. 50

Attouchement au bord de la Tache.

M. BORY	7h 12′ 51″
Mrs DE FOUCHY, BOURRIOT, Dom NOEL, BAILLY	7. 12. 52

Immerſion totale. Partie I.

Mrs DE FOUCHY, BAILLY	7h 13′ 33″
M. BORY	7. 13. 31

Immerſion totale. Partie II.

Mrs DE FOUCHY, BAILLY	7h 14′ 4″
M. BORY	7. 14. 2

Nous avons obſervé auſſi, M. Bory & moi, à 7h 40′ que la tache *b* étoit ſortie, & nous avons marqué l'inſtant où le bord de l'atmoſphère a quitté le bord de la Lune, à 7h 41′ 2″.

Tache c.

Nous avons tous obſervé en même-temps

L'attouchement à	7h 22′ 45″
Et l'immerſion totale à	7. 23. 28

Tache e.

M. Bory & M. l'Abbé Bourriot ont observé

L'attouchement à . . . . $7^h\ 26'\ 19''$
L'immersion à 7. 26. 33

M. Bory a observé l'immersion

De la tache *d* à . . . . $7^h\ 28'\ 17''$
f à 7. 28. 18
n à 7. 28. 42
g n'a pas été observée.

Tache h.

Cette tache a paru à M. Bory divisée en deux.

Il a observé l'immersion de la premiere à . . . . $7^h\ 33'\ 4''$
L'immersion de la seconde à 7. 33. 19

Tache k.

M. l'Abbé Bourriot a vu

L'attouchement à . . . . $7^h\ 41'\ 49''$
L'immersion à 7. 43. 32

Tache m.

M. l'Abbé Bourriot ;

Attouchement à . . . . $7^h\ 42'\ 44''$
Immersion à 7. 43. 32

Observation au quart-de-cercle.

La première de ces quatre observations est de M. Bory, les trois autres sont de moi.

Corne précédente au vertical . . . . $7^h\ 3'\ 11''$
à l'horizontal 7. 3. 28
Corne suivante à l'horizontal 7. 4. 35
au vertical 7. 4. 38

Corne

Suite de l'Obſervation au quart-de-cercle.

Corne précédente à l'horizontal	....	$7^h\ 46'\ 28''\frac{1}{2}$
au vertical	....	$7.\ 47.\ 40\frac{1}{2}$
Corne ſuivante à l'horizontal	....	$7.\ 48.\ 42$
au vertical	....	$7.\ 49.\ 7$
Corne précédente à l'horizontal	....	$7.\ 50.\ 27\frac{1}{2}$
au vertical	....	$7.\ 51.\ 9$
Corne ſuivante au vertical	....	$7.\ 52.\ 22\frac{1}{2}$
à l'horizontal	....	$7.\ 52.\ 49$
Corne précédente à l'horizontal	....	$7.\ 53.\ 14$
au vertical	....	$7.\ 54.\ 14$
Corne ſuivante au vertical	....	$7.\ 55.\ 17$
à l'horizontal	....	$7.\ 55.\ 36$

A $7^h\ 7'\ 12''$, j'ai obſervé que dans la lunette du quart-de-cercle, la ligne des cornes paroiſſoit horizontale.

Obſervation des Doigts.

Il y a dans le commencement quelques doigts qui n'ont pas été obſervés, parce qu'alors M. de Fouchy obſervoit l'occultation des taches; mais ceux qui ſont marqués ici, ont été obſervés par lui.

Deux doigts	$6^h\ 58'\ 12''$
Deux doigts & demi	7. 0. 42
Trois doigts	7. 6. 2
Trois doigts & demi	
Quatre doigts	
Quatre doigts & demi	
Cinq doigts	7. 24. 36
Cinq doigts	7. 43. 33
Quatre doigts & demi	7. 51. 41
Quatre doigts	7. 57. 51
Trois doigts & demi	8. 2. 0
Trois doigts	8. 7. 0

Suite de l'Observation des Doigts.

Deux doigts & demi..........	8h 11′ 0″
Deux doigts................	8. 14. 20
Un doigt & demi............	8. 17. 50
Un doigt...................	8. 21. 0

M. de Fouchy a déterminé la grandeur de l'éclipse de 5 doigts 20 minutes.

Fin de l'Éclipse.

M. DE FOUCHY.............	8h 27′ 02″
M. l'Abbé BOURRIOT.......	8. 27. 4
M. BAILLY................	8. 27. 5
M. BORY..................	8. 27. 6
Dom NOEL.................	8. 27. 8

Midi vrai le 4 par dix hauteurs correspondantes, 0h 1′ 48″ à la pendule.

Tous les instans marqués dans ce Mémoire, sont au temps vrai, & ont été corrigés de l'avancement de la pendule.

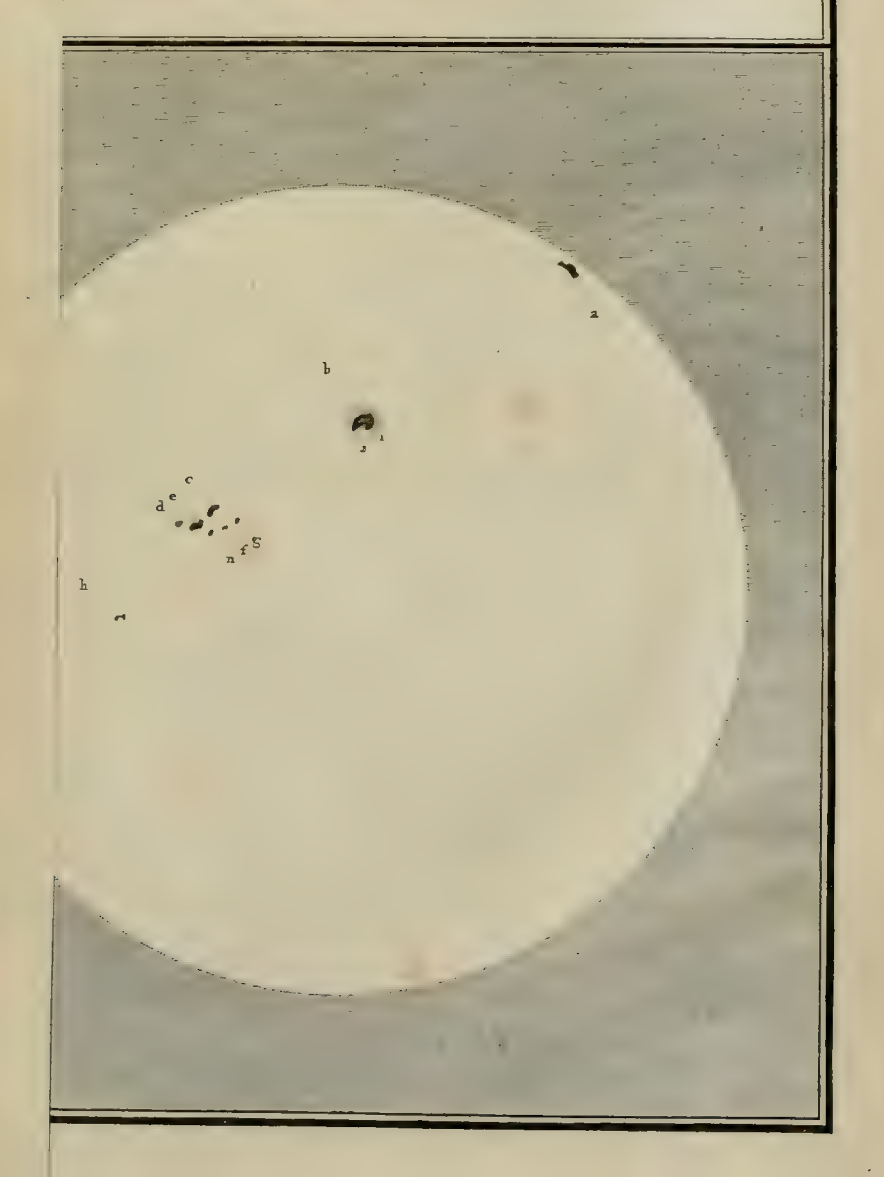
La différence des méridiens de l'Observatoire Royal, & de l'hôtel de Passy, est de 14″ $\frac{1}{2}$ de temps, dont Passy est plus à l'ouest. *Voyez le Mémoire de M. de Fouchy, année 1761.*



TACHES VUES SUR LE SOLEIL,

clipſe de cet Aſtre par la Lune le 4 Juin 1769,

ée par Messieurs de Fouchy, de Bory et Bailly

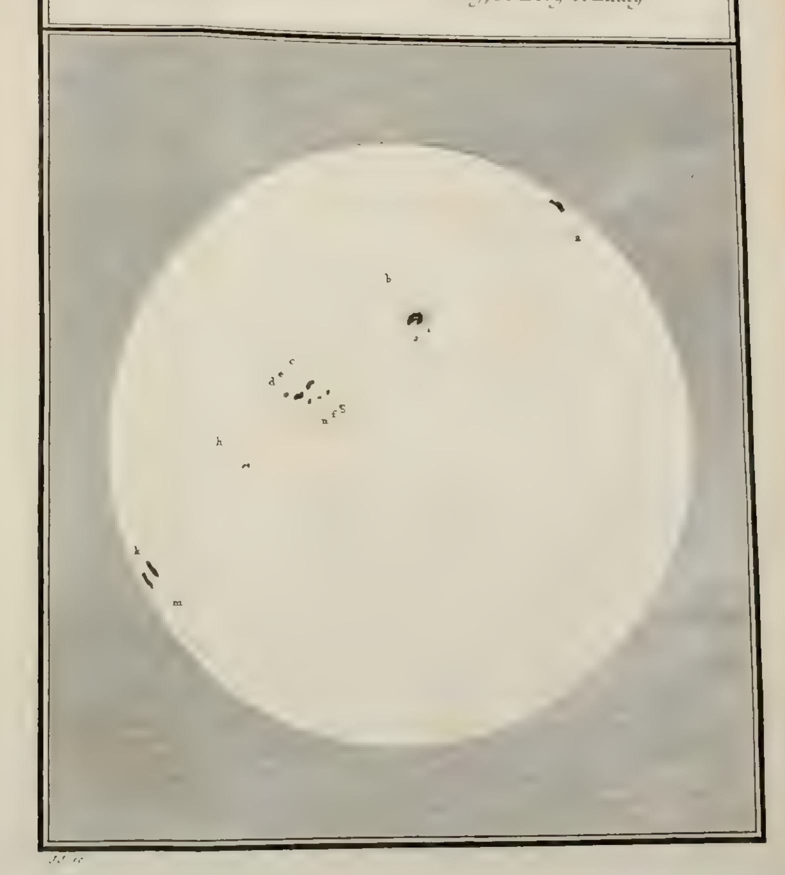


Mem. de l'Ac. R. des Sc. 1769 Pag. 538 Pl. 7

TACHES VUES SUR LE SOLEIL,

lors de l'éclipse de cet Astre par la Lune le 4 Juin 1769,

Observée par Messieurs de Fouchy, de Bory et Bailly



REMARQUES
SUR LES DIFFÉRENTES OBSERVATIONS DU PASSAGE DE VÉNUS,
Faites en Angleterre.

Par M. DE LA LANDE.

M. le Docteur Bevis s'étoit transporté, pour faire cette observation; dans la maison de M. Kerby, Membre de la Société Royale de Londres, à Kew, & seulement à un quart de lieue du nouvel Observatoire que le Roi d'Angleterre a fait faire pour son usage; il étoit sous une latitude de $51^d\ 29'\ 45''$, & $0^h\ 1'\ 9''$ de temps à l'ouest de l'Observatoire Royal de Greenwich, c'est-à-dire $10'\ 25''$ à l'ouest de Paris; il se servoit d'un télescope grégorien de $3\frac{1}{2}$ pieds de foyer, qui avoit 6 pouces anglois d'ouverture, & grossissoit cent vingt fois.

Le 3 Juin, à $7^h\ 9'\ 59''$, temps apparent ou temps vrai, M. Bevis aperçut un commencement d'altération sur le bord supérieur du Soleil.

A $7^h\ 10'\ 7''$, Vénus avoit déjà fait une impression sensible sur le disque du Soleil; il jugea que le contact extérieur s'étoit fait quelques secondes plus tôt.

A $7^h\ 28'\ 8''$, Vénus paroissoit entièrement sur le Soleil, ses deux bords sembloient se toucher; mais au lieu d'un trait de lumière que M. Bevis s'attendoit à voir tout de suite entre les deux limbes, il les vit encore unis pendant quelques secondes par un espèce de ligament étroit, qui étoit moins noir que le disque de Vénus, & qui lui étoit adhérent comme le col d'une bouteille. Cela approche un peu de la manière dont je vis le contact intérieur se faire en 1761.

A $7^h\ 28'\ 17''$ (ou $7^h\ 38'\ 42''$ à Paris) ce ligament disparut

ſubitement, & abandonna le limbe de Vénus auquel il avoit été uni, & qui reprit bientôt toute ſa rondeur.

Quelques minutes après, la circonférence de Vénus devint très-inégale & raboteuſe; elle parut agitée d'une façon très-ſingulière, en forme de friſure. M. Bevis n'avoit rien vu de ſemblable dans le paſſage de 1761, qu'il obſervoit avec le Duc de Cumberland, le Duc d'Yorck & le Duc de Glocefter, Vénus avoit toujours paru très-bien terminée; mais dans la dernière obſervation, c'étoit un effet des réfractions qui ſont très-inégales vers l'horizon; je me ſouviens que le 2 de Juin au ſoir, regardant le Soleil dans ma lunette achromatique, un peu avant ſon coucher, je le voyois non-ſeulement inégal & dentelé, mais morcelé & hériſſé d'aſpérités ſi irrégulières, qu'il y en avoit de ſemblables à des crochets, & qui changeoient de forme dans le moment même qu'on les regardoit. Mais le 3 de Juin, la pluie qui venoit d'abaiſſer les vapeurs dans l'horizon de Paris, fit que le bord du Soleil couchant parut beaucoup moins inégal. On peut voir dans le voyage aſtronomique du Père Boſcowich, des effets encore plus extraordinaires des vapeurs de l'horizon.

Il paroît donc que c'eſt à $7^h\ 38'\ 42''$ que M. Bevis a véritablement obſervé le contact intérieur, mais pour achever de réduire cette obſervation à Paris, il faut auſſi connoître l'effet que la parallaxe y a produit. Pour cela, je me ſuis ſervi des calculs que j'avois fait d'avance pour Greenwich, dont je n'avois cependant pas encore reçu les obſervations: je trouvois qu'à $7^h\ 38'\ 43''$, comptées au méridien de Paris, l'angle horaire de Vénus étoit à Greenwich de $112^d\ 12'\ 11''$, ſa hauteur apparente $4^d\ 48'\ 30''$; ſa parallaxe, par rapport au Soleil, $22'',548$, en ſuppoſant $9''$ pour celle du Soleil; l'angle du vertical avec le rayon du Soleil, paſſant par le lieu vrai de Vénus $1^d\ 4'\ 8''$, l'angle de la diſtance apparente $1^d\ 5'\ 42'',5$; la diſtance apparente $15'\ 17'',5$; la diſtance vraie $15'\ 40'',03$; la diſtance vraie à la perpendiculaire abaiſſée ſur l'orbite $2^h\ 59'\ 24'',6$; la diſtance au contact, vu du centre de la Terre, étant ſuppoſée de $2^h\ 51'\ 58'',4$: ainſi l'effet de la parallaxe à Greenwich étoit de $7'\ 26'',2$, plus petit ſeulement de $0'',2$ qu'à Paris; il paroît donc qu'il n'y a preſque aucune réduction à faire

aux obſervations de Londres & des environs, par rapport à la parallaxe, pour les réduire à Paris; en ſorte que l'obſervation de M. le Docteur Bevis tombe à la même ſeconde que celle de M. Meſſier à Paris. Cette obſervation angloiſe eſt datée du 16 Juin; elle m'eſt arrivée le 21.

Ainſi le contact intérieur pour Paris me paroît pouvoir être fixé par une eſpèce de milieu entre toutes les obſervations, à $7^h\ 38'\ 45''$, du moins à $5''$ près; les vapeurs de l'horizon ne permettent pas une plus grande préciſion. Depuis ce temps-là M. Maskelyne m'a envoyé un grand nombre d'obſervations de ce paſſage, faites en différentes parties de l'Angleterre & des Colonies Angloiſes en Amérique; on les trouvera toutes dans les Tranſactions philoſophiques de 1769; j'ai déjà préſenté les plus importantes à l'Académie, avec les conſéquences que j'en ai tirées. En voici encore quelques-unes.

A Greenwich près de Londres, M. Maskelyne obſerva le contact intérieur à $7^h\ 29'\ 23''$, avec une incertitude d'environ $3''$, produite par la fluctuation du diſque ſolaire, avec un téleſcope de 2 pieds de foyer qui groſſiſſoit cent quarante fois. M. Dollond à $7^h\ 29'\ 20''$; avec un téleſcope de $3\frac{1}{2}$ pieds de foyer, qui groſſiſſoit cent cinquante fois; de même que M. Nairn, avec un téleſcope de 2 pieds qui groſſiſſoit cent vingt fois; ils étoient dans une autre ſalle que M. Maskeline. M. Hirſt, dans une troiſième pièce, avec un téleſcope de deux pieds qui groſſiſſoit cinquante-cinq fois, obſerva le contact à $7^h\ 29'\ 18''$. Greenwich eſt à $9'\ 16''$ à l'occident de Paris; en ſorte que l'obſervation de M. Maskelyne tombe à $7^h\ 38'\ 39''$ au méridien de l'Obſervatoire Royal de Paris; c'eſt 3 ſecondes plus tôt que ſuivant M. Meſſier: auſſi M. Maskeline eſtimoit à 3 ſecondes l'incertitude de ſon obſervation.

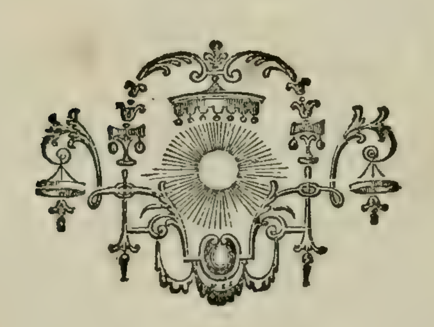
A Hawkill, un mille & demi au nord-eſt du Collége d'Édimbourg, les deux contacts furent obſervés de la manière ſuivante en temps moyen; auquel il faut ajouter $2'\ 13''$ pour avoir le temps vrai.

	Contact extér.	*Contact intér.*	
Lord ALCMOER	6^h 57′ 33″	7^h 14′ 32″	Télescope de 18 pouces.
M. JAMES HEY	6. 57. 30	7. 14. 35	Lunette achr. de $3\frac{1}{2}$ pieds.
Le Docteur LIND	6. 57. 41	7. 14. 37	Lunette achr. de 2 pieds.

La latitude du lieu est 55^d 57′ 37″. La longitude peut se déterminer par la fin de l'éclipse de Soleil, observée à 8^h 19′ 37″ de temps vrai.

A Gibraltar, latitude 36^d 4′ 44″, & environ 28′ 46″ à l'occident de Paris. M. le Lieutenant Jardine observa le contact intérieur à 7^h 8′ 21″.

Ces observations ne s'éloignent pas sensiblement des résultats que l'on trouvera ci-après, à l'occasion de la plus courte distance des centres, déduite de l'observation de Cajanebourg.



EXAMEN
DE LA
PLUS COURTE DISTANCE DES CENTRES DE VÉNUS ET DU SOLEIL.
Le 3 Juin 1769.
Par M. DE LA LANDE.

LA première obſervation que nous ayons reçue de la durée totale du paſſage de Vénus ſur le Soleil, eſt celle de M. Planman, faite à Cajanebourg, ſous la latitude de $64^d\ 13'\ 30''$ & $1^h\ 40'\ 40''$ à l'orient de Paris, ſuivant les calculs que fit M. Pingré, à l'occaſion du paſſage de 1761 qui avoit déjà été obſervé à Cajanebourg; ou $1^h\ 41'\ 44''$, ſuivant les obſervations de ce nouveau paſſage, comparées avec celles de Paris.

Le contact intérieur de l'entrée, ou l'immerſion totale, arriva le 3 Juin à $9^h\ 20'\ 45''\frac{1}{2}$; & le contact extérieur de la ſortie, ou l'émerſion totale, le 4 Juin à $3^h\ 32'\ 27''$ du matin. Pour calculer l'effet des parallaxes dans ces deux inſtans, il faut avoir les hauteurs de Vénus que j'ai trouvées de $2^d\ 14'\ 38''$ & $6^d\ 4'\ 50''$; les angles parallactiques $16^d\ 13'\ 54''$ & $20^d\ 32'\ 42''$; ſuppoſant la parallaxe de $9''$ & les diſtances apparentes $917'',5$ & $976''5$; on trouve les diſtances vraies $939'',04$ & $991'',78$, les diſtances au milieu du paſſage pour les temps des obſervations $2^h\ 57'\ 17''$ & $3^h\ 14'\ 23''$, les diſtances vraies qui auroient lieu pour le centre de la Terre au moment de l'immerſion & de l'émerſion $2^h\ 50'\ 6''$ & $3^h\ 9'\ 29''$, & par conſéquent l'effet de la parallaxe $7'\ 11''$ & $4'\ 54''$, & l'effet total ſur la durée $12'\ 5''$.

Ainſi l'immerſion totale, vue du centre de la Terre, ſeroit arrivée à $9^h\ 27'\ 56''\frac{1}{2}$, & l'émerſion à $3^h\ 27'\ 33''$, au méridien de Cajanebourg : c'eſt-à-dire au méridien de Paris $7^h\ 47'\ 16''\frac{1}{2}$ du ſoir, & $1^h\ 46'\ 53''$ du matin.

La corde parcourue ſur le diſque du Soleil par Vénus dans l'eſpace de $5^h\ 59'\ 36''$, qui ſe ſont écoulées entre les deux obſervations, eſt de 1439",09 ; d'où il eſt aiſé de conclure la plus courte diſtance des centres au milieu du paſſage 615",16, plus grande ſeulement de 8",4 que celle que j'avois annoncée dans la *Connoiſſance des Temps* & dans mon Mémoire ſur le paſſage de Vénus. On la trouveroit encore moindre ſi l'on diminuoit le diamètre du Soleil de 3 ou 4 ſecondes, comme il me ſemble que les deux paſſages de Vénus l'exigeroient. L'effet de la parallaxe que j'ai trouvée de 12' 5", en ſuppoſant 9" pour celle du Soleil, augmenteroit de $1'\ 20''\frac{1}{2}$, ſi l'on donnoit 1" de plus à la parallaxe du Soleil. Dans ce cas-là, on trouveroit 3",14 de plus pour la plus courte diſtance des centres de Vénus & du Soleil. Cette diſtance ſeroit de 618",3, ſi la parallaxe du Soleil étoit de 10"; mais les obſervations des deux paſſages de Vénus prouvent aſſez que la parallaxe eſt à peine de 9".

De-là il ſuit qu'on ne ſauroit déterminer la parallaxe à un dixième de ſeconde près, en comparant l'entrée que nous avons obſervée avec la ſortie, obſervée à Péterſbourg ou ailleurs, à moins qu'on n'eût d'ailleurs la plus courte diſtance à un tiers de ſeconde près; ce qui eſt impoſſible. Je crois donc abſolument inutile toutes les méthodes qui ont été propoſées pour déterminer la parallaxe par les ſeules obſervations du Nord, en comparant trois obſervations & éliminant la latitude de Vénus; & je penſe qu'il faut attendre les obſervations d'Amérique pour avoir quelque certitude ſur cet élément eſſentiel qui a fait l'objet de tant de Voyages diſpendieux & pénibles (*a*).

Suivant cette obſervation de Cajanebourg, le milieu du paſſage a dû arriver à $10^h\ 37'\ 23''$, temps vrai, au méridien de Paris; la conjonction à $10^h\ 17'\ 12''$ ou à $10^h\ 15'$ de temps moyen, le lieu du Soleil étant, par les Tables de M. l'Abbé de la Caille,

(*a*) Depuis la lecture de ce Mémoire, j'ai comparé cette durée, obſervée à Cajanebourg, avec celles de Californie, & j'ai trouvé la parallaxe moyenne du Soleil 8",4 : l'obſervation de Wardhus donne même 9" de parallaxe, comme on le verra dans les Mémoires de 1770 & dans la ſeconde édition de mon Aſtronomie, *article 2149*.

$8^s\ 13^d\ 27'\ 27''\frac{1}{2}$, plus grand de $57''\frac{1}{2}$ que par les Tables de Vénus qu'a données M. Halley. Cette erreur des Tables étoit en 1761, de $52''\frac{1}{2}$; en ſorte que par un milieu l'on trouveroit $55''$ à ajouter aux époques de ces Tables pour 1765, s'il n'y avoit une partie de cette erreur qui provient de l'aphélie, comme je me propoſe de le faire voir par le moyen des digreſſions de Vénus que j'ai obſervées avant & après le paſſage ſur le Soleil.

ADDITION.

DEPUIS la lecture de ce Mémoire, la comparaiſon de pluſieurs autres obſervations m'a fait trouver le temps vrai de la conjonction à $10^h\ 14'\ 32''$, ou $10^h\ 12'\ 19''$ de temps moyen, dans $2^s\ 13^d\ 27'\ 22''$ de longitude, avec $10'\ 13'',8$ de latitude; la plus courte diſtance $10'\ 7''$, & le lieu du nœud $2^s\ 14^d\ 36'\ 5''$, peu différent de ce qui ſe trouve dans mon ASTRONOMIE, *art. 2155.* J'ai auſſi trouvé que l'aphélie de Vénus devoit être fixé à $10^s\ 8^d\ 58'$ pour le commencement de 1768, c'eſt-à-dire plus avancé de $54'$ que dans les Tables de M. Caſſini, & de $1^d\ 22'\frac{1}{2}$ que dans celles de M. Halley (ASTRONOMIE, *art. 1318*). C'eſt ainſi que je l'ai ſuppoſé dans les nouvelles Tables de Vénus qui ſont jointes à la ſeconde édition de mon ASTRONOMIE. Le nœud de Vénus eſt, ſuivant mes Tables, plus avancé de $15''$; mais cette quantité eſt abſolument inſenſible, car elle ne ſuppoſe que $2''$ d'erreur ſur la plus courte diſtance, ou ſur le diamètre du Soleil; d'ailleurs les longitudes même du Soleil ne ſont pas certaines à $15''$ près. Je ſuppoſe dans ces calculs la parallaxe moyenne du Soleil de $8'',8$; la parallaxe pour le jour du paſſage $8'',67$; la différence des demi-diamètres du Soleil & de Vénus $914'',8$; & le moment du contact intérieur à Paris $7^h\ 38'\ 45''$. Lû en 1770. Nœud de Vénus.

La durée du paſſage entre les contacts intérieurs, ſe trouve par-là de $5^h\ 41'\ 57''$; le contact à Cajanebourg, vu du centre de la Terre, $9^h\ 27'\ 39''\frac{1}{2}$, & la différence des méridiens tirée des contacts intérieurs $1^h\ 41'\ 44''$.

Le calcul que j'avois donné d'avance dans la *Connoiſſance des Temps*, étoit en défaut de $4'\ 39''$; & celui du Mémoire de

M. Pingré, de 8′ 54″; ma latitude ne différoit que de $\frac{4}{10}$ de ſeconde de l'obſervation, & celle de M. Pingré de 5″$\frac{1}{2}$.

MÉMOIRE

SUR LES

OBSERVATIONS DU PASSAGE DE VÉNUS,

FAITES À BREST.

Par M. DE LA LANDE.

LE paſſage de Vénus a été obſervé à Breſt dans deux endroits différens, avec toutes les précautions que l'on prend en Aſtronomie pour s'aſſurer d'un phénomène; d'un côté, M. le Roy & M. Blondeau, tous deux Profeſſeurs de Mathématiques attachés au Corps de la Marine; de l'autre, M. Fortin, également Profeſſeur de Mathématiques, & M. de Verdun, Officier de Vaiſſeaux, que nous avons vu cette année même à Paris s'exercer à la pratique de l'Aſtronomie, après avoir fait, dans le voyage d'Amérique, différentes obſervations relatives aux Longitudes; M. Fortin a été long-temps à l'Obſervatoire Royal attaché au travail de la Carte de France, & il s'occupoit dès-lors beaucoup de l'Aſtronomie; M. Blondeau eſt celui qui avoit obſervé déjà le paſſage de 1761 à Calais, ainſi que l'éclipſe annulaire du 1er Avril 1764; M. le Roy eſt celui à qui nous devons une très-bonne traduction du grand *Traité d'Optique* de Smith, enrichie de notes intéreſſantes.

Les pendules furent réglées de part & d'autre par des hauteurs correſpondantes, priſes pendant pluſieurs jours. M. de Verdun avoit une lunette ordinaire de 7 pieds, M. Fortin une lunette achromatique de 5 pieds, M. Blondeau une lunette achromatique ſemblable, & M. le Roy une bonne lunette de 14 pieds de Buttieri, que M. de Buffon avoit apportée de Rome, & que j'avois envoyée à M. le Roy.

Dans cet état, le contact intérieur de Vénus, qui étoit notre obſervation importante, fut obſervé par M. de Verdun à $7^h\ 11'\ 37''$, par M. Fortin $7^h\ 11'\ 44''$, par M. Blondeau $7^h\ 12'\ 4''$, & par M. le Roy $7^h\ 12'\ 7''$.

Toutes ces obſervations paroiſſent donner le contact plus tard qu'il n'a été obſervé à Paris, celle de M. de Verdun en approche le plus; car ſi l'on ajoute $27'\ 23''$ à l'obſervation $7^h\ 11'\ 37''$, on a $7^h\ 39'\ 0''$, dont ôtant encore $2''\frac{1}{2}$, dont l'effet de la parallaxe étoit plus grand à Breſt qu'à Paris; on a $7^h\ 38'\ 57''\frac{1}{2}$ pour le moment du contact, réduit au méridien de Paris: c'eſt, à la vérité, la même ſeconde que M. le Duc de Chaulnes a compté à l'Obſervatoire Royal de Paris, mais c'eſt $14''$ plus tard que M. Meſſier, M. du Séjour, M. Caſſini le fils, & ſuivant l'obſervation d'Angleterre dont je ferai part à l'Académie dès que j'en aurai fait les calculs.

Mais, comme ce contact a été eſtimé 30 ſecondes plus tard par un des autres Obſervateurs, & qu'en général les Aſtronomes de Breſt me paroiſſent avoir été en retard ſur ceux de Paris, j'ai cru d'abord qu'il pourroit y avoir une partie de cette différence cauſée par la longitude de Breſt, qui ſeroit peut-être trop forte de quelques ſecondes dans la Carte de France & dans la *Connoiſſance des Temps;* je me ſuis ſervi pour la vérifier, de l'éclipſe de Soleil, dont la fin fut obſervée le lendemain à Breſt par les mêmes Aſtronomes, avec les mêmes pendules & les mêmes lunettes, à $7^h\ 56'\ 33''$, ſuivant M. le Roy & M. Blondeau; & à $7^h\ 56'\ 44''$, ſuivant M. Fortin.

J'ai trouvé qu'à $7^h\ 56'\ 33''$, la parallaxe de la Lune, à Breſt, étoit de $31'\ 29''$ en longitude & $38'\ 18''$ en latitude, la ſomme des demi-diamètres du Soleil & de la Lune, étoit de $32'\ 42''$; & la latitude apparente de la Lune, rectifiée ſur les obſervations de Paris, étoit de $17'\ 34''$; d'où je conclus la diſtance à la conjonction vraie $0^h\ 6'\ 35''$, & le temps de la conjonction à Breſt $8^h\ 3'\ 8''$; je l'ai trouvée pour Paris $8^h\ 30'\ 38''$, ou 41 ſecondes, ainſi la différence des méridiens ſeroit, par cette obſervation, $27'\ 30''$, au lieu de $27'\ 23''$ que j'avois ſuppoſé; il ne faudroit même que prendre un milieu, ou de ſe rapprocher

de l'autre observation de Brest, pour trouver exactement la différence des méridiens de 27′ 23″; j'ai donc lieu de croire que ce n'est point de l'erreur sur la longitude de Brest que provient la différence entre ces observations & celles de Paris.

Pour trouver la quantité dont j'ai dit ci-dessus que l'effet de la parallaxe étoit plus grand à Brest qu'à Paris, il suffit de jeter les yeux sur une Carte de France, sachant que le pôle d'entrée étoit à Trèves, qu'il y a 7^d 12′ environ de Trèves à Brest, que pour 3^d 51′ l'effet de la parallaxe est d'une seconde, & qu'il croît, comme les sinus verses des arcs; on trouve $3''\frac{1}{2}$ pour l'effet à Brest, ou presque 3 secondes de plus qu'à Paris.

Je l'ai calculé de même par la méthode rigoureuse dont j'ai donné le détail en rendant compte de mon observation, je trouve les résultats suivans pour 7^h 12′ 6″ à Brest; angle horaire de Vénus 107^d 51′ 56″, déclinaison 22^d 38′ 43″, hauteur apparente 5^d 43′ 19″, angle parallactique 39^d 26′ 28″, angle du vertical avec la ligne du lieu vrai de Vénus 5^d 9′ 17″, & avec la ligne du lieu apparent 5^d 16′ 51″,7.

La parallaxe de hauteur 22″,515; la distance vraie 15′ 39″,92; la distance apparente 15′17″,5; la distance au milieu de l'éclipse 2^h 59′ 22″,4; &, comme la vraie distance au moment du contact, vu du centre de la Terre, étoit 2^h 51′ 58″,4; l'effet de la parallaxe pour Brest est donc 7′ 24″, tandis qu'il étoit pour Paris 7′ 26″,4: donc l'effet est plus grand à Brest qu'à Paris de 2″,4, ce qui ne diffère pas sensiblement de ce que j'ai trouvé par la simple figure.



MÉMOIRE

Dans lequel on démontre l'action du Poumon sur l'aorte, pendant le temps de la respiration, & où l'on prouve que dans l'enfant qui vient de naître, le poumon droit respire avant le gauche.

Par M. PORTAL.

SI l'on jugeoit de la perfection des Sciences, par le nombre & le rang des Savans qui les ont cultivées, on croiroit que tous les objets que l'Anatomie & la Physiologie présentent, sont épuisés. Mais dans la vaste carrière des Sciences, quelque battue qu'elle soit, on voit toujours paroître mille sujets qui piquent notre curiosité, & qui avoient échappé aux yeux de nos prédécesseurs.

Ce n'est pas en recherchant les causes des phénomènes, que l'on parvient à les connoître ; c'est en suivant la Nature dans sa marche, qu'on la force à se dévoiler. J'étois depuis long-temps occupé à chercher la cause de l'inégalité des bronches ; non-seulement le pourquoi me sembloit nouveau, mais encore la question d'Anatomie me paroissoit peu connue.

Pour dissiper mes doutes, je consultois en vain les descriptions & les planches des Anatomistes ; la plupart n'avoient pas indiqué cette inégalité ; les autres étoient en contradiction avec leurs contemporains, souvent avec eux-mêmes. Je pris pour lors le parti de ne m'en rapporter qu'à mes recherches ; j'ouvris le vrai livre de la Nature : je consultai le cadavre, je fis plusieurs expériences sur les animaux vivans. Une découverte conduit ordinairement à une autre ; & de l'examen scrupuleux des organes renfermés dans la poitrine, j'ai tiré une description exacte des bronches ; j'ai sur-tout aperçu la connexion de la bronche gauche avec la crosse de l'aorte. Les animaux m'ont présenté un phénomène qui fait le principal sujet de ce Mémoire ; je vais donner la description des bronches.

La trachée-artère parvenue entre la ſeconde & la troiſième vertèbre du dos, ſe diviſe en deux branches, appelées par les Anatomiſtes, *bronches*, par rapport aux uſages que ces canaux rempliſſent dans l'économie animale.

Les bronches diffèrent entre elles par leur groſſeur, leur longueur & leur direction ; la droite eſt environ d'un quatrième plus groſſe que la gauche, & celle-ci eſt plus longue d'un cinquième.

La bronche gauche eſt beaucoup plus inclinée que la droite ; elle eſt en même-temps plus poſtérieure.

La direction de ces canaux ſouffre quelques variétés par rapport aux âges ; le fœtus qui n'a point reſpiré, a la bronche gauche plus inclinée, plus poſtérieure, que l'enfant venu au jour ; la bronche droite dans l'enfant venu à terme, ſe trouve un peu plus élevée qu'elle n'étoit avant la naiſſance de l'enfant.

Cette deſcription, qui eſt conforme à la Nature, ne ſe trouve dans aucun livre d'Anatomie ; les uns indiquent certains points, & en omettent d'autres auſſi eſſentiels. M. Lieutaud a parlé du changement de poſition dans les bronches, lorſque l'air diſtend les poumons ; mais il n'a point parlé des différentes capacités de ces tuyaux *aérifères*. On voit dans les planches de Cowper la bronche droite plus inclinée, plus longue, & moins large que la gauche, ce qui rentre dans l'ordre naturel ; mais les bronches ſont dans le même plan, ce qui n'eſt point dans l'homme, puiſque la bronche droite dans l'adulte eſt plus antérieure que la gauche.

Un autre reproche qu'on peut faire à Cowper, c'eſt de n'avoir point indiqué dans ſa deſcription, la différente poſition, l'étendue & l'inclinaiſon des bronches. Il ſemble que le Peintre ait été au-delà des vues de cet Anatomiſte.

Ce que le Peintre de Cowper a obſervé, a été repréſenté par le Peintre dont M. Haller s'eſt ſervi pour faire des planches ſur le poumon & ſur le cœur ; ces planches ſont inſérées dans ſes Opuſcules d'Anatomie ; dans l'explication de la figure, M. Haller n'a nullement indiqué les objets qui ſont le ſujet de nos recherches. Cependant M. Haller entre ailleurs dans des détails plus longs ; dans ſon chapitre ſur la reſpiration, il dit, en parlant de la bronche gauche, *ſiniſter longior, obliquior, idemquè aliquanto gracilior eſt.*

Ce grand Physiologiste ne dit point, comme M. Lieutaud, que la bronche gauche est placée plus en avant que la droite.

Ce changement de direction, ignoré de la plupart des Anatomistes, a donné lieu à beaucoup de méprises. On voit dans les Tables Anatomiques de Verreyen, de ceux qui l'ont copié, ou qu'il a copiés lui-même, les bronches dans le même plan, & au même degré d'inclinaison, & de la même grosseur. M. Winslow & d'autres, ont omis de parler de ces différences de bronches, mais elles n'ont pas échappé aux yeux de M. Senac. Il représente dans ses planches sur le cœur, la bronche gauche plus inclinée que la droite; l'inclinaison qu'on a donnée à la bronche gauche est telle qu'on l'observe dans l'adulte; mais dans le fœtus, elle approche plus de la perpendiculaire, & elle est plus postérieure. Cependant si la planche que j'indique est exacte, la description que M. Senac en donne est infidèle.

Il faut donc, pour avoir une idée exacte des bronches, recueillir les différentes descriptions que les Anatomistes ont données de ces vaisseaux; les uns fixent notre attention sur certains objets, les autres sur quelqu'autre; & c'est en réunissant les idées éparses dans une multitude d'ouvrages, qu'on peut se former une véritable idée des vaisseaux aëriens.

Les premières bronches ont, comme la trachée-artère, des anneaux cartilagineux, avec cette différence qu'ils ne sont pas tronqués postérieurement; ce sont de véritables cercles fixés dans leur place, par un ligament très-élastique dont la couleur est d'un blanc tirant sur le rouge. Quelques Anatomistes séduits par cette couleur, ont regardé cette enveloppe comme musculaire, & M. Haller a adopté ce sentiment.

Ce ligament est composé de deux plans de fibres; ces plans se joignent entre les anneaux, & se divisent en s'écartant pour recevoir les cartilages qui les recouvrent. Bartholin a connu le ligament & le double plan de fibres dont il est composé; selon cet Anatomiste, la lame externe est un prolongement de la plèvre, l'externe est la continuation de la membrane qui tapisse la bouche.

Je ne donnerai point à ces lames membraneuses la même origine. Je crois qu'elles sont d'une structure bien différente de la

plèvre & de la membrane qui revêt la bouche ; on ne peut d'ailleurs démontrer leur continuité, aussi je les regarde comme purement appartenantes aux bronches : entre les deux lames de la membrane, il y a, selon le même Auteur, des ligamens propres qui s'implantent aux cartilages : ces ligamens n'existent point : on dégage les cartilages de leurs enveloppes, en faisant long-temps macérer les bronches dans l'eau bouillante, ou même dans l'eau froide ; la membrane reste dans son entier, ce qui fournit une preuve complète de la continuité de la membrane ligamenteuse. M. Winslow s'étoit formé une autre idée sur la structure de la trachée-artère & des bronches ; il dit que les cerceaux sont liés par des ligamens particuliers qui se terminent chacun aux cartilages voisins : l'observation anatomique que je viens de rapporter pour appuyer mon sentiment, suffiroit seule pour détruire celle qu'avoit adoptée ce grand Anatomiste ; mais je puis en trouver une autre dans la manière dont se fait l'ossification de cette partie ; il n'y a souvent que la membrane extérieure qui s'ossifie : on trouve pour lors les cartilages dans leur intégrité, quoique toute la trachée-artère paroisse ossifiée.

Les bronches sont tapissées intérieurement d'une membrane dans laquelle on voit plusieurs lignes longitudinales parallèles les unes aux autres ; mais outre les replis longitudinaux, il en est un autre qui mérite une très-grande attention ; ce repli se trouve dans le point où la trachée-artère fournit la bronche gauche ; il est en partie formé par la membrane, & en partie par le premier cartilage de la bronche qui est poussé dans l'intérieur du canal ; cette position du cartilage provient de l'inclinaison du conduit auquel il appartient ; & comme cette inclinaison varie, cette duplicature est plus ou moins saillante dans les différens âges de la vie : la bronche gauche est plus inclinée dans le fœtus qui n'a pas respiré, & ce repli est plus élevé : le contraire arrive, lorsque le poumon droit reçoit l'air ; alors la bronche droite se relève, & la duplicature diminue : elle disparoîtroit totalement, si la bronche formoit avec la trachée-artère, un angle parfaitement droit ; cette duplicature est placée entre les bronches, comme les éperons d'un pont des rivières le sont entre les arches différentes qui le composent.

La bronche droite flotte librement dans la cavité de la poitrine qui

qui la reçoit : aucun obſtacle ne s'oppoſe aux différens mouvemens que l'air ou l'abaiſſement des côtes lui fait produire. Elle s'élève librement lorſque le poumon qui lui répond, ſe dilate, & elle s'abaiſſe avec une égale facilité lorſque les poumons s'affaiſſent ; il n'en eſt pas de même de la bronche gauche, l'artère-aorte l'embraſſe exactement : il faut même que le vaiſſeau par où paſſe la plus grande quantité de ſang, obéiſſe, cède aux différens mouvemens qu'exécute la bronche ſur laquelle elle appuie.

La connexion de l'aorte avec la bronche, eſt connue de quelques Phyſiologiſtes. Il eſt ſurprenant qu'ils n'aient pas réfléchi ſur les effets que ces deux vaiſſeaux doivent produire l'un ſur l'autre; l'aorte trop diſtendue, peut comprimer la bronche, & empêcher l'air de pénétrer le poumon gauche pour le diſtendre ſuffiſamment.

La bronche dilatée par l'air, ou relevée par la même cauſe, en preſſant à ſon tour l'aorte, peut donner lieu aux palpitations de cœur les plus violentes & à un nombre infini d'autres maladies dont il ſeroit hors de propos de faire l'énumération. Dans un homme attaqué d'un anévriſme à la croſſe de l'aorte, & qui avoit reſſenti la plus grande difficulté de reſpirer, je trouvai la bronche gauche très-rétrécie par la compreſſion que l'aorte exerçoit ſur elle ; & dans le cadavre d'un aſthmatique, dont le pouls avoit été extraordinairement irrégulier, je vis le poumon gauche rempli de tubercules & la bronche du même côté, qui, par ſon élévation contre nature, comprimoit le bord concave de la croſſe de l'aorte.

Pour jeter un plus grand jour ſur la cauſe des dérangemens qui peuvent ſurvenir dans ce cas, il eſt néceſſaire que j'entre dans quelques détails anatomiques.

L'aorte dans le fœtus qui n'a point reſpiré, eſt très-inclinée de devant en arrière, & un peu ſur le côté de la bronche; car, outre que la bronche gauche qu'elle accompagne toujours eſt plus en arrière à cet âge, qu'elle ne l'eſt dans l'enfant qui a reſpiré, le thymus qui remplit une partie de la poitrine, concourt encore à la porter en arrière. M. Lieutaud a déjà fait cette remarque dans ſon troiſième Mémoire ſur le cœur, inſéré dans le volume de l'Académie Royale des Sciences, *année 1754*.

L'aorte change de poſition lorſque l'air pénètre l'intérieur du

poumon gauche; la bronche en s'élevant, élève en même-temps l'aorte; & comme la bronche, lorſqu'elle ſe relève ſe porte en avant, l'artère la ſuit auſſi dans ſes différens mouvemens; le thymus en s'effaçant, laiſſe à la bronche un plus grand eſpace pour exécuter ſes mouvemens. J'ai ſoumis à l'expérience pluſieurs animaux vivans; les chats, les chiens, n'ont point été épargnés; & après pluſieurs ouvertures d'animaux, tant de ceux qui n'avoient point reſpiré, que de ceux qui avoient déjà reçu l'air dans leurs poumons, j'ai toujours vu l'aorte plus en arrière dans la poitrine de ceux qui n'avoient pas reſpiré que dans ceux qui avoient déjà eu les poumons dilatés par l'air.

Ces recherches ſur les changemens qui arrivent dans les organes de la poitrine, me donnèrent lieu à de nouvelles réflexions. Je fus curieux de ſavoir ce qui ſe paſſoit dans le temps de la reſpiration: voici ce que j'ai obſervé, & que tout Anatomiſte peut apercevoir s'il veut ſe donner la peine de le rechercher ſur les animaux vivans. Après avoir levé le ſternum d'un chien vivant, j'ai ſoufflé dans la trachée-artère, par le moyen d'un tuyau de verre que j'avois introduit dans le canal aërien, à la faveur d'une ouverture pratiquée au-deſſous du larynx: toutes les fois que le poumon gauche entroit en dilatation, je voyois la bronche gauche s'élever avec l'aorte; au contraire, ces deux canaux s'abaiſſoient lorſque j'exprimois l'air des poumons. Je conclus, d'après cette expérience, que l'artère-aorte eſt élevée & portée en avant à chaque inſpiration, & qu'elle eſt portée en arrière & en bas lorſque le poumon s'affaiſſe. Cette remarque de Phyſiologie me paroît de la plus grande importance pour la pratique de la Médecine. Non-ſeulement on apprend juſqu'à quel point les maladies du cœur & des vaiſſeaux ſanguins, peuvent agir ſur les poumons, mais encore on voit clairement que les vices de la reſpiration doivent ſe faire ſentir ſur tout le ſyſtème vaſculeux; car les inſpirations trop grandes, trop ſouvent répétées, doivent accélérer ou retarder la circulation de nos humeurs; ce qui ne peut ſe faire ſans un dérangement de fonctions. On remarque que dans certaines affections du poumon, les artères battent de temps en temps, comme par *ſoubreſaut;* ce qui s'accorde aſſez avec la théorie que nous venons d'expoſer.

Mes recherches en étoient au point que je viens d'indiquer, lorſqu'un jour, conduit par un eſprit de doute & d'incertitude, je voulus répéter les expériences que j'avois déjà faites; j'ouvris le thorax d'un petit chat mort depuis peu, j'aperçus une différence dans la couleur des lobes du poumon, le droit étoit d'un rouge-pâle, la couleur du gauche étoit plus foncée, elle étoit d'un rouge-obſcur; cette différence de couleurs me fit préſumer que le poumon droit avoit reçu l'air avant le gauche; je jetai ces poumons dans de l'eau de fontaine, le droit ſurnagea, tandis que le gauche ſe précipitoit au fond du vaiſſeau; je me défiois de ces ſignes, quoique ſuffiſans pour me convaincre. J'ouvris, quelques jours après, la poitrine de trois chiens qui avoient reſpiré, j'enlevai leurs poumons qui ſurnagèrent tous: les poumons de pluſieurs chats qui n'étoient pas venus à terme, & qui n'avoient pas reſpiré; ceux de trois petits chiens, dont la mère n'avoit pas encore mis bas, étant jetés dans l'eau, s'y enfoncèrent; ayant ſoufflé dans le poumon droit d'un petit chien qui n'avoit pas encore reſpiré, ce poumon ſurnagea, malgré les efforts que j'avois faits pour en exprimer l'air, au lieu que le gauche ſe précipita au fond de l'eau.

Toutes ces expériences auroient pu, je crois, ſuffire pour conclure que le poumon droit reſpiroit avant le gauche; mais comme en matière de Phyſique, on ne ſauroit agir avec trop de précaution quand on procède à des expériences, & trop réſervé quand il faut tirer des concluſions ſur ce que l'on obſerve, je voulus vérifier ce fait que je croyois déjà très-vraiſemblable.

Un chat tué deux ou trois minutes après ſa naiſſance, m'offrit les mêmes circonſtances que le premier; le poumon droit étoit d'un rouge-blanc, le gauche d'un rouge-obſcur; le premier rempliſſoit preſque toute la capacité droite de la poitrine, l'autre étoit tout ramaſſé & ridé, la poitrine préſentoit un grand vide, le poumon droit plongé dans un ſeau d'eau de rivière ſurnagea, au lieu que le gauche s'enfonça: je tirai ce dernier hors de l'eau, & après avoir ſoufflé dans l'intérieur des bronches, je le plongeai dans l'eau; il ſurnagea auſſi-bien que l'autre. De l'Anatomie comparée, je paſſai à celle d'un fœtus humain: on m'en procura un qui n'étoit pas venu à terme & qui n'avoit pas reſpiré; ayant ſoufflé dans la

trachée-artère, je vis clairement que l'air gonfloit plutôt le poumon droit que le gauche ; il sembloit que l'air n'entroit dans ce dernier que par reflux.

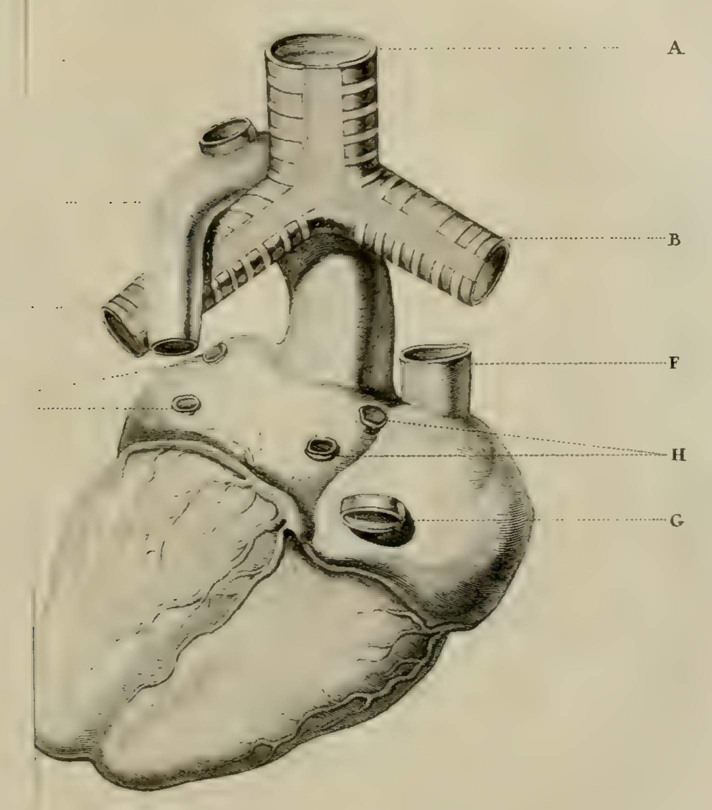
On doit avouer que ces expériences ne réussissent pas toujours; la direction que l'on donne au tuyau dont on se sert pour souffler, les obstacles qui se rencontrent quelquefois dans le poumon droit, s'opposent à l'entrée de l'air; le souffle entre pour lors dans le gauche plus tôt que dans le droit. Je cherchois un jour à découvrir la cause qui m'avoit fait manquer mon expérience, & je trouvai des grumeaux de sang dans la bronche droite ; je l'ai trouvée une autre fois remplie de mucosité.

On fait aisément ces expériences sur les animaux, mais il est difficile d'avoir des fœtus humains pour s'assurer de la vérité ; il est rare d'avoir des enfans qui n'aient vécu que deux ou trois minutes ; ou ils ont vécu plus long-temps, ou bien ils sont venus morts. On trouve cependant un fait dans un Mémoire de M. Petit de Namur, inséré dans le Recueil de l'Académie Royale des Sciences *(année 1733)*, qui m'est trop favorable pour le passer sous silence. M. Petit, en donnant la description d'un fœtus humain monstrueux, s'exprime ainsi :

« Les poumons étoient différens l'un de l'autre; celui du côté
» droit étoit rouge, pâle, gonflé, comme sont ordinairement les
» poumons qui ont respiré; le côté gauche étoit d'un rouge-brun,
» comme sont ceux des fœtus qui n'ont pas encore respiré : ce qui
» marquoit assez que l'enfant avoit respiré par le poumon droit,
» dans lequel l'air étoit entré, mais qu'il n'avoit pu s'introduire
» dans le poumon gauche. M. Petit donne ensuite la description des bronches; il ne parle point de l'inégalité de ces conduits ».

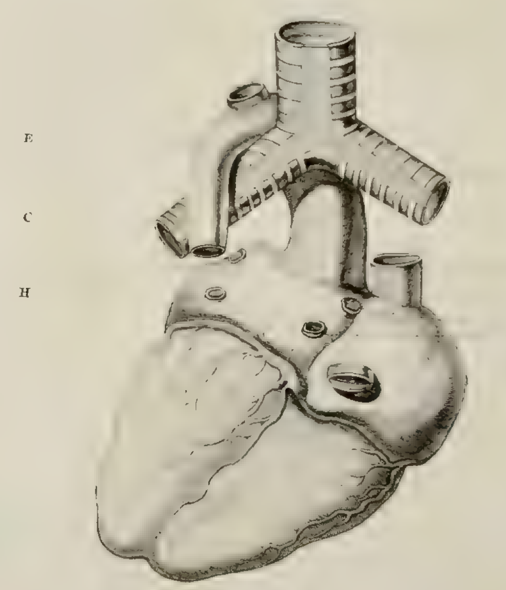
Après tout ce que je viens de rapporter, il me paroît qu'on peut conclure que dans la première inspiration, & peut-être dans toutes les autres de la vie, l'air pénètre le poumon droit avant le poumon gauche. L'expérience vient à l'appui de ce sentiment, & l'on peut rendre raison de cette particularité qui dépend de la structure même des parties : la bronche droite est plus grande, plus ample que la gauche; l'air entrant pour la première fois dans la poitrine, a moins de peine à pénétrer dans l'intérieur

stérieure du Cœur, de l'Aorte et de la Trachée Artere



inférieure de la Trachée Artere . . . .
e droite . . . .
he gauche . . . .
osse de l'Aorte . . . .
ave Supérieure . . . .
de la Veine Cave inférieure . . . .
atre Troncs des Veines pulmonaires . . . .

Face postérieure du Cœur, de l'Aorte et de la Trachée Artère



A . *Portion inférieure de la Trachée Artere* . . . . . .

B . . *Bronche droite* . . . .

C . *Bronche gauche* . . . .

E . . *La Crosse de l'Aorte* . . . .

F . . *Veine Cave Supérieure* . . . .

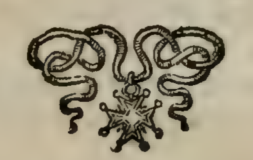
G . . . *Orifice de la Veine Cave inférieure* . . . .

HH . *Les quatre Troncs des Veines pulmonaires* . . . .

J. I del. et sc.

de ce tuyau que dans le gauche ; en outre, la bronche gauche étant plus longue & plus étroite, l'air a plus de frottemens à essuyer contre ses parois, que contre celles de la droite dont la surface est beaucoup plus étendue : la bronche gauche est en partie bouchée par le petit repli de la membrane interne des bronches, & par la portion interne du poumon; de plus, l'aorte & le canal artériel qui sont remplis de sang en comprimant la bronche gauche, diminuent sa capacité, & forment un obstacle qui retarde l'entrée de l'air.

Quand on connoît ce mécanisme, on peut aisément expliquer pourquoi le canal artériel s'efface peu après la naissance ; la bronche gauche en s'élevant, éloigne l'aorte de l'artère pulmonaire, distend le canal artériel ; & comme elle est placée sous ce même canal, elle ne peut se relever qu'en le comprimant. Ceux qui sont par état obligés de faire des rapports en Justice, doivent faire attention aux expériences que j'ai rapportées : le poumon droit d'un enfant qui n'avoit vécu que très-peu de temps, plongé dans l'eau, surnageoit, tandis que le poumon gauche s'enfonçoit ; & si l'on portoit son jugement d'après une seule épreuve, l'on pourroit tomber dans la plus fâcheuse méprise.



OBSERVATIONS BOTANICO-MÉTÉOROLOGIQUES,

Faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers en Gâtinois, pendant l'année 1768.

Par M. DU HAMEL.

AVERTISSEMENT.

LES Obſervations météorologiques ſont diviſées en ſept colonnes, de même que les années précédentes. On s'eſt toujours ſervi du thermomètre de M. de Reaumur, & on part du point zéro, ou du terme de la glace: la barre à côté du chiffre indique que le degré du thermomètre étoit au-deſſous de zéro; quand les degrés ſont au-deſſus, il n'y a point de barre; o déſigne que la température de l'air étoit préciſément au terme de la congélation.

Il eſt bon d'être prévenu que dans l'Automne, quand il a fait chaud pluſieurs jours de ſuite, il gèle, quoique le thermomètre, placé en dehors & à l'air libre, marque 3 & quelquefois 4 degrés au-deſſus de zéro; ce qui vient de ce que le mur & la boîte du thermomètre ont conſervé une certaine chaleur; c'eſt pourquoi on a mis dans la ſeptième colonne, *Gelée.*

Les Obſervations ont été faites à huit heures du matin, à deux heures après midi, & à onze heures du ſoir.

Nota. Les Obſervations du baromètre, à commencer du premier de ce mois, ont été faites ſur un baromètre callé ſur celui de l'Obſervatoire, qui eſt 3 lignes plus haut que celui dont nous nous ſervions les années précédentes.

JANVIER 1768.

Jours du Mois.	Vent.	Thermomètre. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		État du ciel.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouc.*	*lign.*	
1	E.	−6	−4	−4	26.	9	couvert, neigeux & venteux.
2	N.	−6	−8	−11	27.	6	beau & grand vent.
3	N.	−12	−9½	−11	27.	8	beau ſoleil, & venteux.
4	N.	−11	−10	−13	27.	9	*idem.*
5	N. E.	−11½	−12½	−11½	27.	9	beau ſoleil.
6	N. E.	−13½	−9	−½	27.	6	beau avec brouillard en l'air.
7	E.	−2½	−½	−1	27.	5	variable avec brouillard.
8	E.	−½	−½	0	27.	3	brouillard & givre ſur les murs.
9	E.	−½	−2½	2	27.	1	variable avec pluie.
10	S.	2	2½	2	27.	5	couvert & bruine, grande humidité.
11	S.	1	3½	2½	27.	6	variable avec pluie.
12	S. E.	1	3	2	27.	9	couvert & brouillard.
13	E.	2½	4½	1	26.	7	grand brouillard.
14	S.	1	7	3	27.	5	beau ſoleil.
15	E.	2½	9	6	27.	6	beau avec nuages.
16	N. E.	4½	4½	4	27.	9	couvert & pluvieux.
17	N. E.	3	6½	4	27.	9	variable avec bruine.
18	S.	3½	6	4½	27.	6	pluvieux & venteux.
19	S.	1	3½	2½	27.	7	couvert & pluvieux.
20	S. O.	2	4	2½	27.	4	grande pluie & grand vent. *à midi* 27. 2.
21	N.	1	1½	0	27.	8	couvert.
22	S.	−1	2	1½	27.	4	beau avec nuages.
23	S. O.	½	3	0	27.	4	grand vent froid & nébuleux.
24	S. O.	0	3	4	27.	4	nébuleux, venteux, pluvieux.
25	S.	4	7	7	27.	7½	*idem.*
26	O.	6	7½	2	27.	10½	variable avec pluie.
27	E.	0	7	3	27.	8½	grand brouillard le matin, le ſoir beau.
28	E.	1	8½	4½	27.	8	beau temps; petite gelée blanche.
29	E.	3	9	4	27.	9	beau temps.
30	E.	2	8	3	27.	9	*idem.*
31	N. E.	0	7	2	27.	7½	beau temps, gelée à glace.

Eau de pluie du 1 au 31, 1 pouce 6 lignes $\frac{6}{16}$.

Ce mois a été très-froid jusqu'au 6 ; le 5, le thermomètre descendit à 13 degrés & demi au-dessous de zéro ; ce qui est près d'un degré de moins qu'en 1709 ; un puits qui a cinquante-cinq pieds de profondeur a gelé de l'épaisseur de deux lignes ; dans un autre, qui n'a que trois ou quatre toises, les seaux ne pouvoient rompre la glace : cependant la Terre n'a pas été gelée aussi profondément que l'année dernière, parce qu'elle étoit plus couverte de neige & que la gelée n'a pas duré aussi long-temps ; mais dans les étangs & dans la rivière d'Essonne où il n'y avoit qu'une nappe d'eau, la gelée ayant pénétré dans la vase, tout le poisson gros & petit, les anguilles, les écrevisses ont péri. Lorsque le dégel est venu, la fonte des neiges a rempli le lit de la rivière, & les bouches des sources qui étoient taries depuis long-temps se trouvant couvertes d'eau, elle y entroit & s'y perdoit comme dans des gouffres.

Il y avoit peu de neige sur les sommières, c'est pourquoi les perdrix & le gibier ont peu souffert, mais on en a beaucoup pris au collet.

Les blés étoient très-épais, & ils se sont montrés bien verds lorsque la neige a été fondue.

On a vu très-peu de corneilles pendant l'hiver ; la maladie des dindons dont on a parlé dans le Journal de l'année 1767, a fini pendant ce mois, parce que tous ceux qui en étoient attaqués étoient morts, cette contagion ne s'étant pas étendue sur toute l'espèce. Cette maladie est, je crois, dans le genre des érésipèles ; d'abord les ganglions de la tête se durcissoient, la tête s'enfloit, les yeux se fermoient ; les ganglions sont venus à suppuration, & il s'est formé des chancres dans le bec ; & à plusieurs, les yeux sont tombés en pourriture. On leur a lavé la tête avec de la lessive ou de l'eau vulnéraire, & gargarisé le bec avec du vinaigre, du sel & du poivre, le tout inutilement ; mais il est bon d'observer que presque tous les mâles sont morts, & qu'il y a eu beaucoup moins de femelles qui aient été attaquées de la maladie ; de quarante-huit dindons de notre basse-cour, il en est mort vingt-cinq ou vingt-six.

Quelques-uns aussi sont morts subitement sans paroître malades ; on les trouvoit morts le matin sous leurs jucs ; j'en ai fait ouvrir, &

& j'ai remarqué que la membrane intérieure du gésier étoit sphacelée & se déchiroit comme de l'amadoue, mais il y a des raisons de doute que ce soit la vraie cause de la mort de ces animaux; on en conviendra si l'on consulte la note qui est au bas de cette page *.

En général, les Fermiers ont perdu cette année la moitié de leurs poules, quelques-uns même toutes leurs volailles, qui mouroient en langueur; entr'autres d'une espèce de diarrhée que les Fermières appellent la *foire blanche*.

Les hommes ont été affligés pendant l'automne de dyssenteries très-dangereuses & de fièvres malignes.

Les rhûmes, accompagnés de fièvre qu'on appelle la *grippe*; ont été épidémiques pendant ce mois; presque personne n'en a été exempt.

* *Voy. le* Volume des Mémoires de l'Académie, *année 1752, page 297*, où il est question du premier Mémoire sur la digestion des oiseaux, par M. de Reaumur; il est dit en parlant de la membrane interne des gésiers:

« Enfin ce que cette membrane » peut perdre, ce qui lui est enlevé, » est réparé, s'il a besoin de l'être, » comme le sont les calus des mains » de ceux qui travaillent à des ou- » vrages de force. M. Hérissant soup- » çonne plus; il a ouvert des gésiers qui lui ont donné de la disposition « à penser que la membrane intérieure « se renouvelle comme l'estomac des « écrevisses, mais par parties; il a vu « & m'a fait voir des endroits où des « lambeaux manquoient à cette mem- « brane, & d'autres morceaux de « membranes formés par-dessous, prêts « à avoir la consistance de l'ancienne « membrane; il n'est pas rare de trou- « ver des gésiers auxquels cette mem- « brane ne tient presque point, & il « n'en est pas dont il ne soit aisé de la « détacher ».

FÉVRIER.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	N. E.	1	7	2 ½	27.	7 ½	variable ſans pluie.
2	N. E.	½	4	1	27.	7	variable avec pluie.
3	N. E.	— 1 ¼	2 ½	— 2	27.	9	beau ſoleil.
4	N.	— 3	— 1	— ½	27.	10	couvert & brouillard.
5	N. E.	0	2 ½	— 1	28.	1	beau & venteux avec nuages.
6	N. E.	— 2 ½	2	1	28.	2	beau avec nuages.
7	N. E.	1	2 ½	1 ½	28.		couvert.
8	S.	½	3 ½	— 1 ½	27.	9	beau & couvert.
9	S.	— 1 ½	1 ½	0	27.	8	*idem.*
10	S.	3 ½	9 ½	7	27.	7	couvert & venteux.
11	S.	½	10 ½	7 ½	27.	8	beau & venteux avec nuages.
12	S.	6	10	5	27.	8 ½	beau avec nuages.
13	S.	2 ½	7 ½	4	27.	10	gélée, brouillard, beau avec nuages.
14	E.	2 ½	11 ½	3 ½	27.	9	beau avec nuages.
15	S. O.	3	10 ½	6 ½	27.	9	beau & venteux avec nuages.
16	N.	7	9 ½	4	27.	9	variable avec bruine.
17	E.	5	6	4 ½	27.	9	*idem.*
18	E.	1	7	6 ½	27.	8 ½	couvert, venteux & bruine.
19	S.	5 ½	6 ½	5	27.	11 ½	*idem.*
20	S.	3	8 ½	5	28.		beau & couvert.
21	S.	4 ½	9	7	27.	11	variable avec pluie.
22	E.	6 ½	10 ½	7 ½	27.	9	couvert.
23	S. O.	6	11 ½	8 ½	27.	9	beau & venteux avec nuages.
24	S. O.	7	9	7 ½	27.	10	variable avec pluie & éclairs.
25	S.	6	8	6 ½	27.	9	beau & venteux avec nuages.
26	S. O.	2	9	4	28.	1	beau avec nuages.
27	S.	4	8	7 ½	28.	1	beau & couvert.
28	S.	6 ½	8 ½	7 ½	28.	½	couvert & petite pluie.
29	S.	6	11	6	27.	10	beau avec nuages.

Eau de pluie, du 1 au 29, 6 lignes $\frac{9}{11}$.

Ce mois a été assez doux ; il est tombé peu d'eau ; cependant la terre a toujours été rafraîchie par les petites rosées, & on a beaucoup travaillé pour les mars, tant à labourer la terre qu'à semer les avoines.

Le 8, les petits ellebores jaunes ont fleuri quelques jours avant la perce-neige.

Les Vignerons, en taillant la vigne, trouvoient la moëlle du sarment noire, mais l'œil étoit verd.

Les blés étoient très-verts, un peu trop épais, & il y avoit beaucoup d'herbes que la neige avoit conservées, ainsi que les blés.

MARS.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	*Degrés.*	*Degrés.*	*pouc.*	*lign.*	
1	S.	6½	12	6	27.	9¼	beau soleil.
2	O.	4½	10	6½	27.	9	couvert & nébuleux.
3	N. E.	2	3	−3	28.	1	venteux avec un peu de neige.
4	N. E.	−5	1	−1	28.	1½	beau & venteux.
5	N. E.	−3	2½	−2	27.	11	*idem.*
6	N. E.	−3	2½	−2½	27.	10	beau & venteux avec nuages.
7	N. E.	−3½	3	−1½	27.	11	*idem.*
8	N. O.	−4	2	½	28.		variable avec neige.
9	N. E.	−1	3½	−1	28.		variable avec grêle.
10	N. E.	−1	−1	−3½	28.	1	beau & venteux avec nuages.
11	N. E.	−5½	1¼	0	28.		beau & venteux.
12	N.	½	4	2	27.	11½	couvert & venteux.
13	N. O.	3	7	3½	27.	10½	variable avec ondées.
14	O.	4	8	4½	27.	½	couvert & venteux.
15	O.	4½	8	1½	27.	9	beau & venteux.
16	O.	4	8½	9½	28.		beau & couvert.
17	S.	4	11	6	27.	11	beau temps.
18	O.	3	10	5	28.	1	beau & venteux avec nuages.
19	N. E.	−1	8	2	28.	1	beau fixe *(le soir 28p 2l)*
20	N. E.	−1½	2	4	27.	10	beau avec nuages.
21	N. O.	4½	8	−1	27.	11	venteux & nébuleux.
22	N. E.	−3	2	−3	28.	1	beau & grand vent forcé.
23	N. E.	−4	4	−1	28.		beau & grand vent.
24	N. E.	−2¼	9	3	28.		beau & venteux.
25	N. E.	−½	10	3	27.	11	beau avec nuages (25–30).
26	N. E.	0	11	4½	27.	11	
27	N. E.	2½	13	5	27.	11½	
28	N. E.	2	14½	8	27.	11½	
29	N. E.	3	16	8	27.	11	
30	N.	3½	13	3½	27.	11	
31	N.	2½	6½	4	27.	10	couvert & brouillard sec.

Eau de pluie, du 1 au 31, 1 ligne $\frac{4}{24}$.

Ce mois a été beau, froid & ſec; on a ſemé dans les premiers jours les avoines, mais on a été obligé de diſcontinuer, parce que la terre étoit trop sèche.

Le 1.er les crapauds commencèrent à ſe promener & à ſe faire entendre; ce qui annonce ordinairement la venue du printemps.

Le 15, les oyaux & les jacintes étoient en fleur.

Le 20, on commença à retourner quelques avoines, qui, ayant été ſemées de très-bonne heure, avoient été priſes de la gelée du 11 de ce mois, mais il y en avoit peu en cet état dans ce pays-ci.

Le 25, toutes les terres à mars étoient labourées; on attendoit avec impatience de la pluie pour mettre en terre les légumes & finir les avoines que les ſécheresses avoient empêché de ſemer.

Les eaux étoient toujours très-baſſes dans la rivière d'Eſſonne & dans les puits; les ſources ne pouſſoient point.

AVRIL.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	N. E.	2 ½	9 ½	6	27.	10	beau avec nuages.
2	N. E.	2 ½	10	5	27.	10	beau avec vent.
3	E.	4	13 ½	7	27.	9	beau & nébuleux.
4	S.	3	13	7	27.	7	variable avec pluie.
5	E.	4	13 ½	9 ½	27.	6	beau & nébuleux.
6	S. E.	9	15	9 ½	27.	6	variable avec pluie & éclairs.
7	N.	9	13	9 ½	27.	4 ½	variable avec pluie.
8	N.	4	6	5	27.	7	couvert & vent froid.
9	E.	3	9	3	27.	9	couvert & nébuleux.
10	N. E.	1 ½	10	3	27.	10	beau & nébuleux. (à 5^h du mat.— 1 ^{l} ½)
11	N. E.	1 ½	9	3	28.	1	beau temps. (à 5^h — 1 ^{l} ½)
12	E.	3	13	6	28.		beau temps, gelée blanche.
13	S. E.	3 ½	6	11	27.	10	beau temps.
14	S. O.	9	15	9	28.		beau & nébuleux.
15	S. O.	5	13	8 ½	28.		gelée blanche, nébuleux.
16	S. E.	8	13	10	27.	9	beau avec nuages.
17	N. O.	9	13	8 ½	27.	10	variable avec grand vent de galerne.
18	O.	9	11	7	28.		pluie & grand vent forcé.
19	S. O.	8 ½	11	7	27.	10	variable avec pluie & vent.
20	S.	8 ½	13 ½	10	27.	11	*idem.*
21	S. O.	10	15	10	27.	9 ½	couvert & grand vent.
22	S. O.	9 ½	12 ½	10	27.	7 ½	couvert & pluvieux.
23	N. E.	8	12	9	27.	6 ½	pluvieux.
24	S. O.	9	13	10	27.	10 ½	couvert, pluie & vent.
25	S. O.	8	13	9	27.	9	brouillard, nébuleux & venteux.
26	S. O.	8	12 ½	8	27.	10	beau & venteux avec nuages.
27	O.	7 ½	12	6 ½	27.	9	nébuleux & venteux.
28	S.	6 ½	11	8	27.	7	nébuleux, brouine le ſoir.
29	S.	7 ½	10 ½	7	27.	5	pluvieux.
30	S.	7	11 ½	8	27.	6	pluie, grêle & vent.

Eau de pluie du 1 au 30, un pouce 11 lignes $\frac{11}{41}$.

Le commencement de ce mois a été fort ſec ; ce qui donnoit beaucoup d'inquiétude, car on attendoit de l'eau pour achever de ſemer les avoines ; la fin du mois ayant été humide, on en a profité pour finir les mars & pour rouler le peu d'avoine qui étoit levé.

Les blés étoient très-verts & très-beaux ; mais en général trop épais, parce que les grains de l'année dernière étant menus, il en tenoit une plus grande quantité dans la main des ſemeurs ; le blé a valu pendant ce mois, 25 à 27 livres le ſetier, meſure de Paris ; & l'avoine, 7 livres 5 ſous à 7 livres 10 ſous le ſac ou le ſetier du froment ; il en faut deux pour faire le ſetier d'avoine de Paris.

La vigne commençoit à être en bourre, les pêchers, les poiriers, les pruniers, les ceriſiers étoient hors de fleur ; les pommiers étoient en pleine fleur, & tous les arbres paroiſſoient bien préparés.

Le 1.er on a vu une hirondelle dans la vallée, & le 13 elles ont paru dans la plaine ; le 7, le roſſignol chantoit dans la vallée, mais le 15 on ne l'avoit point encore entendu dans le parc qui eſt ſitué dans la plaine.

Le 13, il a paru une grande quantité de petits hannetons rouges, connus ſous le nom de *hannetons des blés :* ils précèdent ordinairement les vrais hannetons.

Le 14, les tilleuls & les charmilles ont pris une teinte de verdure.

Le 15, le coucou chantoit dans les vallées.

Il a régné une maladie épidémique ſur les volailles ; la crête leur noirciſſoit, & en deux jours elles mouroient : dans une ferme près du château, il en mouroit cinq à ſix par jour.

M A I.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	N.	8	11	7	27.	8½	nébuleux; le vent d'en bas N. les nuages du S. O.
2	E.	6	11	10	27.	8	couvert, pluvieux, gelée blanche; le soir vent N.
3	N. E.	10	15½	10½	27.	7	variable avec petite bruine & éclairs.
4	E.	10	16	10½	27.	11½	beau avec nuages.
5	E.	12½	20	14	27.	10	*idem.*
6	E.	13½	21	11	27.	9	lourd, tonnerre, pluie, brouillard.
7	O.	11	11½	10	27.	10	pluvieux tout le jour.
8	N.	10	16½	11½	27.	11½	beau avec nuages.
9	N. E.	11½	17	8½	28.		beau temps.
10	N. E.	10	16½	11	27.	10	beau & venteux.
11	N. E.	10	18	11	27.	8	beau & grand vent.
12	N. E.	10	18	10	27.	8	beau avec grand vent froid.
13	N. E.	9	13	7½	27.	9½	
14	N. E.	6½	11	7	27.	11	
15	N.	6½	12	7½	27.	11	beau avec nuages & vent froid.
16	N. E.	8½	15	8	27.	10	beau & venteux.
17	N.	8½	13½	9½	27.	7	variable avec bruine & grand tonnerre.
18	S. O.	9	9½	5½	27.	4	variable avec pluie, vent & grêle.
19	S. O.	7½	14	7½	27.	8½	beau avec nuages.
20	S. O.	9	15	11	27.	10	variable & couvert avec petite rosée.
21	E.	12½	17	12	27.	10	beau avec nuages.
22	N. E.	12½	21½	14½	27.	11	beau temps.
23	N. E.	14	20	14	27.	11	
24	N. E.	13½	20½	14½	27.	10½	
25	N.	14½	21	14	27.	10	beau & petite bruine.
26	N. E.	15	20½	10½	27.	10	*idem.*
27	E.	9	15½	10	27.	9½	beau temps.
28	S. O.	12	18	12	27.	7	*idem.*
29	S.	14½	13	11	27.	5	variable avec pluie.
30	S. O.	9½	14	10	27.	6	pluie continue le matin.
31	E.	10	17	9	27.	6	pluie & tonnerre.

Eau de pluie, le 18 par orage, 3 lignes $\frac{6}{24}$; du 1 au 31, 1 pouce 7 lignes $\frac{21}{24}$,

Les

Les premiers jours de ce mois, vers le milieu & à la fin, il eſt tombé de l'eau très-à-propos pour faire lever les avoines & les graines légumineuſes.

Les blés étoient très-beaux dans le Gâtinois ; il n'en étoit pas de même dans la haute Beauce & dans la Picardie ; le blé valoit au marché de Pithiviers 24 à 26 livres le ſac peſant 240 livres, & l'avoine 7 livres à 7 livres 10 ſous.

Il y avoit peu de grappes aux vignes & elles étoient petites ; ce que l'on jugeoit d'avance devoir arriver, parce que, comme nous l'avons déjà dit, la moëlle du ſarment étoit noire, ce qui vient de ce qu'elle avoit été attaquée par le froid de l'hiver.

Les ſainfoins étoient fort bas ; on a commencé à en faucher en fleur pour les vaches le 25, lendemain des fêtes de la Pentecôte.

Il n'y a eu ni hannetons ni chenilles pendant ce mois.

Le 2, il gela blanc ; mais comme la terre étoit humide & la roſée abondante, la gelée tourna en eau, & elle ne fit aucun dommage.

Le 4, l'épine-blanche étoit en fleur ; les fleurs des ceriſiers étoient toutes brouies par le vent, ainſi que celles des ragouminier *; beaucoup de fleurs de pêchers avoient auſſi été endommagées par le vent ou les brouillards du matin au ſoleil-levant.

Il n'y avoit point encore de roſſignols dans le bois, parce que le vent continuel & froid qui avoit régné pendant tout le mois d'Avril les avoit fait réfugier dans les vallées où ils s'étoient établis pour faire leur nid : Le 10, les tourterelles étoient arrivées, & on les entendoit depuis deux jours.

Il y a eu des brouillards ſecs qui, en beaucoup d'endroits, ont rouillé les blés, & ont beaucoup diminué les grandes eſpérances qu'on avoit de faire une pleine récolte ; car nos Fermiers diſoient, avant ces brouillards, que depuis plus de vingt ans ils n'avoient pas vu les blés auſſi beaux dans cette ſaiſon.

* *Ceraſus pumila, Canadenſis, anguſto folio, fructu parvo.*

JUIN.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés	Degrés.	pouc.	lign.	
1	O.	$9\frac{1}{2}$	10	$8\frac{1}{2}$	27.	9	grande pluie après midi.
2	N. E.	$8\frac{1}{2}$	12	10	27.	$10\frac{1}{2}$	variable & couvert ſans pluie.
3	N. E.	10	$15\frac{1}{2}$	10	27.	10	beau temps.
4	N. E.	$9\frac{1}{2}$	15	12	27.	9	beau avec nuages.
5	S. E.	12	19	13	27.	9	beau avec nuages & tonnerre.
6	E.	14	$19\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	27.	$8\frac{1}{2}$	pluie & tonnerre.
7	E.	$14\frac{1}{2}$	18	12	27.	6	variable avec tonnerre ſans pluie.
8	S.	$12\frac{1}{2}$	16	12	27.	6	variable avec petite pluie.
9	S.	13	$12\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$	27.	5	variable avec pluie & vent.
10	S. O.	11	15	12	27.	8	variable avec petite pluie.
11	E.	15	21	16	27.	6	couvert avec nuages & tonnerre.
12	S.	13	14	$12\frac{1}{2}$	27.	$7\frac{1}{2}$	couvert & pluvieux.
13	S.	13	$14\frac{1}{2}$	10	27.	6	grande pluie le matin.
14	S. O.	10	11	9	27.	8	variable avec pluie.
15	S.	$12\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	9	27.	$8\frac{1}{2}$	beau avec nuages.
16	S.	$10\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	11	27.	9	*idem.*
17	S.	$12\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$	12	27.	$8\frac{1}{2}$	pluvieux tout le jour.
18	S. O.	$13\frac{1}{2}$	15	$12\frac{1}{2}$	27.	9	brouillard le matin, pluie & tonnerre après midi.
19	O.	14	16	$10\frac{1}{2}$	27.	11	pluvieux & orageux.
20	S. O.	$11\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	27.	10	beau avec nuages.
21	O.	$10\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	12	27.	$11\frac{1}{2}$	
22	N. E.	$11\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{2}$	12	27.	10	
23	E.	$11\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{4}$	11	27.	$11\frac{1}{2}$	
24	N. E.	$13\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	15	27.	11	beau temps.
25	S.	15	18	13	27.	9	orage de pluie & tonnerre.
26	S.	12	18	14	27.	$8\frac{1}{2}$	variable avec pluie & tonnerre.
27	S. O.	15	$15\frac{1}{2}$	13	27.	6	*idem.*
28	S. O.	12	$14\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	27.	10	grand vent & petite pluie.
29	S. O.	12	17	14	27.	10	beau avec nuages.
30	E.	$14\frac{1}{2}$	20	15	27.	10	beau temps.

Eau de pluie du 1 au 30, 4 pouces 2 lignes $\frac{44}{481}$.

Ce mois peut passer pour froid & humide; les mares ont toujours été pleines d'eau; la terre étoit si molle qu'on a été obligé de discontinuer les labours pendant plusieurs jours, & les chemins étoient aussi mauvais qu'en hiver; on espéroit que ces pluies laveroient les blés qui avoient été rouillés le mois dernier; en effet ils paroissoient avoir peu souffert, & ils étoient encore très-beaux dans nos cantons; mais depuis ce mois jusqu'à la moisson, ils n'ont fait que dépérir.

Ce temps a été très-favorable pour les menus grains, au moins pour les avoines qui n'avoient point été attaquées par les vers; à l'égard des orges, elles étoient très-belles, mais il y a eu des pièces où près d'un quart étoit charbonné.

Le blé a valu pendant ce mois 26 à 30 livres le sac de 240 livres, l'avoine 7 livres 10 sous à 8 livres.

Les sainfoins étoient fort bas, & ils ont été serrés après avoir été mouillés plusieurs fois; aussi sont-ils très-noirs.

Il y avoit très-peu de raisin aux vignes, une partie étoit en verjus, une autre en fleur pendant que d'autres n'étoient pas encore fleuris.

Il n'y avoit ni hannetons ni chenilles.

On a servi pendant tout le mois des fraises, & il y en avoit encore à la fin; il y a eu très-peu de cerises, & elles ont mûri fort tard.

Il y a eu pendant ce mois plusieurs orages avec tonnerre, & le 27 il tomba en plusieurs endroits de la grêle, qui a fait un ravage prodigieux.

Les orangers ont commencé à fleurir vers la fin de ce mois, mais il y avoit peu de fleurs.

JUILLET.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	S. E.	16	25 ½	20	27.	7	beau & chaud.
2	O.	14 ½	17 ½	13	27.	9 ½	orage de vent & tonnerre pendant la nuit.
3	S.	13	15 ½	13	27.	9	variable avec pluie.
4	S. O.	13	16	13 ½	27.	11 ½	*idem.*
5	S. E.	13	18 ½	15	27.	10	beau avec nuages.
6	S.	15	21	16 ½	27.	8 ½	variable avec pluie.
7	S. O.	15 ½	16 ½	14	27.	7 ½	beau avec nuages.
8	S. O.	14	18	14 ½	27.	11	beau avec nuages & tonnerre.
9	S.	15 ½	18 ½	14 ½	27.	9	pluvieux tout le jour.
10	N. E.	12 ½	13	12	27.	9 ½	beau avec nuages.
11	S. E.	12	18	13 ½	27.	11	*idem.*
12	S.	14	19 ½	14	27.	11 ½	couvert.
13	S.	14	18 ½	15 ½	27.	9 ½	pluie & tonnerre.
14	S. O.	14 ½	16	11	27.	9	beau avec nuages.
15	O.	11	18	12 ½	27.	9	*idem.*
16	N. O.	13	18	10 ½	27.	8 ½	variable avec nuages, pluie & tonnerre.
17	S. O.	11 ½	17 ½	12	27.	10	couvert.
18	S.	11 ½	16	13 ½	27.	7	*idem.*
19	S. O.	13	17 ½	11	27.	7 ½	pluvieux par ondées, gros nuages.
20	O.	12 ½	16 ½	13	27.	10 ¼	beau avec nuages.
21	N. O.	12 ½	18	13 ½	28.		*idem.*
22	E.	13 ½	19 ½	14	27.	10 ½	beau temps.
23	E.	14 ½	21 ½	15	27.	9	
24	S. O.	16	24	16 ½	27.	8	
25	S. O.	18	19 ½	14	27.	8 ½	tonnerre la nuit, couvert & venteux.
26	E.	14 ½	29	14	27.	9 ½	beau & nébuleux, avec petite pluie par ondées.
27	E.	14	23 ½	15 ½	27.	10 ½	beau & nébuleux.
28	E.	17	25	17 ½	27.	10	beau temps.
29	S. O.	19	24	14	27.	8	orage de grand tonnerre & grande pluie.
30	S. O.	12 ½	17	13 ½	27.	9	variable avec nuages.
31	S. O.	14	13	9	27.	9	variable avec pluie & tonnerre.

Eau de pluie, du 1 au 31, 4 pouces 5 lignes $\frac{24}{34}$.

Ce mois a été variable & assez humide; il est tombé beaucoup d'eau par orage & de la grêle en plusieurs endroits; les mares étoient pleines, cependant l'eau des sources avoit encore baissé depuis un mois.

Les chaleurs qu'il a fait du 21 au 28, avec un vent d'est, ont fait jaunir subitement les blés qui étoient encore verts; & ceux dont le grain étoit le moins mûr, ont été échaudés; les menus grains étoient encore très-beaux.

Le blé a valu au marché de Pithiviers, 28 à 31 livres 10 sous; & le 9, on y a vendu de l'escourgeon nouveau 12 livres le sac.

On a commencé à couper les seigles le 11; & le 25, dans toute la paroisse de Denainvilliers, on commença la récolte des fromens.

La vigne alloit de mal en pis, le fruit avoit coulé aux trois quarts; aussi le vin commun d'Orléans valoit 100 livres la pièce: on a été voir par curiosité sur une souche de gouas, dans le vignoble entre Grantarvilliers & Tielet, une grappe qui avoit 18 à 19 pouces de circonférence sur 9 pouces de longueur, non compris la queue; mais comme il a peut-être été deux mille personnes pour la voir & qui ont voulu la toucher, elle a été fort endommagée.

Le 1.er on a servi la prune dite la *jaune-hâtive*, on mangeoit encore des fraises & des cerises; on commençoit à manger la pêche magdeleine, les abricots, les prunes de monsieur & autres; il y avoit beaucoup de prunes, mais peu de pêches.

Le 2, entre minuit & une heure, on essuya un coup de vent si prodigieux, qu'il empêchoit d'entendre le tonnerre qui tomba en plusieurs endroits des environs sur des maisons où il a mis le feu; le dégât du vent s'est réduit à plusieurs arbres dont les branches ont été cassées, d'autres étêtés, tous les échalas des vignes courbés, & les blés étoient très-mêlés.

Les abeilles ont très-peu fourni d'essains, parce qu'il n'y a point eu de mères, & que les jettons sont demeurés dans les ruches: comme la saison étoit avancée, & que s'il étoit éclos des mères les essains auroient été perdus, on a pris le parti de changer les mouches de ruches.

AOUST.

Jours du Mois.	Vent.	Thermomètre. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		État du ciel.
		Degrés.	Degrés	Degrés.	pouc.	lign.	
1	S. O.	13	17	15	27.	9	beau avec nuages.
2	S. O.	14	18	14	27.	8½	variable avec pluie.
3	S. O.	13½	18	13	27.	10	variable avec vent & tonnerre.
4	S. O.	13	14½	12½	27.	10½	pluvieux toute la nuit & tout le jour.
5	S. O.	15	19	15	27.	11½	brouillard le matin, le jour nébuleux.
6	E.	15	22	18	27.	10	beau avec nuages.
7	N. O.	15	19	12	27.	11	beau temps.
8	O.	12	17	12	28.		beau avec nuages. (8–11)
9	N. E.	12½	18	13	27.	11	
10	O.	13½	16	14	27.	10	
11	N. E.	13	19	14	27.	9½	
12	N. E.	13½	19½	14	27.	10	beau avec nuag. & quelq. gout. d'eau.
13	N. E.	14½	19½	14½	27.	9½	*idem.*
14	S. O.	15	20	14	27.	9½	nuages, éclairs & tonnerre au loin.
15	S.	14	21	17	27.	8½	beau avec nuages.
16	S.	17	21½	16	27.	6	tonnerre le matin.
17	S.	14½	18	14	27.	7½	pluie & tonnerre la nuit.
18	S. O.	15	18½	15	27.	9	variable avec pluie par ondées.
19	S.	14½	18	15	27.	11	variable avec nuages sans pluie.
20	S.	14½	21½	17½	27.	9½	beau avec nuages.
21	S. O.	16½	17½	12½	27.	9	couv. tonnerre au loin, petites ondées.
22	S.	12½	13	18	27.	8	gros nuages, petites ondées
23	S. O.	12½	15	13	27.	8	variable avec pluie & vent.
24	O.	12	17	11½	27.	9	variable avec pluie.
25	O.	11	16½	11	27.	10½	*idem.*
26	O.	10½	17	11½	27.	9	beau avec nuages.
27	N. E.	11	18½	14	27.	7	*idem.*
28	N. E.	14	20	13	27.	8	variable avec tonnerre sans pluie.
29	S.	13½	15½	13	27.	9½	variable avec tonnerre & petite pluie.
30	S. O.	13½	15½	13	27.	9½	beau avec nuages.
31	S. O.	14	19½	14½	27.	7½	variable avec pluie & tonnerre.

Eau de pluie, du 1 au 31, 2 pouces 1 ligne [illegible].

Ce mois a été variable & orageux, il a fréquemment tonné; quoique le ciel ait toujours été fort chargé de nuages, il a peu tombé d'eau; ces apparences de pluie donnoient beaucoup d'inquiétude pour ſerrer les blés: le 16 au matin on entendit deux forts coups de tonnerre à cinq minutes l'un de l'autre; le premier coup tomba à Acoux, à une demi-lieue de Denainvilliers; l'autre, à Denainvilliers même; aucun ne fit de dommage, on ſentit ſeulement dans l'un & l'autre endroit une forte odeur que l'on comparoit à celle du ſoufre; mais il y a une grande différence entre les vapeurs électriques ou celles du tonnerre, & celles du ſoufre; car celles-ci ſont un obſtacle à la corruption, les autres la précipitent.

Comme les avoines ont été ſemées fort tard à cauſe de la ſécheresſe du printemps, elles ont été tardives à mûrir, & on en a fauché juſqu'à la fin du mois.

Le blé vieux valoit au marché, 30 à 32 livres le ſetier.

Il n'y avoit encore dans les vignes, à la fin de ce mois, que quelques grains de raiſin tournés.

Pendant ce mois les cèdres du liban ſe ſont couverts de fleurs mâles qui étoient jaunes à la fin du mois; ces fleurs ont blanchi, mais elles n'étoient pas encore alongées pour répandre la pouſſière fécondante.

Le 6, on vit une aurore boréale dont le foyer étoit au nord-oueſt.

SEPTEMBRE.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	S. O.	12½	17	12½	27.	5	vent, pluie & tonnerre.
2	S. O.	12	13	10	27.	9	variab. avec pluie & gr. vent. *m.* 4^l ½
3	E.	9½	13½	10½	27.	6	variable avec pluie.
4	S. O.	12½	15	11½	27.	6	pluvieux. *Le matin*, 3^l ½.
5	S. O.	11	16	11	27.	8½	couvert de nuages
6	O.	11	16	11	27.	9	beau avec nuages.
7	S. O.	11	14	9½	27.	8	variable avec pluie & tonnerre.
8	E.	8	11½	9	27.	3½	couvert & bruine.
9	N.	9	12½	9½	27.	9	pluvieux.
10	E.	11	13	12½	27.	7½	couvert & bruine.
11	S. O.	13	16	12½	27.	7½	pluvieux.
12	S. O.	12½	16½	12½	27.	6	variable, tonnerre & vent. *Le mat.* 4^l
13	S. O.	11½	18	12½	27.	9	variable avec gros nuages.
14	S. E.	12	15½	11	27.	11	variable avec pluie.
15	S. O.	11	13	10	27.	9½	couvert & bruine.
16	S. O.	10	10½	9	27.	3	couvert, pluie & vent.
17	S. O.	9	12½	9	27.	2	grand vent avec nuages. *Le m.* 27^p 1^l
18	S. O.	9	13	8	27.	6	*idem.*
19	S. O.	8½	13½	9	27.	10	variable ſans pluie.
20	S.	10	16	12	27.	9	variable avec pluie.
21	S.	12½	16½	12½	27.	9	beau avec nuages.
22	S. O.	13	18½	13	27.	8	brouil. le mat. couvert toute la journ.
23	N. O.	10½	15½	10½	27.	8½	beau avec nuages.
24	S. E.	10½	15	9½	27.	9	variable avec tonnerre ſans pluie.
25	N. O.	8½	14½	10	28.	½	beau avec nuages.
26	E.	8	15	10	28.	1	*idem.*
27	E.	9	16½	10	28.		beau temps.
28	E.	7	17	11	27.	11½	
29	S. O.	10½	18½	12½	27.	11½	
30	E.	11	17½	12	27.	10½	beau avec nuages.

Eau de pluie du 1 au 30, 1 pouce 11 lignes $\frac{40}{48}$.

Le

Le commencement de ce mois a été fort humide, il l'a été un peu moins vers la fin, & on en a profité pour serrer les avoines qui étoient encore sur terre le 15, & qu'on n'avoit pu serrer à cause des pluies continuelles; une partie étoit germée, & plusieurs ont été entièrement perdues.

Le beau temps de la fin du mois a été favorable pour avancer le dernier labour pour les blés, qui avoit été retardé par les pluies abondantes du mois d'Août & du commencement de celui-ci.

Le blé nouveau le plus beau pour les semences, valoit depuis 28 jusqu'à 36 livres.

Les raisins qui étoient en verjus au commencement du mois, commençoient à pourrir à cause des pluies; le beau temps qui est venu à la fin du mois, a été très-favorable pour avancer la maturité des fromentés, mais le plan de gouas n'étoit encore que rouge à la fin du mois.

Le vin vieux se vendoit 100 à 105 livres la pièce, ce qui fait 210 livres le tonneau.

Les pluies, le vent & le froid ont été fort contraires aux abeilles qui, ne pouvant sortir, ont beaucoup consommé de leurs provisions pour l'hiver; celles qui sont sorties de leurs ruches par le mauvais temps, ont péri dans la campagne sans pouvoir regagner leurs ruches.

OCTOBRE.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre.		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	N. E.	10	16	11 ½	27.	9 ½	beau avec nuages.
2	E.	9	14 ½	10	27.	8 ½	variable avec brouillard & pluie.
3	E.	9	15 ½	11	27.	5	variable avec pluie.
4	S. O.	12	15	12	27.	4	variab. avec grand vent & pluie le m.
5	S.	10	14	10	27.	5 ½	grande pluie la nuit.
6	S.	13	15	11	27.	6 ½	variable avec pluie & vent.
7	S.	12	16	12 ½	27.	8	beau avec nuages.
8	S.	12	17 ½	13 ½	27.	7 ½	couvert & pluvieux.
9	S.	11 ½	13	9 ½	27.	9	variable avec pluie.
10	S. E.	9	15	11 ½	27.	8	beau avec nuages.
11	N.	11	13	9 ½	27.	6	variable avec petite pluie.
12	E.	6	9	7 ½	27.	8 ½	beau avec nuages & vent froid.
13	N.	7 ½	9	7	27.	8	couvert & bruine.
14	N. E.	8	9 ½	8	27.	8 ½	couvert & pluvieux.
15	S. O.	8	10	7	27.	10 ½	*idem.*
16	S.	6	10	8 ½	27.	11	couvert & bruine.
17	N.	4	9	5 ½	27.	10 ½	beau temps.
18	E.	3	9	6 ½	27.	9	beau temps, gelée blanche.
19	N. O.	8 ½	11	5 ½	28.		variable sans pluie.
20	N. E.	3 ½	9 ½	4 ½	28.	1	beau temps.
21	E.	4	9 ½	4 ½	28.	1	*idem.*
22	E.	3	9 ½	6 ½	27.	9 ½	beau temps, gelée blanche.
23	S. O.	6 ½	10	8	27.	8 ½	couvert & pluvieux.
24	S.	6 ½	10 ½	9	27.	7 ½	couvert & bruine.
25	E.	9	10	6	27.	8 ½	grand brouillard, pluie & vent.
26	S.	6 ½	10	6	27.	8	beau avec nuages.
27	S. O.	6 ½	10	5	27.	10	*idem.*
28	S.	2	10	5	27.	11 ½	beau temps, gelée blanche.
29	E.	4	7 ½	7	27.	8	couvert & pluvieux.
30	S. O.	6	8	7 ½	27.	9	beau avec nuages.
31	S. O.	6	8 ½	5	27.	8 ½	couvert & venteux.

Eau de pluie, du 1 au 31, 2 pouces 7 lignes $\frac{14}{44}$.

Ce mois peut paſſer pour très-humide ; cependant malgré les pluies, le niveau des eaux de ſources continuoit à baiſſer ; on étoit obligé de fouiller de nouveau les puits qui l'avoient été pendant l'été, parce qu'ils manquoient encore d'eau.

Ces pluies ont été cauſe qu'on a eu bien de la peine à ſemer les fromens, & pluſieurs pièces dans les terres noires n'ont pu être enſemencées, parce que la terre étoit trop molle.

Les blés nouveaux de ſemence ont valu 33 à 36 livres le ſac, l'avoine 7 livres 10 ſous à 8 livres 10 ſous.

Le lundi 3, on a commencé la vendange, & on a continué le 4 & les jours ſuivans ; le fromenté étoit aſſez mûr, mais les gouas n'étoient que rouges, & il y avoit beaucoup de grains pourris ; comme les grappes étoient petites, la récolte étoit encore beaucoup moindre qu'on ne l'avoit eſpéré.

Les vins vieux de deux ans étoient fort chers, ils ſe vendoient juſqu'à 200 livres le tonneau ; à l'égard des nouveaux, le prix n'étoit point encore fait.

Le 15, on entonna les vins qui avoient été faits les premiers.

Le 9, on voyoit encore quelques hirondelles qui paſſoient en faiſant route vers le midi, & ce ſont les dernières qu'on ait vues.

Le 25, on cueilloit encore quelques fleurs de ſafran qui avoit commencé à fleurir les premiers jours du mois.

NOVEMBRE.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin	Midi.	Soir.	Baromètre.		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	S. O.	6	9	8½	27.	6½	couvert, venteux & pluvieux.
2	O.	6	9½	6½	27.	8	beau avec nuages.
3	S.	9½	12	7½	27.	7	couvert & pluvieux.
4	S. O.	9	9	7½	27.	6½	couvert & venteux. *Le mat.* 4[l]
5	N.	6	7	1½	28.	1	beau avec nuages.
6	N. E.	— 1½	5	— ½	28.	3	beau temps, gelée à glace.
7	N. E.	— 1½	4½	0	27.	10½	bruine.
8	S. O.	— 1½	6½	4	27.	10	*idem.*
9	S. O.	3½	7½	4½	27.	10	couvert.
10	S.	2	7	4½	27.	9	bruine.
11	S. E.	3½	8	3	27.	5	couvert.
12	E.	3½	7½	7	27.	6	couvert avec bruine. *Le mat.* 4[l]
13	S.	6	6½	7	27.	10	grand brouillard tout le jour.
14	S.	5	10½	8½	27.	8½	grand brouill. orage de pluie & tonn.
15	O.	7	9	4	28.	1	beau temps.
16	N. E.	½	5	½	27.	10	gr. brouill. gel. blanche, beau temps.
17	S.	— ½	6	4½	27.	7	beau avec nuages.
18	O.	4	3	5	27.	10½	pluvieux & venteux.
19	N. E.	4	6	1	28.	1	beau avec nuages.
20	S. O.	— ½	4	3½	27.	11	couvert.
21	S.	3	4	6	26.	11	pluie & vent de tempête.
22	S. O.	3½	4	2	26.	6½	variable avec pluie & vent. *midi.* 6[l]
23	S.	3	4	2	26.	9	*idem.*
24	S.	2	5½	4	27.	2	pluie par ondées.
25	S. O.	2	6	3½	27.	7½	beau avec nuages & vent.
26	S. O.	2	4½	2	27.	10	variable avec brouillard.
27	S.	3	6	9	27.	10½	couvert, & bruine.
28	S. E.	6½	9½	6	27.	10	beau temps.
29	S.	5	9½	8	27.	7½	variable avec pluie & vent.
30	S. O.	9	9	9	27.	2	couvert, pluvieux, vent de tempête.

Eau de pluie du 1 au 30, un pouce 5 lignes $\frac{26}{28}$.

Quoique ce mois ait été humide, que les mares fussent pleines & les chemins impraticables, il n'est pas tombé beaucoup d'eau: le lit de la rivière étoit plein, mais les sources ne poussoient pas.

On a eu bien de la peine à achever les blés dans ce pays, & ils ne l'étoient pas encore dans les terres noires; la terre ayant été difficile à labourer tout l'été, & les fumiers à voiturer, les chevaux étoient très-fatigués: de plus, l'avoine n'étant pas de bonne qualité, les chevaux qui en ont mangé depuis la récolte ont été mal nourris.

Le blé vieux a valu pendant ce mois 34 livres le sac, le nouveau 27 à 30 livres, l'avoine 8 à 9 livres le sac.

DÉCEMBRE.

Jours du Mois.	VENT.	THERMOMÈTRE. Matin.	Midi.	Soir.	Baromètre		ÉTAT DU CIEL.
		Degrés.	Degrés.	Degrés.	pouc.	lign.	
1	S.	4	7 ½	4	27.	5	beau avec nuages.
2	S.	4	6 ½	3 ½	27.	4	variable avec pluie & vent.
3	S. O.	4	6	1 ½	27.	8	*idem.*
4	S.	3 ½	6	4	27.	9 ½	variable ſans pluie.
5	E.	1 ½	6	3 ½	28.	1	beau temps, gel. blanche, aurore bor.
6	E.	1 ½	7	3	28.	½	beau temps, gelée blanche.
7	N. E.	0	4 ½	1 ½	28.		grand brouillard & beau temps.
8	N. E.	1 ½	4 ½	3 ½	28.		grand brouillard & vent.
9	N. E.	4	3	— 1	27.	11	beau avec nuages & vent.
10	N. E.	— 2	1	— 1 ½	28.		beau avec vent.
11	N. E.	— 3	0	— 2 ½	28.	2	beau temps.
12	N. E.	— 4	— ½	— 3 ½	28.	2 ½	*idem.*
13	N. E.	— 2	— 2	— 6	27.	8 ½	couvert & nébuleux.
14	N. E.	— 9 ½	— 5 ½	— 9	27.	7	beau temps.
15	S. E.	— 4 ½	— ½	— 1 ½	27.	4	couvert & pluvieux.
16	E.	3	4 ½	2 ½	27.	3	variable avec petite pluie.
17	S. E.	4	6	4	27.	7	couvert & pluvieux. *Le mat.* 2[l]
18	S.	3	5	3	27.	11 ½	variable avec bruine.
19	S.	½	3	1	28.	2	variable avec gélée blanche & brouil.
20	S.	1	3 ½	4 ½	27.	11 ½	couvert & pluvieux.
21	S. E.	2	4	1	28.		couvert & bruine.
22	E.	1 ½	4	1	27.	10	grand brouillard, beau temps.
23	E.	— ½	4	3 ½	27.	9	beau temps.
24	E.	— 1	3 ½	1	28.	1	*idem.*
25	S. O.	1	5	3 ½	28.	2 ½	beau avec nuages.
26	S. O.	2	4 ½	4 ½	28.	1	couvert. *Le mat.* 28 pouces 2 lign. ½.
27	S.	3 ½	6 ½	1	28.	2	beau avec nuages & brouillard.
28	S.	1	4 ½		27.	9	couvert.
29	S.	3 ½	5 ½	6	27.	8	variable avec vent & bruine.
30	S. O.	6	5	4	27.	8	beau avec nuages & bruine.
31	S.	4	7	7	27.	6	variable & pluie fine.

Eau de pluye, du 1 au 31, 8 lignes $\frac{6}{44}$.

Il a fait très-froid pendant ce mois ; il n'eſt pas tombé beaucoup d'eau, cependant les chemins étoient extrêmement mauvais ; & comme l'été & l'automne ont été extrêmement humides, il y a eu beaucoup de perſonnes qui n'ont pu faire leur proviſion de bois, & la gelée n'a pas duré aſſez long-temps pour aller à la forêt ; les mauvais chemins ont auſſi empêché les voituriers d'enlever les vins, ce qui l'a fait diminuer de quelque choſe.

Le blé a diminué de 5 ou 6 livres par ſac ; il y en a eu du nouveau mouillé à 22 livres, du nouveau glacé à 26 livres, & du vieux de l'année dernière à 29 livres.

IDÉE GÉNÉRALE

de la Température de l'air & des Productions de la Terre, pendant l'année 1768.

L'hiver & le commencement du printemps ont été très-ſecs, c'eſt pourquoi on a eu de la peine à faire les mars ; mais la fin du printemps, l'été, & même l'automne, ont été très-humides ; ainſi on peut dire que l'année a été humide & s'eſt paſſée ſans été ; car il n'y a eu que peu de jours de chaleur qui, étant vives, ont échaudé beaucoup de blés qui avoient été nourris d'humidité, & étoient encore très-verts lorſque ces jours très-chauds les ont tout d'un coup fait germer ; les blés tardifs & ceux qui étant venus dans des terres froides, étoient les moins avancés ont plus ſouffert que les autres.

FROMENS.

Les blés donnoient géneralement les plus belles eſpérances juſqu'aux brouillards de la fin de Mai & du commencement de Juin qui les ont rouillés : dans les terres fortes, qui ſont ordinairement les meilleures pour le froment, ce grain a été moins beau que dans les terres légères, parce que faute de chaleur, ils n'ont commencé à monter que par les humidités de la fin du printemps, alors ils ont été ſurpris par la chaleur qui les a échaudés ; quoique dans les terres légères ils aient été moins endommagés,

il y a bien un quart des grains qui ſont échaudés & retraits: d'ailleurs, comme la moiſſon a été humide, beaucoup de blés ont été mouillés; le ſac peſant 240 livres, ne rend que dix-neuf à vingt pains de 9 livres, pendant que le blé vieux en rend vingt-trois ou vingt-quatre; ce qui provient, 1.° de ce que la farine boit moins d'eau, 2.° les grains échaudés & retraits ne rendent que peu ou point de farine, 3.° les grains humides ne ſe broyant pas ſous la meule rendent peu de farine; le blé mouillé de l'année, vaut au marché 22 à 23 livres; celui qui ne l'a pas été, 25 à 26 livres; & le blé de l'année dernière 1767, 29 à 30 livres: le blé vieux des années antérieures a valu juſqu'à 34 & 35 livres, mais il n'y en avoit plus que quelques ſacs dans les greniers, qui ſont très-recherchés par les Pâtiſſiers.

Il faut environ quinze à vingt gerbes pour fournir une mine; & dans les bonnes années douze gerbes ſuffiſent; de plus il ſort au criblage beaucoup de petits grains qui ne rendent point de farine; d'où il ſuit que, quoiqu'il y ait eu aſſez de gerbes, la récolte a peu rendu en pain.

Avoines.

Les avoines ont été ſemées fort tard à cauſe de la ſéchereſſe du printemps; mais ayant été nourries d'humidité pendant l'été, elles ont été très-belles ſur pied dans les endroits où les vers ne les ont pas mangées, comme il eſt arrivé en Beauce où ils ont fait un grand dommage. Cependant ces belles avoines en apparence n'ont produit que du fourrage, & elles ont rendu très-peu de grain, qui même eſt fort léger.

Orges.

Les orges ont été très-bonnes, parce qu'elles ont profité de l'humidité des pluies de l'été qui leur ont été favorables.

Gros Légumes.

Les pois, les veſces, les lentilles ont très-bien réuſſi, mais ils ont été difficiles à ſerrer à cauſe des pluies, & il y en a eu beaucoup qui

qui ont pourri ſur le champ ; les féves ont auſſi ſouffert des pluies, & pluſieurs ont pourri au lieu de mûrir.

Plantes potagères.

Il y a eu très-peu d'oignons, parce qu'après avoir beaucoup ſouffert des ſécherefſes du printemps, les pluies de l'été les ont fait pourrir ; les melons n'ont pas été bons, ayant été nourris d'humidité, & parce qu'il n'a pas fait aſſez de chaleur pour les faire mûrir.

Foins et Sainfoins.

Les ſainfoins ont été fort bas à cauſe de la ſéchereſſe du printemps, & preſque tous ont été mouillés : les foins ont été bons, mais très-difficiles à faner à cauſe des pluies ; il y en a même eu beaucoup de gâtés.

Chanvres.

Les chanvres ont été bons, mais la filaſſe eſt tendre.

Vins.

Il y a eu très-peu de vin & d'une très-médiocre qualité, ils ont très-peu bouilli ; cependant ils ſont meilleurs, & ont un peu plus de couleur que l'année dernière, mais en général ils ſont très-verts & plats : la récolte n'a été que de deux demi-queues par arpent, auſſi ſont-ils très-chers.

Eau-de-vie.

Le prix de l'eau-de-vie a ſuivi celui du vin, & a été à 250 livres la demi-queue.

Fruits.

Il n'y a point eu de ceriſes, beaucoup de prunes, point de figues, la plus grande partie des figuiers ayant été gelés en 1767 & cette année ; peu de pêches, médiocrement de poires, des pommes en abondance : auſſi au défaut de vin a-t-on fait beaucoup de cidre, qui s'eſt vendu juſqu'à 30 livres la demi-queue ; il n'y a preſque point eu de noix.

Plantations.

Les plantations ont bien réuſſi, parce que le printemps a été

frais, & que la terre a été humectée par les pluies survenues lors de la sève d'Août.

Le grand froid de l'hiver a fait peu de tort aux arbres & arbustes étrangers ; les liquidambar, les *cupressus foliis acaciæ deciduis*, les *magnolia* même n'ont point souffert ; le *sydcroxilon*, les *cephalanthus*, les phaséoloïdes ont perdu quelques branches ; les liéges, une partie de leurs feuilles, ainsi que les alaternes : nous n'avons perdu que quelques jeunes cyprès, le *belladona Hispanica frutescens*, & quelques arbustes peu importans.

Safrans.

Les oignons de safran ont donné très-peu de fleurs, parce que l'œil a été noyé dans le temps qu'il s'est formé, à cause des grandes pluies ; cette récolte a donc été très-médiocre, cependant il ne s'est vendu que 30 francs la livre.

Insectes.

Il n'y a point eu cette année de hannetons ni de chenilles, non plus que de guêpes, fort peu de cantarides, mais il y a eu beaucoup de vers qui ont fait un grand dégât dans les avoines, & des mulots qui ont fort endommagé les blés en Beauce & encore plus en Picardie.

Gros Bétail et Volailles.

Il n'y a point eu de maladie sur les bêtes à laine, sur les bêtes à corne, ni sur les chevaux, qui en général ont tous été très-fatigués chez les laboureurs ; ce qui vient, 1.° de ce que la terre a été toute l'année *lourde* à labourer ; 2.° de ce qu'ils ont eu beaucoup de peine à voiturer les fumiers & à serrer les moissons, non-seulement parce que la terre étoit molle & les chemins mauvais, mais encore parce que les fourrages humides étoient fort pesans ; à quoi il faut ajouter que l'avoine de l'année dernière étoit supérieure à celle de cette année, tant pour la quantité que pour la qualité.

Plusieurs chiens ont encore été attaqués de maladies convulsives ; quelques-uns en sont morts, d'autres ont été guéris par l'usage de la thériaque.

Au mois d'Août on éprouva une mortalité si prodigieuse sur les oies, qu'elle mérite d'être détaillée: un marchand en conduisoit une bande de cent quatre-vingts douzaines, il lui en mourut en traversant la forêt d'Orléans cent trente douzaines; un Fermier perdit en un jour huit douzaines sur quinze; un autre, perdit en un jour huit douzaines sur douze; un de nos Fermiers ayant envoyé les siennes à portée de la rivière pour les rafraîchir, en perdit cependant plus de la moitié; quelques bandes ont été préservées de la mortalité, & on juge que celles qui ont été attaquées de la maladie l'ont gagnée sur la route, soit par manque d'eau ou par la mauvaise qualité de celles qui ont été rassemblées dans les mares qui provenoient des orages; d'autres prétendent, & cela paroît plus vraisemblable, que cette mortalité vient de ce que ceux qui sont partis les premiers pour vendre leurs oies plus cher, les ont fait marcher plusieurs jours dans la boue après les orages, & que pour arriver des premiers, ils leur ont fait faire de trop grandes journées sans leur donner le temps de manger, ce qui les a excédées de fatigue; il est certain que ceux qui sont arrivés les derniers & qui ont été à plus petites journées, n'en ont pas perdu une seule.

Gibier.

Il n'y a pas eu beaucoup de perdrix, parce que les pluies ont contraint les mères d'abandonner une partie de leurs nids, mais il y a eu assez de cailles; il y a eu pendant la vendange beaucoup de cette petite grive, qu'on appelle *mauviette.* On n'a pas vu de l'année une seule de ces grosses grives qu'on appelle *trage* ou *chacha*, non plus que de cette grive qui chante au printemps sur le plus haut des arbres; il y a eu beaucoup d'allouettes & médiocrement de lièvres.

Abeilles.

Les abeilles ont très-peu fourni d'essains, parce qu'il n'y a point eu de mères & que les jettons ont demeuré dans les ruches.

Maladies des Hommes.

Quoiqu'il n'y ait point eu de fruits d'aucune espèce l'année dernière, cependant il a régné pendant l'hiver & l'été beaucoup de dyssenteries.

Il y a eu moins de fièvres intermittentes & beaucoup plus de malignes qu'en 1767, mais toujours dangereuſes; il en eſt mort peu de ceux qui ont eu des ſecours & qui ont été traités méthodiquement par les purgatifs, l'uſage de l'émétique huileux & des humectans.

EAU DE PLUIE.

Comme nous avons indiqué à la fin de la Table de chaque mois, la quantité d'eau de pluie qui eſt tombée pendant le mois, nous ne répéterons point cette Table ici; nous allons ſeulement en donner un réſultat par chaque trois mois de l'année.

		pouces.	lignes	pouc.	lign.
Trimeſtre de	JANVIER	2.	$1\frac{20}{48}$	24	$3\frac{29}{48}$.
	AVRIL	8.	$10\frac{12}{48}$		
	JUILLET	8.	$6\frac{25}{48}$		
	OCTOBRE	4.	$9\frac{20}{48}$		

Total de l'eau de pluie qui eſt tombée pendant l'année 1768, 24 pouces 3 lignes & $\frac{29}{48}$ de lignes.

NIVEAU DES EAUX.

Les eaux ont été fort baſſes cette année; on a encore été obligé de fouiller pendant le printemps & l'automne les puits qui l'avoient déjà été l'année dernière. Cependant cet hiver la rivière d'Eſſonne a débordé pluſieurs fois par le trop plein des étangs de la forêt, mais les eaux ſe ſont écoulées en peu de temps, parce que les ſources qui entretiennent cette rivière ne fourniſſoient pas; l'année a pourtant été fort humide, puiſque, ſuivant la Table ci-deſſus, il eſt tombé plus de 24 pouces d'eau.

BOUSSOLE.

La déclinaiſon de l'aiguille aimantée s'eſt trouvée à la fin de 19 degrés 30 minutes au nord-oueſt.



*DESCRIPTION**

D'un grand Fourneau à raffiner le cuivre, conſtruit au mois d'Août 1755, dans la Fonderie des Mines de Cheiſſey en Lyonnois, dans lequel ſe raffine tout le Cuivre provenant deſdites Mines & de celles de Sainbel.

Par M. JARS.

AVANT la conſtruction du fourneau dont le deſſin accompagne le préſent Mémoire, on raffinoit le cuivre des mines de Saint-Bel & de Cheiſſey ſur un petit foyer pareil à celui repréſenté par la *planche 51* du *Traité des Fonderies* de Schlutter; mais ayant lû dans le même Traité, que dans certaines fonderies des mines d'Allemagne, on raffinoit le cuivre avec ſuccès dans un grand fourneau, & avec moins de frais que ſur le petit foyer, je penſai que pour diminuer la dépenſe de l'exploitation, il conviendroit de ſuivre la même méthode, je vis en même-temps que les cuivres que l'on traitoit dans ces fourneaux, provenoient du travail de la liquation, & qu'ils contenoient par conſéquent du plomb qui aide beaucoup à la fonte & accélère la ſcorification des parties hétérogènes, comme fer, zinc, arſenic, &c. qui ſont unies ordinairement au cuivre qui n'eſt pas raffiné, & que l'on ajoutoit juſqu'à deux quintaux de plomb ſur chaque raffinage de quarante quintaux de cuivre qui n'a pas paſſé par le plomb; ces conſidérations ſuſpendirent quelque temps la réſolution où j'étois de propoſer aux Intéreſſés de ces mines, de faire conſtruire un grand fourneau à raffiner, puiſque le cuivre de Saint-Bel provient d'un minéral très-ferrugineux, & celui de Cheiſſey d'un minéral uni à beaucoup de blinde, & dont le cuivre contient par conſéquent du zinc; dans l'un il faut ſcorifier le fer, & dans l'autre le zinc: on ſait que ces matières exigent une chaleur très-vive

* Ce Mémoire a été lû le 12 Juillet 1761, c'eſt par oubli qu'il n'a pas été imprimé plus tôt.

pour ſe ſcorifier, de-là je conclus que ſi l'on vouloit ſe ſervir des fourneaux dont parle Schlutter, on ſeroit dans la néceſſité d'ajouter du plomb; & quoiqu'il y eût encore de l'avantage à les préférer au petit foyer, je fus du ſentiment que ſi l'on pouvoit augmenter le degré de chaleur à ces fourneaux, on pourroit ſe diſpenſer de cette addition; j'avois déjà formé pluſieurs projets de fourneau, lorſque je fus envoyé à Sainte-Marie-aux-mines où je vis que l'on ſe ſervoit du fourneau repréſenté par la *planche 44* du *Traité des Fonderies* de Schlutter, mais ſeulement pour ſéparer le plomb des mattes, comme on le pratique dans le pays d'Hanovre, & enſuite le cuivre noir des mêmes mattes après qu'elles ont été refondues; & comme ce cuivre noir eſt encore mêlé au plomb pour en ſéparer l'argent par la liquation, je propoſai au Directeur de ſuivre la méthode décrite par Schlutter pour raffiner le cuivre dans le même fourneau, il le fit exécuter, & je fus témoin de la réuſſite; il ceſſa alors de faire raffiner ſur le petit foyer où l'opération étoit extrêmement longue & conſumoit beaucoup de charbon, parce que le plomb uni au cuivre ſe revivifioit de nouveau par le contact immédiat du charbon qui lui communiquoit du phlogiſtique; l'arſenic ne ſe ſcorifioit auſſi que difficilement, car on retiroit fort ſouvent du cuivre qui n'avoit pu parvenir au vrai point du raffinage; il n'en eſt pas de même du réverbère où l'opération ſe fait par la flamme. Cependant celui dont je parle, ainſi que tous ceux dont on ſe ſert en Allemagne, perdent beaucoup de chaleur par les trois bouches à feu qui reſtent ouvertes pendant l'opération; c'eſt pourquoi ayant projeté de nouveau de perfectionner le grand fourneau de raffinage, je fus d'avis de fermer toutes les ouvertures pendant l'opération, & de ſubſtituer aux bouches à feu une grande cheminée fort élevée, celle du fourneau anglois me parut très-propre pour cela; de cette façon, j'augmentai le courant d'air dans le fourneau & donnai plus d'activité au feu: la façon de diriger le vent des ſoufflets me parut auſſi très-importante, c'eſt pourquoi je diſpoſai la chauffe ou réverbère de façon qu'elle porte la flamme devant la tuyère, d'où le vent des ſoufflets la reporte ſur le cuivre; je fis en conſéquence le deſſin du fourneau que je projetois, je diſtribuai de mon mieux toutes les parties

relatives à l'aiſance de l'opération, & tâchai de ne rien oublier de ce qui pouvoit contribuer à la perfection de ce fourneau; en ayant informé la Compagnie, elle obtint du Miniſtre que je me rendrois à Cheiſſey pour l'y faire conſtruire: c'eſt celui dont le deſſin eſt joint au préſent Mémoire, & dont je vais donner la deſcription qui ſera ſuivie du procédé pour y raffiner le cuivre, il y ſera auſſi parlé de quelques changemens que j'y ai faits depuis ſa conſtruction.

Pour conſtruire ce fourneau, on a tracé ſa forme telle qu'elle eſt repréſentée par les plans, avec 3 pouces tout autour de plus d'étendue; on a creuſé & enlevé tout ce terrein juſqu'au ſolide que l'on a rencontré à 4 pieds de profondeur, comme on peut le voir dans les deux coupes (*fig. 3 & 4*): on a fait alors un maſſif de maçonnerie de 3 pieds 6 pouces de hauteur, ſur lequel on a tracé les canaux pour l'humidité; on a élevé enſuite le corps de la maçonnerie de 6 pouces, laiſſant le vide des canaux à cette hauteur qui eſt le niveau du terrein de la fonderie; on a fait une recoupe de 3 pouces tout autour, ſon étendue a été pour lors pareille à celle marquée par les deux plans; on a recouvert les canaux avec des pierres plates, ſur leſquelles on a formé des petits ſoupiraux ou ventouſes: c'eſt à cette hauteur qu'a été fait le plan inférieur, on a entouré ces ventouſes de ſcories, on les en a auſſi recouvertes de l'étendue du baſſin; ſur ces ſcories, on a arrangé des briques droites ou verticales, ainſi que l'on peut le voir dans les deux coupes; ce qui eſt à préférer à l'argile dont on ſe ſert ordinairement pour les fourneaux, parce qu'elle eſt ſujette à ſe fendre lorſqu'on la fait ſécher, & ne donne pas autant de paſſage à l'humidité; cependant on en met environ un pouce d'épaiſſeur ſur les briques, afin d'empêcher le cuivre de pénétrer, au cas que le baſſin formé de braſque, vienne à s'enlever pendant l'opération; on bat par-deſſus cette terre environ 1 pied d'épaiſſeur de braſque, comme il ſera expliqué dans le procédé: avec cette braſque, on forme un baſſin capable de contenir la quantité de cuivre que l'on y veut raffiner; ce baſſin avoit d'abord été fait de 9 pieds $\frac{1}{2}$ de long ſur 7 pieds $\frac{1}{2}$ de large, ainſi qu'on peut le voir dans le plan inférieur (*figure 1*), mais je ne tardai pas à en faire diminuer

Conſtruction du fourneau.

Fondation du fourneau.

Briques droites à préférer à l'argile.

l'étendue tout autour, comme il paroît par le plan supérieur; elle est plus que suffisante pour y raffiner cinquante quintaux, & même soixante à la fois; cette recoupe est devenue très-utile au fourneau, puisqu'elle sert à y faire une chemise ou doublure que l'on peut réparer sans que la voûte en puisse être endommagée; cette voûte, de même que la chemise, sont construites avec des briques faites d'une argile blanche que l'on tire du Dauphiné, & dont Messieurs de l'affinage se servent à Lyon pour faire leurs creusets *, n'ayant point trouvé jusqu'à présent d'argile dans le pays qui puisse supporter le degré de chaleur du fourneau sans se vitrifier: l'intérieur du conduit de la petite cheminée qui communique à la grande, est fait pareillement avec des briques de la même terre, ainsi que la couverture dudit conduit, mais en briques beaucoup plus grandes, comme on peut le voir dans l'élévation; l'extérieur du conduit est fait en briques ordinaires.

Briques blanches dont est fait l'intérieur du fourneau.

Soupiraux ou ventouses.

Dans l'épaisseur des murs du fourneau, on a ménagé tout autour deux rangs de petites ventouses ou soupiraux pour l'évaporation de l'humidité, dont les unes prennent depuis les briques & les autres depuis la brasque en-dedans, & montent obliquement jusqu'en-dehors; elles sont absolument nécessaires, on ne sauroit en faire une trop grande quantité; on en sera convaincu, si l'on fait attention jusqu'à quel point l'eau peut être raréfiée par la chaleur: malgré cela, il n'arrive que trop souvent (lorsque l'on a été quelque temps sans raffiner) qu'il sort une flamme bleuâtre à travers les murs, quelquefois par les soupiraux, & qui est suivie d'un bruit considérable, ce qui ébranle beaucoup le fourneau & peut occasionner que la brasque qui forme le bassin ne s'élève & que le cuivre n'entre par-dessous. On doit aussi observer qu'il faut au moins que le mur de derrière le fourneau soit bâti avec un mortier de terre, au lieu d'y employer de la chaux & du sable qui, devenant trop compactes, empêchent la sortie de l'humidité & occasionnent par cette raison des ébranlemens.

Lorsque je fis construire le fourneau dont il est ici question, je n'avois pratiqué à la chauffe qu'un simple cendrier pareil à ceux des fourneaux que l'on a en Allemagne; je l'ai fait depuis

* C'est la terre de Larnage.

beaucoup

beaucoup plus bas afin d'augmenter le courant d'air qui entre dans le fourneau pour procurer plus de chaleur. Je n'avois également fait placer qu'un soufflet double à la tuyère du fourneau, je me suis déterminé à en ajouter un second; ces changemens ont avancé l'opération au moins de deux heures, & ont diminué un peu la consommation du bois.

Procédé pour le raffinage du cuivre dans un grand fourneau.

J'observerai, avant toutes choses, qu'on ne sauroit trop faire sécher un pareil fourneau avant que de commencer à y raffiner: pour n'avoir attendu que quinze jours après son entière construction, dont huit avoient été employés à y entretenir un peu de feu, je fus sur le point de douter de sa réussite, comme on va le voir.

Ayant fait former le bassin avec de la brasque, ainsi qu'il sera dit plus bas, je fis arranger trente quintaux de cuivre noir dans le fourneau, on ferma les ouvertures, & l'on mit du bois dans la chauffe; mais malgré un feu très-vif que l'on entretint pendant quinze heures consécutives, on ne put parvenir à faire fondre le cuivre, je l'attribuai en partie à l'humidité du fourneau, mais je crus aussi que la nature du cuivre demandoit qu'on y ajoutât du plomb; c'est pourquoi je ne me rebutai point, & me déterminai à imbiber ce cuivre dans le bassin de réception du fourneau à manche, d'une quantité de cinq pour cent de plomb: ce cuivre ainsi imbibé, fut fondu & raffiné fort aisément dans le fourneau de réverbère, j'essayai pour une seconde opération de ne mettre que moitié cuivre imbibé & moitié cuivre sans plomb, ce qui ne faisoit plus que deux & demi pour cent de ce métal; on fit deux raffinages de trente quintaux chacun en cette proportion: enfin, voyant que le fourneau devenu parfaitement sec, avoit une chaleur bien au-dessus des précédentes fois, je fis de nouveau un raffinage avec du cuivre sans plomb, il réussit; j'augmentai aussi la quantité, de sorte qu'aujourd'hui chaque raffinage est fixé à cinquante quintaux; il fallut en conséquence agrandir les bassins de réception qui n'avoient alors que quatre pieds de diamètre extérieurement. Quoique l'on ait également réussi à en mettre soixante

Première opération qui n'a pas réussi.

Addition de plomb.

Combien on raffine de cuivre à la fois.

à la fois, on n'a pas continué par l'embarras de retirer les rosettes qui sont pour lors trop pesantes, il a fallu du temps pour amener cette opération au point où elle aujourd'hui, sur-tout ayant été obligé de former des ouvriers qui n'étoient accoutumés qu'à travailler au petit foyer; c'est la façon dont se conduit à présent l'opération que je vais décrire.

Comment on place la tuyère.

Il est très-essentiel de bien placer la tuyère pour ce procédé; on a reconnu qu'en donnant 6 lignes d'inclinaison ou pente à son plan horizontal, qui dirige le vent des soufflets sur le cuivre, c'étoit la placer le plus avantageusement pour ce fourneau.

Composition de la brasque du grand bassin.

Le grand bassin servant à contenir le cuivre, est formé avec une brasque * composée de deux parties & demie d'argile & de deux parties de charbon réduit en poudre, lesquelles ont été auparavant pilées & passées par un crible; sur quatre parties de cette composition, on en ajoute une de sable également passé par un crible: cette brasque étant mêlée & humectée de façon qu'elle puisse se peloter dans la main sans s'y rendre adhérente; le maître raffineur entre dans le fourneau par l'ouverture *C* marquée dans l'élévation *(fig. 5)*, un aide lui donne la brasque par cette ouverture, de même que par celle *B;* il en arrange suffisamment sur le sol du grand bassin pour former une couche, il sort ensuite du fourneau pour laisser la place aux deux aides qui la battent avec des palettes de bois, comme on le pratique à tous les fourneaux; cette couche battue, le maître raffineur fait avec un ciseau de fer, des raies en tous sens dans cette brasque, & jette un peu d'eau sur la surface, c'est afin que la couche supérieure puisse mieux se lier; il se fait ensuite apporter de nouvelle brasque qu'il arrange comme la précédente & que l'on bat de la même manière; il en use de même pour mettre la dernière couche, en observant à chacune de laisser le milieu du bassin plus profond que les bords, avec une pente vers les deux petits murs *H,* marqués dans le plan supérieur *(fig. 2);* on prend alors des pilons de fer d'environ 2 pouces de diamètre qu'on fait chauffer à leurs extrémités, afin

Comment l'on met la brasque dans le fourneau, & comme on la bat.

* Par des expériences que mon frère vient de faire, de concert avec moi, nous sommes parvenus à trouver une composition bien préférable à la brasque; on en trouvera tous les détails dans le Supplément.

que la brasque ne s'y attache point & avec lesquels on bat fortement toute la surface du bassin, de façon que le doigt n'y fasse aucune impression : le maître raffineur prend ensuite le niveau depuis la tuyère, & avec un fer recourbé il creuse dans la brasque jusqu'à ce que le bassin ait 5 pouces $\frac{1}{2}$ de profondeur dans le milieu; il est pour lors d'une capacité suffisante pour contenir cinquante quintaux de cuivre, en y comprenant les deux canaux pour l'écoulement de ce métal, lesquels s'étendent jusqu'aux murs *H* du plan supérieur, avec une pente de 3 lignes environ depuis le fond du grand bassin; on apporte ensuite des marteaux larges, arrondis & polis qu'on a fait chauffer auparavant, avec lesquels on bat encore toute la surface, afin de la rendre parfaitement unie. Il seroit beaucoup mieux de ne former le bassin qu'avec une seule couche de brasque qu'on pileroit tout-à-la-fois, mais on ne pourroit se procurer l'aisance nécessaire pour cela, qu'aux dépens de la chaleur, puisqu'il faudroit élever la voûte du fourneau; pour y suppléer, j'avois fait faire un chapeau de fer pareil à ceux qu'on met aux fourneaux de coupelle, mais la chaleur est trop considérable dans ce fourneau pour qu'on ait pu continuer à s'en servir : la première fois le chapeau se plia, il auroit fallu à chaque raffinage y faire des réparations, soit pour redresser le fer, soit pour le garnir de nouvelle argile. Le grand bassin étant formé, comme je viens de le dire, on met une brique devant chacun des petits murs *H* pour retenir le cuivre, on la lute avec de l'argile dont on remplit le restant de l'ouverture de chaque mur; on prépare ensuite les bassins de percée avec une brasque composée de parties égales d'argile & de poussier de charbon; après qu'elle y a été bien battue, on les creuse en cônes renversés, de façon qu'ils puissent contenir chacun environ vingt-cinq quintaux de cuivre; ils ont 3 pieds $\frac{1}{2}$ de diamètre intérieurement sur 1 pied 4 pouces de profondeur : lorsque le tout a été préparé, on met une pelote de terre devant la tuyère pour diriger le vent des soufflets dans le haut du fourneau, afin qu'il puisse mieux étendre la chaleur jusqu'à ce que le cuivre soit entièrement fondu : le maître raffineur se fait ensuite apporter de la paille dont il couvre toute la surface du grand bassin d'environ 3 ou 4 doigts d'épaisseur pour empêcher que le cuivre

Profondeur du bassin.

Chapeau de fer qui n'a pas réussi.

Brasque pour les bassins de réception.

Comment on arrange le cuivre dans le fourneau.

n'y faſſe des trous & ne l'endommage, après quoi il y arrange cinquante quintaux de cuivre noir qu'on fait entrer par l'ouverture *C* marquée dans l'élévation : il met les pièces de cuivre les unes ſur les autres, mais laiſſant ſuffiſamment de vide entre chacune pour que la flamme puiſſe y pénétrer ; il laiſſe auſſi un vide d'un pied $\frac{1}{2}$ entre la tuyère & le métal, il a ſoin de mettre quelques pièces de cuivre ſur le canal de la percée, qui eſt proche de la petite cheminée, à l'endroit *R* de la coupe ſur la ligne *AB*, *(fig. 3)* afin de diminuer l'ouverture pour la ſortie de la flamme qui ſeroit trop grande ſans cela ; lorſque le cuivre eſt fondu, le canal eſt plein de cuivre, ce qui rétrécit également le paſſage de la flamme. Les cinquante quintaux de cuivre noir ayant été arrangés dans le fourneau, on ferme toutes les ouvertures avec des grandes briques faites avec de l'argile ordinaire, de la paille hachée & de la bourre de veau ; on les lute bien tout autour, & l'on met du bois dans la chauffe, dont on entretient le feu de façon que le cuivre ſoit cinq à ſix heures avant d'être entièrement rouge : ceci s'obſerve ſeulement lorſqu'on a refait deux couches ou même les trois couches du baſſin, c'eſt afin de le ſécher & d'en faire évaporer l'humidité ; on n'eſt pas ſouvent dans ce cas-là, car on peut raffiner au moins deux cents milliers de cuivre ſans toucher à celle du fond ; pour la ſeconde, elle ne dure guère paſſé dix à douze raffinages ; & quant à la ſupérieure, que nous nommerons actuellement la première, elle ne réſiſte qu'à deux ou trois opérations tout au plus ; mais que l'on refaſſe cette première ou non, on force le feu dès le commencement, le baſſin ayant aſſez le temps de ſécher & de s'échauffer juſqu'à ce que le cuivre ſoit fondu : dans ce cas-ci, il ne faut que deux heures au cuivre pour être parfaitement rouge, c'eſt alors qu'on fait agir les ſoufflets, le cuivre devient d'abord pâteux, il dégoutte enſuite peu-à-peu juſqu'à ce qu'il ſoit entièrement fondu ; on le reconnoît par un petit trou que l'on a pratiqué dans le milieu de la brique qui bouche l'ouverture par où l'on décraſſe ; depuis le moment qu'on a fait agir les ſoufflets juſqu'à la parfaite fuſion du cuivre, il faut environ ſix heures, ce qui fait huit heures depuis que l'on a commencé à mettre du bois dans la chauffe : on a grande attention pendant la fonte, de n'ouvrir aucune

Temps qu'il faut pour rougir le cuivre.

Temps où il faut faire agir les ſoufflets.

Temps pour fondre le cuivre.

ouverture du fourneau, ni de toucher le cuivre en aucune façon, parce qu'on le refroidiroit & retarderoit par conséquent l'opération; pendant tout ce temps-là, on a soin de prendre de la charbonnaille dans le cendrier pour la porter dans les bassins de réception, avec laquelle on les chauffe en la remuant de temps en temps & en y mettant de la nouvelle après avoir retiré la première; on les chauffe de cette façon-là lorsqu'ils ont déjà servi, & que par conséquent ils ne renferment aucune humidité; mais lorsqu'on les refait à neuf, (ce qui n'arrive qu'après trente ou quarante raffinages) on les sèche & les chauffe bien un jour auparavant avec un gros feu de charbon; on ne sauroit assez prendre de précaution pour cela, afin d'éviter les accidens qui pourroient survenir: on entretient aussi un feu de charbon à l'endroit où se fait la percée. Un quart-d'heure après qu'on a jugé que le cuivre est en belle fusion, on le décrasse pour la première fois, on ouvre à cet effet l'ouverture marquée par la lettre *B* dans l'élévation (*fig. 5*); on prend ensuite dans le cendrier, de la charbonnaille qu'on arrose d'un peu d'eau, & avec une pelle on la jette sur tout le bain de cuivre; elle refroidit assez les scories qui surnagent le bain, pour qu'elles s'y rendent adhérentes: on met ensuite devant l'ouverture, la barre de fer qui est marquée dans l'élévation, & que l'on y rend fixe en la faisant entrer de chaque côté dans le mur; elle sert à supporter le *racle* de fer avec lequel on retire les scories; cet instrument est fait d'un fer plat d'environ un pied de long sur cinq pouces de large, & demi-pouce d'épaisseur soudé à l'extrémité d'une grande barre de fer qui a un pouce en quarré; on retire avec ce *racle*, que l'on peut aussi nommer *écumoire*, les scories qui surnagent le bain; lorsqu'il est rouge au point de se plier, on le retire pour le redresser; pendant ce temps-là on jette de nouvelle charbonnaille qui refroidit un peu le restant des scories qu'un autre ouvrier retire avec un *racle* pareil au précédent: cela fait, on referme l'ouverture avec la même brique qu'on lute bien tout autour avec de l'argile; le raffineur passe ensuite derrière la tuyère & fait sauter la pelote d'argile dont il a été parlé précédemment; pour lors le vent des soufflets frappe sur le bain de cuivre, l'agite, &, par le contact immédiat de l'air accélère, la scorification: depuis ce

Comment l'on chauffe les bassins de réception.

Combien durent les bassins de réception.

Comment on retire les scories.

moment, le raffineur doit viſiter ſouvent la tuyère pour en détacher, avec une baguette de bois, des morceaux de cuivre qui s'y attachent quelquefois: ſi le cuivre eſt trop adhérent, il lui ſubſtitue une baguette de fer; il prend enſuite des eſſais pour connoître à quel point ſe trouve le cuivre; il a pour cela un fer arrondi & poli aux deux extrémités, que l'on nomme *fer d'eſſais*, il le paſſe par la tuyère, le trempe dans le cuivre, d'où il le retire promptement pour l'éteindre dans un petit baquet d'eau; quoiqu'il ſoit difficile de donner des règles certaines pour connoître quand le cuivre a acquis le point de perfection, on peut cependant dire en général qu'il donne par gradation les marques ſuivantes. Si, peu de temps après que l'on a décraſſé le cuivre pour la première fois, on en prend un eſſai, il eſt uni & d'une couleur pâle en-dehors mêlé de taches noires, ſa fracture eſt d'un rouge cendré, l'eſſai ſe détache en frappant la baguette ſur un marteau, on l'eſſuie bien pour prendre un ſecond eſſai, même on la frotte ſur une pierre tendre, afin que le cuivre s'en détache plus aiſément: le cuivre du ſecond eſſai, que l'on prend environ un quart-d'heure après, devient raboteux ſur la ſurface extérieure, les ouvriers le nomment la *râpe;* on prend de ces eſſais de temps en temps, par leſquels on voit que le cuivre devient de plus en plus raboteux & acquiert une plus belle couleur; on y aperçoit intérieurement des taches couleur de laiton, & le cuivre de l'eſſai devient plus mince: à la *râpe* ſuccèdent des petites élévations, mais qui ſont toutes percées, de ſorte que l'eſſai eſt encore raboteux au toucher; lorſque les élévations deviennent plus conſidérables, quoique toujours percées, on décraſſe le cuivre pour la ſeconde & dernière fois de la même façon qu'il a été décrit plus haut; le cuivre approche alors de ſa perfection, ce que l'on reconnoît à ſa belle couleur, aux élévations qui commencent à ſe fermer, & à ce que l'eſſai devient de plus en plus uni au toucher: enfin une partie des élévations ſe ferme, il ſe forme un ou deux petits crochets à l'extrémité de l'eſſai; on y aperçoit auſſi quelquefois des taches d'un rouge approchant de la couleur de ſang, leſquels endroits ſont fort unis, quoiqu'un peu ondés; il faut environ une ou deux heures au plus pour que le cuivre parvienne à ce point-là depuis la première fois qu'on a

Comment on prend l'eſſai.

Marques que le cuivre donne avant d'être raffiné.

Quand eſt-ce que le cuivre eſt raffiné.

décrassé, c'est alors que l'on doit faire les percées: un momen auparavant on commence à dégager le passage en ôtant, avec un ringard, l'argile que l'on a mis derrière la brique dans le trou de la percée, c'est afin qu'aussi-tôt que le raffineur a reconnu le vrai point du raffinage du cuivre, on puisse le faire couler dans les bassins de réception; on met à cet effet dans le trou de la percée, une barre de fer d'environ un pouce de diamètre, pointue à une de ses extrémités, dont l'autre est garnie d'un bouton de fer sur lequel on frappe, jusqu'à ce que l'on pense qu'elle a été assez avant pour faire sauter la brique; on a ensuite un morceau de fer d'un pouce $\frac{1}{2}$ en quarré sur 1 pied 8 pouces de long, dont on peut voir le dessin sur la planche *(fig. 6)*: on le met sur le fer de la percée, de façon que ce dernier puisse entrer dans la fourche *B*, à l'endroit du bouton; un ouvrier le tient perpendiculairement par l'extrémité *A*, pendant qu'un autre frappe avec une masse à l'endroit *C*; de cette façon, on retire les fers de la percée & le cuivre coule dans chaque bassin de réception: mais, comme il arrive quelquefois qu'une des percées est ouverte plus promptement que l'autre, on a ménagé un canal horizontal pour faire communiquer les deux bassins; on peut le voir dans le plan supérieur *(fig. 2, L)*; par ce moyen le surplus du cuivre se rend dans l'autre bassin; sans cela, on courroit risque de voir le cuivre se répandre dans la fonderie, & mettre les ouvriers en danger par l'humidité qu'il rencontreroit. Lorsqu'on fait les percées, on n'ôte point la charbonnaille qui a été mise dans les bassins de réception pour les échauffer, parce qu'elle surnage le cuivre & qu'on la retire à l'aide d'un morceau de bois emmanché au bout d'une baguette de fer, avec les scories qui ont suivi le cuivre; on bouche ensuite les deux trous de percée avec de l'argile, pour qu'il ne coule pas davantage de scories; lorsque toute la surface du cuivre a été bien nettoyée, il s'y élève une espèce de fumée qui n'est autre chose que de petites parties de cuivre sphériques divisées à l'infini, & que l'on nomme par cette raison *cendrée de cuivre* *. Pour éviter qu'il ne s'en élève une trop grande quantité qui se répand autour du bassin & même jusque sur le

Comment se fait la percée.

Cendrée de cuivre.

* Si le cuivre étoit un peu moins raffiné, il s'en éleveroit une plus grande quantité.

fourneau, on a plusieurs petits soufflets à bras avec lesquels on souffle sur la surface pour que le cuivre se refroidisse plus tôt: aussi-tôt qu'il est figé, on y répand un peu d'eau que l'on renouvelle jusqu'à ce que la rosette ait assez de consistance pour la transporter; on fait venir à cet effet les fondeurs & autres ouvriers qui sont à portée, pour aider à transporter ces rosettes; on en met cinq à chaque bassin pour lever & porter les pièces de cuivre dans deux cuves qui sont à côté, & où l'eau se renouvelle continuellement, afin qu'elle soit toujours froide, parce que le cuivre de cette façon en acquiert une plus belle couleur: on lève ces rosettes avec des fourches & des fers plats par le bout qui servent d'abord de levier, en prenant pour point d'appui les cercles de fer qui sont fixés autour des bassins, c'est afin qu'ils ne puissent être endommagés, ces cercles de fer sont marqués dans le plan supérieur; à mesure que les rosettes diminuent de diamètre, & par conséquent de pesanteur, on renvoie les ouvriers à leur premier travail, on en met deux à chaque cuve qui restent jusqu'à la fin pour retirer les rosettes à mesure qu'elles sont froides; ils les portent sur des planches, afin qu'elles puissent se sécher avant de les enfermer dans le magasin.

Le grand bassin peut servir pour deux & souvent trois raffinages, comme il a été dit plus haut, sans autre réparation que celle d'ôter les scories qui s'arrêtent devant la percée & de mettre une nouvelle brique devant chaque petit mur; j'observerai à cette occasion, que lorsqu'on fait à neuf toutes les couches qui forment le bassin, on doit avoir l'attention de ne pas battre aussi fortement les couches inférieures que la supérieure, sans quoi la brasque de cette couche étant frappée & trouvant de la résistance par-dessous, ne s'y lie point; c'est par cette raison qu'on ne se sert des pilons de fer que pour battre la couche supérieure, m'étant aperçu dans les commencemens que cette couche s'enlevoit fort souvent avant la fin de l'opération, quelquefois aussitôt qu'on avoit fait la percée, je l'attribuai d'abord à la négligence des ouvriers; pour m'en convaincre, je voulus être témoin lorsqu'on battoit la brasque, mais la couche résista encore moins qu'auparavant; je pris dès-lors le parti de ne faire frapper fortement que la couche supérieure, on le continue

avec

avec avantage ; j'aurois cependant desiré que la couche supérieure eût pu résister à plus de deux ou trois raffinages * : on prétend que le bassin du fourneau de Tayoba en Hongrie, résiste à dix ou douze, mais je pense devoir l'attribuer au plomb qu'on ajoute au cuivre, lequel en se scorifiant, s'unit à l'argile & au sable qui composent la brasque, après que le charbon en a été détruit, & forme un vernis sur toute la surface, je le crois d'autant plus que les bassins de réception du même fourneau ne durent pas à beaucoup près autant que ceux du fourneau de Cheissey. Comme il pourroit arriver que, par la négligence de ceux qui battent la brasque, il s'enlevât non-seulement une couche, mais même deux du grand bassin; on verra par le plan supérieur, que j'ai pratiqué un bassin *(fig. 2, M)*, qui est ordinairement plein de poussier de charbon, mais que l'on peut vider au besoin pour y faire couler le surplus du cuivre qui se trouveroit trop bas dans le fourneau pour couler dans les deux bassins de réception. Troisième bassin de réception.

L'opération que je viens de décrire, dure ordinairement dix à douze heures, comme on peut le voir par ce qui a été dit ci-dessus; on a reconnu que chaque raffinage consomme l'un dans l'autre environ quatre cents fagots de 4 pieds $\frac{1}{2}$ à 5 pieds de long sur 2 pieds de circonférence ; comme la flamme du fagot tourmente beaucoup plus le fourneau, que ne fait celle du bois de corde, on emploie fort souvent de ce dernier, l'opération n'en devient pas plus chère; pour en brûler moins, on rétrécit la chauffe, comme on peut le voir dans le plan supérieur, par la ligne ponctuée *(fig. 2, B)*; lorsqu'il est refendu, trois moules ou voies au plus faisant ensemble 184 pieds cubes de bois blanc, comme tremble & peuplier, suffisent; lorsque le bois est très-sec, soit en fagot, soit en bois de corde, on en brûle encore moins que la quantité ci-dessus : un maître raffineur & deux aides conduisent le raffinage. Combien de temps dure un raffinage. Consommation du bois.

Le charbon de terre peut s'employer utilement pour l'opération dont je viens de parler, l'épreuve en a été faite; il est vrai qu'une demi-heure après que le cuivre fut fondu, voyant qu'il n'avançoit pas autant qu'avec le bois, je fis achever le raffinage avec Le charbon de terre peut être employé au raffinage.

* On verra dans le supplément, que, conjointement avec mon frère, nous sommes parvenus à remplir notre objet & à ne rien laisser desirer à cet égard.

des fagots bien secs, & je conseillerois d'en user toujours de même si on avoit une mine de charbon assez à portée pour que l'on put préférer son usage à celui du bois, parce que lorsque le cuivre approche de sa perfection, il seroit à craindre que l'acide vitriolique du charbon ne scorifiât une partie du cuivre, au lieu qu'on ne court pas les mêmes risques tant que le cuivre noir contient du fer & du zinc avec lesquels l'acide vitriolique a plus d'affinité.

Déchet du cuivre au raffinage.

Un raffinage de cinquante quintaux de cuivre noir, rend ordinairement quarante-cinq à quarante-six quintaux de cuivre rosette, ce qui fait un déchet de huit à neuf pour cent; mais ce déchet n'est qu'apparent, puisque par des essais réitérés on a reconnu que son déchet réel n'étoit que de quatre & demi pour cent, parce qu'il reste toujours beaucoup de cuivre dans les crasses; on sait que dans quelque fourneau que ce soit, les scories provenant du raffinage sont toujours riches en cuivre: ce déchet a été constaté en 1760 par un essai de deux cents quintaux de cuivre noir en quatre raffinages, dont les crasses furent fondues séparément dans un fourneau à manche; il est aussi prouvé que le cuivre fait environ un pour cent moins de déchet dans ce fourneau que sur le petit foyer, je crois qu'on peut attribuer cette différence à ce que l'on perfectionne dans une seule opération, une quantité de cuivre qui en exige au moins vingt sur le petit foyer; on sait que l'on ne peut raffiner du cuivre sans qu'il n'y en ait toujours un peu qui se scorifie avec les matières qui lui sont étrangères; plus le volume est grand, plus la quantité qui se scorifie est moindre à proportion: d'ailleurs le petit foyer est un fourneau ouvert d'où l'on s'aperçoit que le soufflet enlève des petites parties de cuivre qui se répandent dans la fonderie, la violence du vent en enlève aussi par la cheminée; on en ramasse une partie en Allemagne, en pratiquant une petite chambre dans la cheminée des petits foyers à raffiner le cuivre: quant à la différence pour la consommation du bois, il est prouvé que la dépense du grand fourneau, est moindre des deux tiers de celle qu'exige en charbon le raffinage sur le petit foyer. On peut voir par la description que je viens de donner, que le fourneau à raffiner le cuivre, construit aux mines de Cheissey en Lyonnois, a plus de chaleur que n'en ont ceux d'Allemagne; &

par cette raiſon, il eſt plus avantageux : celui de Grunenthal en Saxe conſomme 438 pieds cubes, bois de corde, & environ 24 pieds cubes de charbon pour raffiner ſeulement quarante quintaux de cuivre noir : à Tayoba, en Hongrie, on conſomme environ 220 pieds cubes, bois de corde, pour raffiner cinquante quintaux de cuivre noir, auxquels on ajoute trois à quatre quintaux de plomb qui ſe ſcorifient en pure perte; on ſait en outre que dix livres de plomb ſcorifient environ une livre de cuivre.

EXPLICATION DE LA PLANCHE.

Fig. 1.ere *repréſentant le plan inférieur.*

A, fondation de maçonnerie.

B, canaux pour empêcher l'humidité des fondations, de monter dans le corps du fourneau ; on les a ponctués, parce qu'ils ſont au-deſſous du niveau du plan ; ils communiquent en dehors par l'ouverture ou eſpèce de ſoupirail, lettre *X*.

C, le cendrier.

D, le ſoupirail par où entre l'air dans la chauffe ou réverbère, il eſt dirigé ſuivant les lignes ponctuées : c'eſt par-là que l'on retire les cendres, on y deſcend par l'eſcalier *E*.

F, le mur de la fonderie.

G, les petites ventouſes.

H, forme du baſſin rempli de ſcories tout autour des ventouſes & par-deſſus.

Fig. 2.de *repréſentant le plan ſupérieur.*

A, ouverture de la cheminée qui monte perpendiculairement.

B, grille ſur laquelle on met le bois ; cette chauffe ſe rétrécit ſuivant la ligne ponctuée, par le moyen d'un petit mur de brique, lorſque l'opération ſe fait avec du bois de corde, au lieu de fagots.

C, tuyère pour la direction du vent.

D, deux ſoufflets de bois doubles, dont on n'a deſſiné qu'une partie.

E, paſſage de la flamme.

F, ouverture par où la flamme ſort pour enfiler la cheminée.

G, paſſage des ſcories, c'eſt l'ouverture par laquelle on décraſſe le cuivre.

H, petits murs en briques, entre lesquels on a laissé les passages pour les percées, & devant lesquels on met une brique.

I, bassin où se raffine le cuivre.

K, les deux bassins de percée.

L, canal de niveau qui communique les deux bassins de réception & qui sert, en cas que le cuivre coule plus abondamment d'une percée que de l'autre; pour lors il sert à recevoir le surplus du cuivre qui, sans cela, déborderoit & se répandroit dans la fonderie.

M, est un troisième bassin qui est au niveau du terrein, mais qui est toujours rempli de charbonnaille; on ne s'en sert que dans un cas d'accident, c'est-à-dire lorsque la brasque qui forme le grand bassin dans l'intérieur du fourneau, vient à s'élever & que le cuivre se trouve trop bas pour pouvoir s'écouler dans les bassins supérieurs, pour lors on fait couler le restant dans ce bassin *M*.

Fig. 3.me *représentant la coupe du fourneau prise sur la ligne* A' B', *des deux plans dans laquelle on a fait paroître la voûte du soupirail pour le passage de l'air dans la chauffe.*

A, maçonnerie des fondations.

B, canaux pour l'humidité.

C, le cendrier.

D, soupirail voûté par où entre l'air dans la chauffe; il y a une porte que l'on ferme lorsque le vent est trop fort.

E, escalier pour aller dans le cendrier.

F, mur de la fonderie.

G, les petites ventouses inférieures.

H, lit de scories.

I, briques arrangées verticalement sur les scories.

K, petite couche d'argile.

L, lit de brasque qui se fait en trois couches, comme il a été dit ci-devant.

M, chauffe ou réverbère où l'on met le bois.

N, passage de la flamme.

O, intérieur du fourneau.

P, voûte du fourneau.

Q, tuyère.

R, sortie de la flamme; il y a une petite voûte à cet endroit,

indépendante de la grande voûte, étant sujette à réparation.

S, premier conduit de la cheminée.

T, deuxième conduit qui monte obliquement & aboutit dans la grande cheminée perpendiculaire.

V, grande cheminée perpendiculaire, les lignes ponctuées marquent l'ouverture pour la conduite de la flamme.

X, porte qui se ferme avec une seule brique faite avec de l'argile, de la paille hachée & de la bourre de veau; elle ne s'ouvre point pendant l'opération, les autres ouvertures sont bouchées de même.

Y, petit mur de brique où se fait la percée du cuivre devant lequel on met une brique pour retenir le cuivre.

Z, bassin de réception.

Fig. 4.me *représentant la coupe du fourneau prise sur la ligne* D'C' *des deux plans.*

A, maçonnerie des fondations.

B, canaux pour l'humidité, ils communiquent en-dehors par l'ouverture ou espèce de soupirail *X*.

C, les petites ventouses inférieures.

D, lit de scories.

E, briques placées verticalement.

F, petite couche d'argile.

G, lit de brasque.

H, petites ventouses supérieures pour la sortie de l'humidité.

I, sortie de la flamme.

K, intérieur du fourneau.

L, voûte du fourneau.

M, conduit oblique qui aboutit à la grande cheminée.

N, grande cheminée perpendiculaire, les lignes ponctuées désignent l'ouverture pour la conduite de la flamme; on a ménagé une ouverture à l'endroit marqué par la lettre *O*.

P, bassin de réception.

Fig. 5.me *représentant l'élévation au-dessus du niveau du terrein.*

A, ouverture de la chauffe par où on met le bois, & qui se ferme avec une porte de fer.

B, ouverture par où on décrasse le cuivre, qui ne s'ouvre que pour retirer les scories & que l'on referme aussi-tôt après.

C, ouverture pour faciliter la manœuvre dans le fourneau & par laquelle on y entre le cuivre noir, mais que l'on n'ouvre point pendant toute l'opération.

D, ouverture entre deux petits murs de briques par où on fait la percée.

E, les deux baſſins pour les percées.

F, petite cheminée qui reçoit la flamme & la fumée qui ſortent du fourneau lorſque l'on décraſſe, ſon conduit eſt ponctué.

G, mur de la fonderie contre lequel appuie ladite cheminée.

H, conduit oblique qui aboutit dans la grande cheminée.

I, grande cheminée perpendiculaire.

K, ouverture des petites ventouſes. On verra par le deſſin, que pour donner plus de ſolidité au fourneau, on l'a lié avec quelques liens de fer; ceux des baſſins de réception ſont ſur-tout indiſpenſables.

Fig. 6.me *Morceau de fer pour retirer les fers de la percée & faire couler le cuivre.*

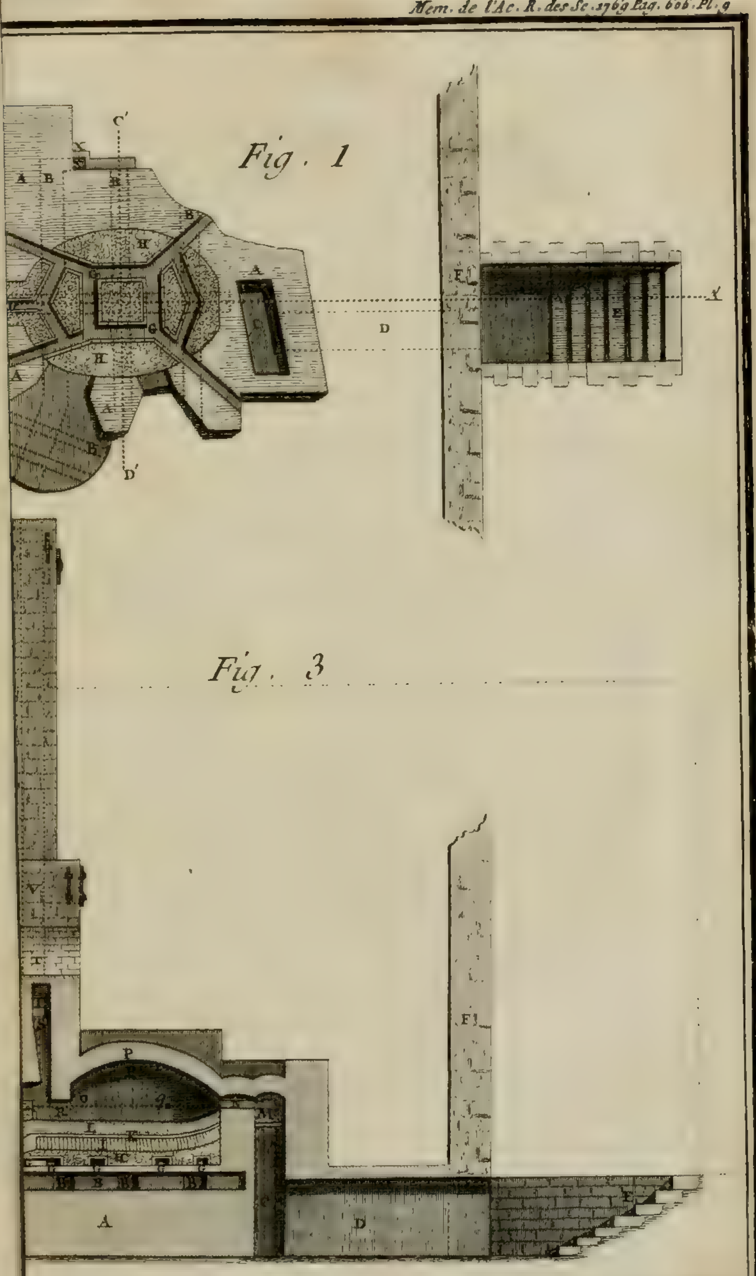
A, extrémité de la fourche.

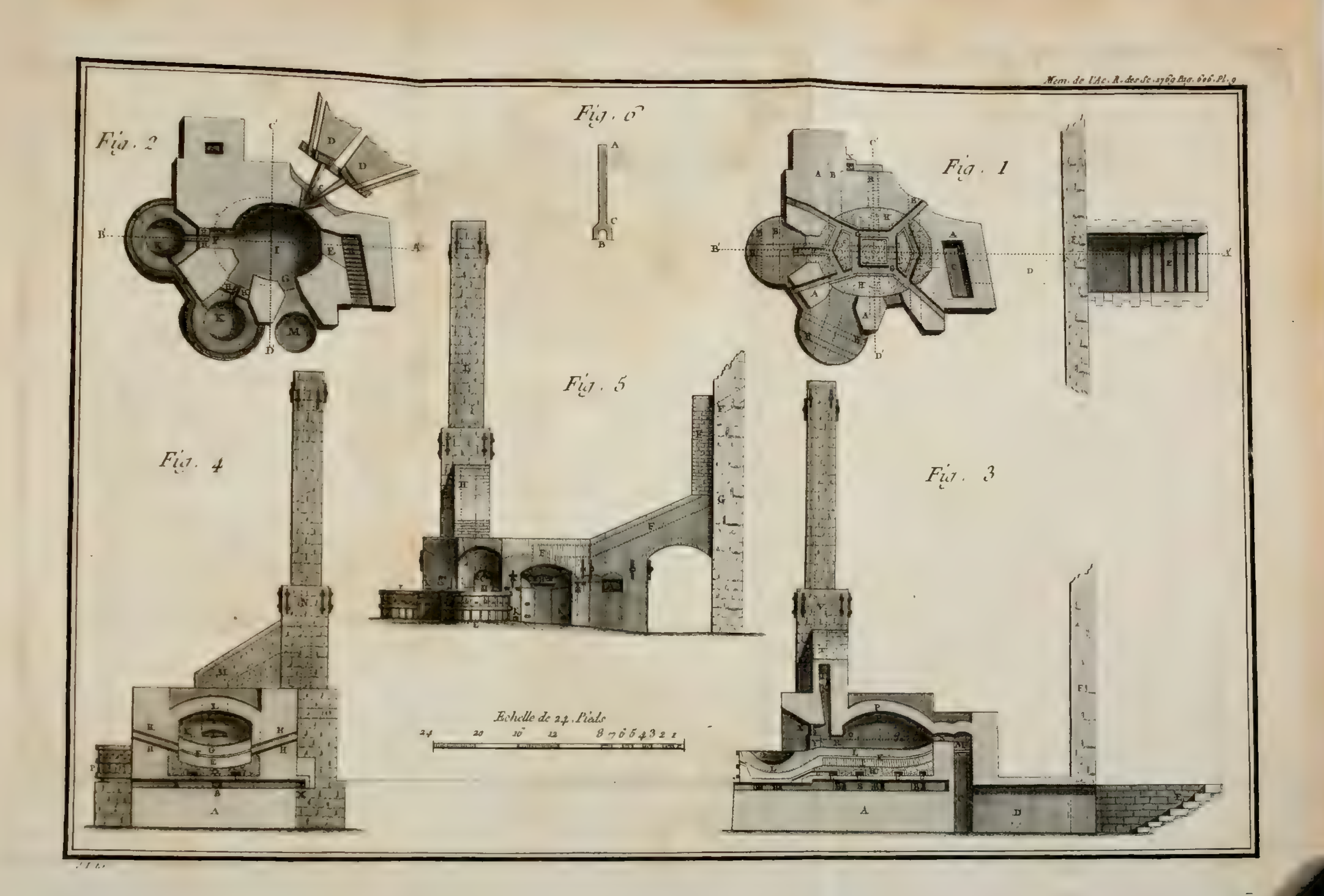
B, la fourche.

C, l'endroit où l'on frappe avec une maſſe pour retirer les fers de la percée & faire couler le cuivre dans les baſſins de réception.






Fig. 1
Fig. 3
C'
D'
A
B
C
D
E
F
G
H
K
L
M
P
T
V
X


Fig. 2
Fig. 6
Fig. 1
Fig. 5
Fig. 4
Fig. 3
Echelle de 24. Pieds
24
20
16
12
8 7 6 5 4 3 2 1

FAUTES À CORRIGER

Dans l'Hiſtoire de cette année 1769.

Pag. Lign.

2...14, que comme, *liſez* comme

5...16, que produiſent, *liſez* qui produiſent

11...15, de cet inſtrument, *liſez* de ces liqueurs

14...10, deux tiers, *liſez* un tiers

33...22, défendu, *liſez* défendues

44...*ante-pénult.* ſingulier, *liſez* intéreſſant

66...15, proportion, *liſez* portion

68...21, *après le mot* contient, *ſuppléez* par pinte

Pag. Lign.

95... 4, ne put le conclure qu'à, *liſez* ne put que le conclure à

97...16, ne ſoit parvenu, *liſez* ne nous ſoit parvenu

121... 3, que ſi les mortiers, *liſez* que les mortiers

122...14, que dans les grandes viteſſes, *liſez* que dans les grandes rivières

124...11, le ſieur Ronbo, *liſez* le ſieu. Roul

Dans les Mémoires.

Page 98, *ligne* 4, à compter d'en bas, au lieu de $\xi \theta d z^2$, liſez $\zeta \theta d z^2$.

Page 99, *ligne* 3, au lieu de $\theta' d \left(\frac{\theta''}{\theta}\right)$, liſez $\theta' d \left(\frac{\theta''}{\theta'}\right)$.

Page 137, *ligne* 6, à compter d'en bas, & lignes ſuivantes, au lieu de ξ, mettez par-tout $\frac{\xi}{\theta'}$, & au lieu de dz, mettez dz^2.

Page 141, *lignes* 6 & 8, à compter d'en bas, au lieu de $\frac{\sigma - d\xi}{\xi dx}$, mettez $\sigma - \frac{d\xi}{\xi dx}$.

Page 229, *ligne* 10, de $3^{d} \frac{1}{2}$, *liſez* de $3^{pi.} \frac{1}{2}$

Page 306, *ligne dernière*, $F = - 9908$, liſez $F = + 9908$.

Page 308, *ligne* 17, $\frac{\sigma' \tau}{\partial}$, liſez $\frac{\sigma \tau'}{\partial}$.

Page 318, *ligne* 9, $\sqrt{(\rho^2 q^2 + q^2 r^2)}$, liſez $\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}$.

Page 319, *ligne* 22, $\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}$, liſez $\sqrt{(\rho^2 q^2 + p^2 r^2)}$.

Page 354, *ligne* 11, $2 \times \frac{\zeta \varphi}{nqr}$, liſez $2 \times \frac{3600'' \zeta \varphi}{nqr}$.

Page 357, *ligne* 8, (2.e colonne), $\left(\frac{\varphi r}{q} + \frac{H \omega s}{q f}\right)$, liſez $\left(\frac{\varphi r}{q} - \frac{H \omega s}{q f}\right)$.

Page 402, *ligne dernière*, $= - \frac{3600'' \zeta}{nr}$, liſez $b = - \frac{3600'' \zeta}{nr}$.

Page 440, *ligne* 20, $\frac{22}{118}$, *liſez* $\frac{22}{128}$.

Page 529, *ligne* 4, Dollona, *liſez* Dollond

